C

Algebra.

Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen,

bearbeitet

von

Wilhelm Winter,
Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium
zu Regensburg.

München.
Theodor Ackermann
königlicher Hof-Buchhändler
1891.

Druck von C. Brügel u. Sohn in Ansbach.

Vorrede.

In vorliegendem Lehrbuch mit Aufgabensammlung wollte ich dem Lehrer ein Buch anbieten, welches ihm das lästige Diktieren der Regeln und Gesetze abnimmt, und dem Schüler ein Buch in die Hand geben, welches eine ausreichende Fülle von Übungsmaterial enthält.

Die algebraischen Gesetze sind in einfacher Form dargestellt, so daß es dem Lehrer überlassen bleibt, ihre Anwendung an der Hand der Beispiele den Schülern zu erklären. Etwas ausführlich glaubte ich bei dem Kapitel über Darstellung abhängiger Größen sein zu dürfen, teils weil es eines der wenigen und deshalb um so wichtigeren Kapitel ist, in welchen die Algebra eine direkte Anwendung auf andere Wissenschaften erfährt, teils auch weil es eine nützliche Vorbereitung für die Behandlung der Textgleichungen enthält. Ausführlich und mit Beispielen erläutert glaubte ich auch die Anleitungen zur Lösung der Gleichungen geben zu sollen. Doch bleibt es gerade hier dem Lehrer überlassen, die Methoden zu variieren, so daß bei Behandlung der Beispiele mehrere zur Lösung führende Wege aufgesucht werden, und aus ihnen der einfachste und bequemste ausgewählt wird.

An Aufgaben habe ich bei jedem Kapitel eine so große Anzahl beigegeben, daß für Schule und Haus ein mehr als genügender Vorrat vorhanden sein dürfte. Die ersten Aufgaben jedes Kapitels sind dabei stets so einfach gehalten, daß sie im Kopf gelöst werden können, da gerade die rasche und sichere mündliche Behandlung zur Klarheit über die Bedeutung und Anwendung der Gesetze führt.

Die Gleichungen sind erst nach der Behandlung der Wurzeln und Logarithmen eingesetzt, um weder die Grundoperationen noch die Gleichungen zerteilen zu müssen. Doch sind die linearen Gleichungen so einfach gehalten, daß sie, wie es an vielen Schulen üblich ist, gleich nach den vier Spezies oder nach den einfachen Potenzen durchgenommen werden können.

Bei Aufstellung sämtlicher Aufgaben suchte ich die Einförmigkeit zu vermeiden; ich habe deshalb nie mehrere Aufgaben

derselben Art verwendet, sondern solche gewählt, welche im Charakter von einander verschieden sind, oder wenigstens in einem wesentlichen Teile anders verlaufen oder etwas mehr Schwierigkeit bieten.

Die Aufgaben sind alle von mir selbst gefertigt und im Unterricht auf ihre Brauchbarkeit geprüft. Natürlich finden sich Normalaufgaben und besonders charakteristische Beispiele, welche als solche in jeder ähnlichen Aufgabensammlung wiederkehren, auch in dieser Sammlung in ihrer gewohnten Form. Ferner habe ich einige Beispiele aus Meier Hirsch, welche wegen ihrer besonderen Schönheit auch schon in andere Aufgabensammlungen übergegangen sind, aufgenommen, sowie auch einige in Prüfungen gestellte Aufgaben.

Möge das Buch, welches das Ergebnis vieljährigen Unterrichtes ist, wohlwollende Beurteilung und nützliche Verwendung finden.

Regensburg im Mai 1890.

Der Verfasser.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

1.

Erklärung der Größe. Aufgabe der Mathematik.

Unter **Größe** versteht man alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, was also größer oder kleiner gemacht oder gedacht werden kann.

Wenn man zwei Dinge der Größe nach mit einander vergleicht, so geschieht das entweder in bezug auf die Menge von gleichartigen Dingen, aus welchen jedes besteht, oder in bezug auf die Eigenschaften, welche jedem zukommen.

Der Vergleich zweier Dinge in bezug auf die Menge der dasselbe zusammensetzenden gleichen Dinge führt auf den **Begriff der Zahl**. Man bezeichnet nämlich das Vorhandensein eines Dinges mit 1, das Vorhandensein eines Dinges und noch eines gleichen mit 2, das Vorhandensein von 2 Dingen und noch einem gleichen mit 3 und fährt so fort, indem man jeder durch weiteres Hinzufügen eines gleichen Dinges entstehenden neuen Menge eine neue Bezeichnung gibt. **Jede solche Bezeichnung einer bestimmten Menge gleicher Dinge nennt man eine Zahl.** Die Reihe von Zahlen, welche man dadurch erhält, daß man zu 1 immer noch eine Einheit dazuzählt, nennt man die **natürliche Zahlenreihe**; sie ist unbegrenzt, da es immer möglich ist, zu einer Zahl noch eine Einheit zu legen. Will man angeben, daß eine Zahl größer ist als jede angebbare Zahl, so nennt man sie unendlich groß, ∞.

Zählen oder Numerieren heißt die Anzahl vorhandener Dinge aufsuchen, indem man immer je eines der vorhandenen Dinge nimmt und dabei immer um je eine Zahl in der natürlichen Zahlenreihe weitergeht. Man zählt z. B. an einem Würfel 6 Flächen, 8 Ecken, 12 Kanten.

Man nennt eine Zahl eine benannte Zahl, wenn der Zahl die Bezeichnung derjenigen Einheiten beigefügt ist, deren Menge sie angibt; z. B. 25 Schüler, 14 Tage. Ist die Benennung der Einheit nicht beigefügt, so heißt die Zahl eine unbenannte Zahl; sie gibt blos an, wie oft eine Einheit vorhanden ist, ohne über die Einheit selbst etwas auszusagen.

Will man zwei Dinge in bezug auf ihre Eigenschaften vergleichen, so ist das nur möglich in bezug auf solche Eigenschaften, welche beide gemeinsam besitzen; man kann die Schwere eines Körpers mit der Schwere eines andern vergleichen, jedoch nicht die Schwere eines Körpers mit der Durchsichtigkeit eines anderen. Der Vergleich der beiden Dinge bezieht sich dann auch nur auf die eine Eigenschaft, indem man voraussetzt, daß die Dinge in allen anderen Eigenschaften übereinstimmen, oder daß auf die anderen Eigenschaften keine Rücksicht genommen wird. Man vergleicht etwa die Schwere eines Körpers mit der eines anderen Körpers, ohne auf den Stoff Rücksicht zu nehmen, aus welchem sie bestehen; den Raum eines Körpers vergleicht man mit dem eines anderen Körpers, ohne auf die Form des Raumes Rücksicht zu nehmen, u. s. w.

Zwei Dinge, welche eine Eigenschaft gemein haben, nennt man in bezug auf diese Eigenschaft gleichartig. Zwei Stäbe sind z. B. gleichartig hinsichtlich der Länge, denn jeder hat die Eigenschaft, lang zu sein; sie sind auch gleichartig hinsichtlich des Gewichtes, denn jeder hat die Eigenschaft schwer zu sein; sie sind auch gleichartig hinsichtlich des Rauminhaltes, sind aber vielleicht ungleichartig hinsichtlich des Stoffes.

In bezug auf das Vorhandensein einer Eigenschaft stellt jedes Ding eine Größe dar, insofern die Eigenschaft in größerem oder geringerem Maße vorhanden sein kann. Jedes Ding kann also mit einem in bezug auf eine Eigenschaft desselben gleichartigen Dinge verglichen werden. Der Vergleich besteht zunächst nur darin, daß man nachsieht, ob das eine Ding diese Eigenschaft in höherem oder geringerem Maße besitzt. Man sagt dann, das eine Ding ist in bezug auf diese Eigenschaft größer oder kleiner als das andere; z. B. ein Soldat ist tapferer als ein anderer, ein Stein ist schwerer als ein anderer.

Insofern man nur das Vorhandensein einer Eigenschaft betrachtet, also nur betrachtet, ob diese Eigenschaft in größerem oder geringerem Maße dem Dinge zukommt, ohne auf die anderen Eigenschaften des Dinges Rücksicht zu nehmen, nennt man die Eigenschaft selbst eine Größe. Z. B. die Schwere ist eine Größe, denn sie ist eine Eigenschaft, welche einem Dinge in größerem oder geringerem Maße zukommt.

Eine Größe messen heißt untersuchen, wie oft eine andere gleichartige Größe in ihr enthalten ist, oder wievielmal sie größer ist, als diese andere Größe. Dies setzt zunächst voraus, daß die Größe selbst teilbar ist, daß also, wenn das Ding, der Träger der Eigenschaft, in Teile zerlegt wird, auch jedem einzelnen Teile dieselbe Eigenschaft nur in geringerem Maße zukommt. Dies ist der Fall etwa bei der Schwere, denn jeder Teil des Körpers ist schwer, ebenso bei der Länge, dem Flächen-

inhalt, dem Rauminhalt, auch bei manchen Eigenschaften eines Vorganges, z. B. bei der Zeit, dem zurückgelegten Weg, der Arbeit, u. m. a.

Jede in diesem Sinne teilbare Größe ist meßbar auf folgende Art. Man wählt eine beliebige gleichartige Größe als Einheit, Maßeinheit, und untersucht, wie oft diese Maßeinheit in der zu messenden Größe enthalten ist, oder man zerlegt die zu messende Größe in Teile, deren jeder der Maßeinheit gleich ist, und zählt die Anzahl dieser Teile.

Die gefundene Zahl heißt die Maßzahl; durch sie ist die zu messende Größe bestimmt in bezug auf die Einheit; denn die Maßzahl gibt an, wievielmal die zu messende Größe größer ist als die Maßeinheit. Beispiel: Um das Gewicht zu bestimmen, nimmt man das Gewicht eines *ccm* Wasser als Einheit, nennt dieses 1 *g*, und untersucht, wie oft dieses Gewicht in dem zu messenden Gewicht enthalten ist, etwa 25 mal; man sagt dann, das Gewicht des Körpers beträgt 25 *g*, das heißt, das Gewicht des Körpers ist 25 mal größer als das Gewicht 1 *g*, oder das Gewicht 1 *g* ist 25 mal im Gewicht des Körpers enthalten, oder das Gewicht des Körpers ist zerlegbar in 25 Teile, von denen jeder 1 *g* Gewicht hat.

Manche Eigenschaften werden nicht, oder nicht immer kleiner, wenn diejenigen Dinge, welche die Träger der Eigenschaft sind, in Teile zerlegt werden. So ist z. B. die Festigkeit eine Eigenschaft eines Dinges, kann aber, je nachdem man das Ding in Teile teilt, gleich bleiben, größer oder kleiner werden. Doch hat jedes der einzelnen Teile noch dieselbe gleichartige Eigenschaft wie das Ganze, und man kann sich wenigstens vorstellen, daß eine Eigenschaft, so groß wie die zu messende, hergestellt wird durch Zusammenstellung anderer Dinge von gleichartiger aber geringerer Eigenschaft. So kann z. B. eine Stütze ersetzt werden durch mehrere Stützen, oder die Arbeit eines Pferdes ersetzt werden durch die Arbeiten von 5 Männern. Auch in diesen Fällen ist also die Größe durch eine gleichartige Größe als Einheit meßbar.

Solche Eigenschaften aber, welche einem Ding als Ganzem zukommen derart, daß, wenn das Ding in Teile zerlegt wird, kein Teil eine gleichartige Eigenschaft hat, z. B. die Tapferkeit eines Soldaten, oder daß auch nicht zwei Dinge von gleichartiger Eigenschaft zusammengenommen die Eigenschaft eines dritten Dinges ersetzen können, z. B. die Härte eines Gegenstandes, solche Eigenschaften können wohl unter sich verglichen, aber nicht gemessen werden. Z. B. man kann wohl durch Versuche erfahren, daß die Härte des Diamantes größer ist, als die Härte des Glases, aber nicht angeben, wievielmal sie größer ist.

Die Mathematik beschäftigt sich nur mit den meß-

baren Größen, weshalb man diese auch mathematische Größen nennt.

Die Größe der Maßeinheiten wird durch Herkommen, Übereinkommen, Gesetz, oder willkürlich bestimmt.

Aufgabe der Mathematik, der allgemeinen Größenlehre, ist es, die Größen zu messen. Ist insbesondere eine Größe von mehreren anderen Größen abhängig, so ist es Aufgabe der Mathematik, diese Größe mittels der anderen Größen zu bestimmen; die Mathematik lehrt also, wie die Maßzahlen mehrerer Größen mit einander verbunden werden müssen, um die Maßzahl einer zu messenden Größe zu erhalten. Jede Verbindung zweier Zahlen nennt man eine mathematische Operation. In vielen Fällen ist die Art, wie eine Größe von einer anderen abhängt, allgemein bekannt; z. B. es ist bekannt, wie der Zins abhängt von der Größe des Kapitals, der Größe des Zinsfußes und der Zeit; in solchen Fällen lehrt die Mathematik direkt, wie die eine Größe (Zins) berechnet, d. h. ihrer Größe nach durch Verbindung der anderen Größen bestimmt wird. In manchen Fällen ist die Art, wie die eine Größe von anderen Größen abhängt, nicht ohne weiteres bekannt. Es ist dann Aufgabe der untersuchenden Wissenschaften (Experimentalwissenschaften), die Art der Abhängigkeit zu erforschen. Z. B. der Druck, welchen der Dampf auf den Kolben der Dampfmaschine ausübt, ist abhängig von der Größe des Kolbens, der Dichte und Wärme des Dampfes, doch ist die Art dieser Abhängigkeit nicht von vorne herein klar; es ist deshalb Aufgabe der Physik, die Art dieser Abhängigkeit durch Versuche zu erforschen. Ist diese Abhängigkeit erforscht, so ist es Aufgabe der Mathematik, die Größe des Druckes aus jenen anderen Größen vermittels der erforschten Abhängigkeitsart zn berechnen. Insoferne die Mathematik dazu dient, um, wenn eine Experimentalwissenschaft die Art der Abhängigkeit eine Größe von mehreren anderen erforscht hat, die abhängige Größe zu berechnen, ist die Mathematik eine wichtige Hülfswissenschaft aller Experimentalwissenschaften.

Wäre die Mathematik blos Hülfswissenschaft der Experimentalwissenschaften, so würde sie Größen nur dann berechnen, wenn sie in einer wirklich vorkommenden, durch eine Erfahrungswissenschaft festgestellten Art von anderen Größen abhängen.

Die Mathematik als für sich bestehende Wissenschaft berechnet oder sucht zu berechnen jede Größe, welche auf irgend eine vernünftiger Weise denkbare Art von anderen Größen abhängt, nimmt also keine Rücksicht darauf, ob die von ihr betrachteten Abhängigkeitsarten in der Natur wirklich vorkommen oder nicht.

Auf diese Weise ist es auch möglich, eine feste Ordnung in die Entwickelung der Mathematik zu bringen. Auch darf es dann

der reinen Mathematik nicht verwehrt werden, Größen, auf welche sie im Gange ihrer Ableitungen kommt, auch dann noch in Betracht zu ziehen, wenn diese Größen in der Natur nicht nachweisbar sind.

2.

Einführung der Buchstaben. Einteilung der Mathematik. Grundsätze.

Die Mathematik befaßt sich mit meßbaren Größen, also mit solchen, bei welchen angegeben werden kann, wievielmal sie größer sind als eine Maßeinheit, oder wieviele Maßeinheiten sie enthalten. Zur Ableitung der mathematischen Gesetze ist es aber nicht notwendig, vorauszusetzen, daß die Größen wirklich gemessen sind, sondern es genügt, vorauszusetzen, daß sie meßbar sind, daß sie also, wenn nötig, gemessen werden und durch die Anzahl gewisser Maßeinheiten ersetzt werden können.

Die Aufgabe der Mathematik ist, durch Verbindung zweier Größen eine neue Größe zu berechnen. Die hiezu aufzustellenden Regeln sollen so allgemein sein, daß sie nicht blos für bestimmte Werte der Größen gelten, sondern für jeden beliebigen Wert der Größen passen. Deshalb werden die Größen nicht durch bestimmte Zahlen ausgedrückt, da jeder Zahl nur ein ganz bestimmter Wert zukommt, sondern die Größen werden durch Buchstaben dargestellt. Ein solcher Buchstabe bezeichnet also irgend einen Wert der durch ihn dargestellten Größe; er kann deshalb jeden Wert bedeuten, welchen die durch ihn dargestellte Größe überhaupt annehmen kann, und wird eine allgemeine Größe oder eine allgemeine Zahl genannt. Jeden Wert, den man einem Buchstaben beilegt oder beigelegt denkt, hat er im Verlaufe der Rechnung beizubehalten.

Algebra und Geometrie.

Derjenige Teil der Mathematik, welcher lehrt, wie man aus zwei oder mehreren allgemeinen Größen eine neue Größe mittels der als bekannt vorausgesetzten Abhängigkeitsart berechnet, heißt die Algebra, und wird auch Buchstabenrechnung genannt, weil die vorkommenden Größen durch Buchstaben ausgedrückt sind.

Den andern Teil der Mathematik bildet die Geometrie, die Lehre vom Raum. Sie untersucht die gegenseitige Lage der Elemente des Raumes, der Punkte, Linien und Flächen, sie untersucht die Form der Figuren und Körper, und erforscht, auf welche Art die Größe von Linien, Flächen, Körpern und Winkeln abhängt von den sie bestimmenden Größen, um sie dann mittels der Regeln der Algebra zu berechnen.

Grundsätze und Erklärungen.

Erklärung (Definition). Zwei Größen, welche für einander gesetzt werden können, ohne daß sich bei Beibehaltung derselben Umstände irgend eine andere von ihnen abhängige Größe ändert, nennt man gleich.

Grundsatz. Gleiche Größen dürfen für einander gesetzt werden, wenn es blos auf die Größe der betrachteten Dinge ankommt.

Will man ausdrücken, daß zwei Größen einander gleich sind, so verbindet man sie durch das Zeichen =. Z. B. $1\,m = 10\,dm$; $a = b$.

Grundsatz. Jede Größe ist sich selbst gleich.

Grundsatz. Das Ganze ist der Gesamtheit seiner Teile gleich.

Lehrsatz. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie unter sich gleich.

Es wird vorausgesetzt, daß $a = c$ und $b = c$, und behauptet, daß dann $a = b$.

Beweis. Wenn man in $a = c$ statt c die ihr gleiche Größe b setzt, so erhält man $a = b$, was der Behauptung entspricht.

Zusatz. Wenn $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = e$ u. s. f., so ist auch $a = e$, oder $a = b = c = d = e$. D. h. wenn in einer Reihe von Größen jede der folgenden gleich ist, so sind alle einander gleich.

I. Teil.

Die vier Grundrechnungsarten.

---

1. Abschnitt. Addition.

3.

Die einfachste Art, auf welche eine Größe von zwei anderen Größen abhängig sein kann, oder durch Verbindung zweier anderen Größen entstehen kann, ist die, daß die neue Größe so groß ist, oder so groß sein soll, als die zwei Größen zusammen.

Diese Art des Vereinigens zweier Größen nennt man Addieren.

Zwei Größen addieren heißt eine Größe suchen, welche so groß ist als die zwei gegebenen Größen zusammen.

Die gegebenen Größen nennt man *Summanden*, die gesuchte Größe die *Summe*.

Die Summe zweier Größen ist also eine Größe, welche so groß ist, als die zwei Größen zusammen.

Sind die zwei gegebenen Größen zwei Zahlen, so findet man die Summe, wenn man zur einen noch so viele Einheiten durch Weiterzählen hinzulegt, als die andere enthält.

Sind die Summanden allgemeine Größen, a und b, so stellt man ihre Summe dar dadurch, daß man sie durch das Zeichen $+$ (plus) verbindet. Die Summe ist $a+b$.

Der algebraische Ausdruck $a+b$ bedeutet nicht nur, daß zur Größe a die Größe b hinzugefügt werden soll, sondern er bezeichnet auch die schon fertige Summe, also eine Größe, welche so groß ist als a und b zusammen.

In einer Summe ist die Ordnung der Summanden beliebig. $a+b=b+a$. Daß diese beiden Summen gleiche Größen vorstellen, muß als ein zur Definition des Addierens gehöriger Grundsatz angesehen werden.

Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. Wenn $a=b$ und $c=d$, so ist $a+c=b+d$. Denn es ist $a+c=a+c$ (jede Gr. sich s. gleich); ersetzt man rechts a durch b, und c durch d (Gleiches darf f. Gl. gesetzt w.), so erhält man $a+c=b+d$.

Die Definition des Addierens verlangt nicht, daß die zu summierenden Größen a und b gleichartig sein müssen, da es nichts widersinniges enthält, sich vorzustellen, daß eine Größe aus zwei ungleichartigen Teilen zusammengesetzt sei. Beispiel: Wenn ich ein Haus a und einen Garten b besitze, so ist mein Besitz $= a + b$. Nur wenn verlangt wird, man soll eine Anzahl von Maßeinheiten angeben, welche der Größe nach dieser Summe entspricht, müssen die Summanden gleichartig sein; denn nur wenn sie gleichartig sind, ist es möglich, daß ein und dieselbe Größe, die Maßeinheit, sowohl in der einen Größe a, als auch in der anderen Größe b enthalten ist. Beispiel: Haus und Garten sind gleichartig in bezug auf ihren Wert (ungleichartig in bezug auf räumliche Größe, oder Gewicht); man kann sie deshalb in bezug auf den Wert mit derselben Größe, 1 ℳ, messen, und es ist etwa $a = 6000$ ℳ, $b = 2000$ ℳ.

Sind die Summanden a und b durch Anzahlen ein und derselben Maßeinheit ausgedrückt, so können diese Anzahlen nach Art des Weiterzählens zu einer einzigen Anzahl von Maßeinheiten vereinigt werden und die Summe erscheint dann als eine einzige Zahl. Beispiel: Mein Besitz = 6000 ℳ + 2000 ℳ = 8000 ℳ.

Ebenso wie man aus der unbenannten Einheit 1 durch Hinzufügen von je einer Einheit die allgemeine Zahlenreihe 1, 2, 3, ... bildet, so kann man aus einer Größe a durch Hinzufügen von je einer ebensolchen Größe a eine allgemeine Größenreihe a, 2a, 3a, ... bilden, indem man sagt: $a + a$ gibt $2a$, $2a + a$ gibt $3a$, u. s. f. Größen derselben Größenreihe, wie 3a, 5a, ... sind gleichartige Größen, weil sie durch dieselbe Einheit a gemessen werden können. Summen von Größen derselben Größenreihe, oder Summen gleichartiger Größen können nach Art des Weiterzählens in der Größenreihe durch eine Größe derselben Größenreihe also durch eine einzige gleichartige Größe dargestellt werden. Beispiel: $3a + 5a = 8a$; $7b + 10b = 17b$; $9x + x = 10x$.

Soll eine Größe so groß sein als mehrere Größen zusammen, so ist sie gleich der Summe dieser Größen $s = a + b + c + d + \ldots$. Dabei wird festgesetzt, daß diese Summe dadurch gebildet werden soll, daß man zur ersten Größe a addiert die zweite Größe b, zur erhaltenen Summe addiert die dritte Größe c, und so fortfährt, bis man jede Größe addiert hat.

Nach dem Grundsatz, daß das Ganze stets gleich der Gesamtheit seiner Teile, folgt, daß auch in einer Summe von mehreren Summanden die Ordnung der Summanden beliebig ist.

Wenn zwei Größen zu einer einzigen verbunden werden, und die erhaltene Größe wieder mit einer dritten verbunden werden soll, so schließt man die Verbindung der zwei ersten Größen gewöhnlich in eine Klammer ein. Z. B. $(a + b) + c$ oder $((a + b) + c) + d$; durch diese Klammern wird obiges Bildungsgesetz einer Summe aus

mehreren Größen verdeutlicht. In welchen Fällen solche Klammern nicht notwendig sind, um die Aufeinanderfolge der Verbindungen der Zahlen kenntlich zu machen, in welchen Fällen sie also weggelassen werden können, wird im Folgenden von Fall zu Fall angegeben werden.

4.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c = a + c + b.$$

Zu einer Zahl wird eine Summe addiert, indem man zur Zahl den einen Summanden addiert und zur erhaltenen Summe den anderen Summanden addiert.

Umgekehrt. Zu einer Summe wird eine Zahl addiert, indem man zum einen Summanden addiert die Summe aus dem anderen Summanden und der Zahl.

Beweis. Unter Berücksichtigung der Sätze von **3** ist $a + (b + c) = (b + c) + a = b + c + a = a + b + c = (a + b) + c$.

Beispiele: $4a + 3b + 2a = 6a + 3b$.
$2x + 7y + 3y + x = 3x + 10y$ * $7a + 2b + 5b + 3a + 4b = ?$

1. $a + x + 2a + y + x + 2y + x$; **2.** $15a + 12b + 2x + 19b + 17a$;
3. $16x + 12 + 23y + 35 + 14y + 11x$;
4. $77a + 91b + 123a + 92b$; **5.** $5a + (3b + 7a)$;
6. $(9x + 5y) + (4x + 8y)$; **7.** $3a + (9x + 7a) + (15a + 11x)$;
8. $17b + (15a + 9b) + 2a + (11a + b)$;
9. $14x + (20a + 7b + 4x) + (9x + 13a + 31b)$;
10. $11a + (13b + (12a + 19b)) + ((4a + 27b) + 14a)$;
11. $(9 + 11b + 13c) + (15b + 17 + 19c) + (21c + 23b + 25)$;
12. $12x + (23x + 27y) + (29y + 3z + 4u) + (43z + 47u + 59x) + (49u + 7x + 2y) + (3x + z)$;
13. $2 + x + (x + (y + 2) + (x + 2)) + (((x + 2) + 2) + 2)$;
14. $n + 1 + (r + 1) + ((n + 1) + (r + 1)) + (2 + (2n + 1) + (2r + 1))$;

15. Addiere zu 74 die Summe aus 169 und 26, und zu 431 die Summe aus 548 und 269.

16a. Vermehre die Summe von 2a und 3b um die Summe aus 5a und 4b. **b.** Vergrößere die um 6 vermehrte Zahl a um die Summe aus a und der um 4 vergrößerten Zahl b. **c.** Füge zu der um 17 vergrößerten Summe von a und 2b noch die Summe aus 2a und der um 13 vergrößerten Zahl b. **d.** Man soll zu a addieren die Summe aus 2a und b, und zu b addieren die Summe aus a und 3b, jede der erhaltenen Summen noch um $3b + 2a$ vergrößern und die so erhaltenen Summen addieren.

17. Was erhalte ich, wenn ich n um 1, oder um 2 vergrößere? Eine Zahl heißt r; wie heißt die nächst höhere Zahl?

18. Wie drückt man algebraisch aus, daß eine Größe m so groß ist, als die Größen a, b und x zusammen?

19. Von zwei Größen x und y ist die eine der Summe aus

2a und 3c, die andere der Summe aus 5a und 4c gleich. Man drücke eine Größe z, welche so groß ist, als x und y zusammen aus sowohl durch x und y, als auch durch a und c.

20. Eine Größe w ist gleich der Summe der Größen x, y, z Welchen Ausdruck erhält sie, wenn $x = 2a + b$, $y = 3a + 2c$ $z = a + b + 4c$ ist?

2. Abschnitt. Subtraktion.

5.

Soll eine Größe um eine andere Größe vermindert werden, so muß man, um die Möglichkeit dieser Operation herzustellen, voraussetzen, daß die letztere Größe in der zu vermindernden Größe entweder wirklich enthalten sei, oder doch enthalten gedacht werden könne. Die zu vermindernde Größe muß also angesehen werden können als eine Summe, in welcher die abzuziehende Größe der eine Summand ist, und das gesuchte Übrigbleibende der andere Summand ist. Deshalb folgende Definition:

Subtrahieren heißt aus einer gegebenen Summe und dem einen gegebenen Summanden den anderen Summanden suchen. In Buchstaben:

I. $(a + b) - b = a$.

Diese Definition enthält die Rechnungsregel: wenn man von einer Summe den einen Summanden subtrahiert, so erhält man den anderen.

Der Definition gemäß ist Subtrahieren die Umkehrung des Addierens.

Erklärung. Die gegebene Summe heißt Minuend, der gegebene Summand heißt Subtrahend, und der gesuchte Summand heißt Differenz, Rest oder Unterschied.

Folgerung. Da die Differenz die Eigenschaft eines Summanden hat, so folgt: Differenz ist diejenige Zahl, welche, wenn man zu ihr den Subtrahenden addiert, den Minuenden gibt. In Buchstaben:

II. $(a - b) + b = a$.

Dies enthält die Rechnungsregel: wenn man zu einer Differenz den Subtrahend addiert, so erhält man den Minuend.

Liest man I und II rückwärts, so hat man: Jede Zahl kann man als eine Differenz schreiben, wenn man zu ihr eine beliebige Zahl addiert und von der erhaltenen Summe dieselbe Zahl subtrahiert. Und: Jede Zahl kann man als Summe schreiben, wenn man von ihr eine beliebige Zahl subtrahiert, und zur erhaltenen Differenz dieselbe Zahl addiert. Oder beide zusammengefaßt: Eine Zahl bleibt durch Addition und Subtraktion derselben Größe ungeändert.

Um die Definition des Subtrahierens auch für den Fall passend zu machen, daß die abzuziehende Größe nicht in der zu vermindernden enthalten ist, weil sie derselben nicht gleichartig ist, kann man die Definition so fassen: Eine Größe (Subtrahend) von einer anderen Größe (Minuend) subtrahieren, heißt eine Größe (Differenz) suchen, welche die Eigenschaft hat, daß sie, wenn man zu ihr den Subtrahend addiert, den Minuend wiedergibt. Die Differenz wird mit $a - b$ bezeichnet, und ihre Eigenschaft bestimmt durch

$$(a - b) + b = a.$$

Da Differenz und Subtrahend die einzigen Summanden des als Summe zu betrachtenden Minuenden sind, so folgt noch aus I: Wenn man vom Minuend die Differenz subtrahiert, so erhält man den Subtrahend. In Buchstaben:

III. $\mathbf{a - (a - b) = b}$.

IV. Wenn $a = b$ und $c = d$ ist, so ist $a - c = b - d$. D. h. Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches. (Beweis wie in 3).

V. Ist $a + c = b + c$ und subtrahiert man beiderseits c, so hat man (nach I) $a = b$. D. h. Sind in gleichen Summen ein Paar Summanden gleich, so sind auch die anderen gleich.

VI. Ist $a - c = b - c$ und addiert man beiderseits c, so erhält man (nach II) $a = b$. D. h. Sind in gleichen Differenzen die Subtrahenden gleich, so sind auch die Minuenden gleich.

VII. Ist $a - b = a - c$ und subtrahiert man beides von a, so hat man (nach III) $b = c$. D. h. Sind in gleichen Differenzen die Minuenden gleich, so sind auch die Subtrahenden gleich.

VIII. $\mathbf{a - a = b - b}$. Alle Differenzen, in denen Minuend und Subtrahend einander gleich sind, sind einander gleich.

Zum Beweise addiert man rechts und links $a + b$, so hat man

links: $(a - a) + (a + b) = ((a - a) + a) + b = a + b$,

rechts: $(b - b) + (a + b) = ((b - b) + b) + a = b + a$,

und schließt nach V aus der Gleichheit der erhaltenen Summen auf die Gleichheit der gegebenen Größen.

Erklärung. Jede Differenz, deren Minuend gleich dem Subtrahend ist, wird mit Null bezeichnet.

IX. $\mathbf{a - a = 0}$.

1. $13x + 8y - 8y$; $5a - 3b + 3b$;
2. $14a + 17b - 18c + 18c - 17b + 3a$;
3. $4x + (x + 2y) - (x + 2y)$; $a - (n - 1) + (n - 1)$;
4. $3y - (3m + 18n) + 2x - 2x + (3m + 18n)$;
5. $2x - (2x - 3y)$; $a - (a - (b + c))$;
6. $(11x - 2y) - ((11x - 2y) - 3c) + 8c$;
7. $15 - (15 - 4a) + (6 - 5a) + 5a + 2a$;
8. $4a + b - (b - 3a) - 7a$;
9. $3a - 2x + (x - 11y) - (x - 11y) + 2x - (3a - 2x)$
10. $48 - 25 + 25 + 12 + 13 - 13$;

11. Was erhält man, wenn man zu einer um 7 verminderten Zahl wieder 7 addiert, und was, wenn man von einer Zahl eine um 3 kleinere Zahl subtrahiert, und was, wenn man von einer um n vergrößerten Zahl wieder n subtrahiert?

12. a) Addiert man zu 17 eine gewisse Zahl, so erhält man 28; wie heißt die Zahl? b) Welche Zahl muß ich zu 64 addieren, um 102 zu erhalten? c) Welche Zahl muß man zu 2x addieren, um 7x zu erhalten?

13. Wie viele *m* habe ich noch auf den Gipfel eines 2460 *m* hohen Berges, nachdem ich 1870 *m* gestiegen bin?

14. Ziehe ich 35 von einer gewissen Zahl ab, so bleiben 49; wie heißt die Zahl?

15. Nachdem ich 144 von einer Zahl abgezogen habe, bleiben mir 87; wie heißt die Zahl?

16. Wie heißt eine Zahl, welche, wenn man 46 von ihr abzieht, 59 als Rest gibt?

17. In einem Fasse waren noch 28 *l*, nachdem man schon 45 *l* herausgenommen hatte; wieviel waren anfangs darin?

18. Wieviel darf man von 151 abziehen, wenn 63 übrig bleiben sollen?

19. Ein Arbeiter bekam am Ende der Woche nur mehr 6 *M* 20 *ð*, da er schon 12 *M* 60 *ð* Vorschuß erhalten hatte; wie groß ist sein Wochenlohn?

20. Ein Thermometer, das stets um 1^0 zu hoch steht, zeigt eben 17^0; welches ist die richtige Temperatur?

21. Eine Uhr geht um 4 Minuten nach und zeigt eben $9^h\ 43'$; welche Zeit ist jetzt, und was wird sie um $10^h\ 58'$ zeigen?

22. a) Eine Differenz heiße q, ihr Subtrahend p; wie heißt der Minuend; wem ist also der Minuend gleich? b) Eine Differenz heißt r, ihr Minuend m; wie heißt ihr Subtrahend; wem ist also der Subtrahend gleich?

6.

I. $\mathbf{a+b-c=a-c+b}$

II. $\mathbf{a-b-c=a-c-b.}$

I. Von einer Summe wird eine Zahl subtrahiert, indem man die Zahl vom einen Summanden subtrahiert, und zur erhaltenen Differenz den anderen Summanden addiert.

I. Umgekehrt. Zu einer Differenz wird eine Zahl addiert, indem man zum Minuenden die Zahl addiert, und von der erhaltenen Summe den Subtrahenden subtrahiert.

II. Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahiert, indem man vom Minuenden die Zahl subtrahiert, und von der erhaltenen Differenz den Subtrahenden subtrahiert.

Beweis. Man addiert bei I c, bei II b + c beiderseits und schließt aus der Gleichheit der Resultate auf die Gleichheit der gegebenen Größen.

Zusammenfassung und Erweiterung. In einem mehrgliedrigen Ausdruck können die Glieder mit Beibehaltung ihrer Vorzeichen beliebig vertauscht werden. Dabei versteht man unter einem mehrgliedrigen Ausdruck eine Vereinigung mehrerer Größen durch Addition und Subtraktion. Die Aufeinanderfolge der Operationen wird angegeben durch die Aufeinanderfolge der Glieder.

1. $11 + 2a - 7$; $17 - 3a + 6$; $5a - 2 - 3a$;
2. $5a + 3b - 4c - 3b$; $26 + 3x - 11y - 26 + 11y + x$;
3. $5a - 3b + 2a$; $33x + 9y - 14x$;
4. $11x + 14z - 17y + 9x - 14z + 17y$;
5. $144 - 99x - 45 + (x - 99) + 99x - (x - 99)$;
6. $53 - 5a + 7 - 10 + 5a - 50$;
7. $28x + 55a - 33 + 44y - 28x - 44y + 33$;
8. $46 + 57a - 18 + 13a - 47x - 15$;
9. $29a - 11x - 20z + 44a + 11x - 33a + 20z$;
10. $9a + 5b - 4a + 2a - 4b - 6a$;
11. $12 - 7 + 8x + 15 + 19x - 18 - 25x$;
12. $19a + 27b - 13a + 12c - 17b - 5a - 8b - 9c$;

13. Man soll zu 489 ℳ 137 ℳ addieren und davon 89 ℳ subtrahieren.

14. Zur Differenz von 723 und 387 soll man 277 addieren. Zur Differenz von $a - b$ und c soll man b addieren.

15. Man soll von 827 zuerst 369 und dann noch 427 subtrahieren. Von der Summe $a + x$ soll man y und x subtrahieren.

16. Von der Summe $5a + 7b$ soll man $4b$ subtrahieren, und von der Summe $9a + 17$ soll man $6a$ subtrahieren, und von der Summe $2a + x$ soll man a und y und x subtrahieren.

17. Von der Differenz $10x - 15$ soll man $4x$ subtrahieren, von der Differenz $2a - x$ soll man a und y subtrahieren und dann x addieren.

18. Zur Differenz $18 - 3x$ sollen 5 addiert werden; zur Differenz $2 - 5x$ sollen 7 addiert werden.

7.

$$\mathbf{a - (b + c) = a - b - c.}$$

Von einer Zahl wird eine Summe subtrahiert, indem man von der Zahl den einen Summanden subtrahiert und von der erhaltenen Differenz den andern Summanden subtrahiert.

Umgekehrt. Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahiert, indem man die Zahl zum Subtrahenden addiert und die erhaltene Summe vom Minuenden subtrahiert. (Vergl. **6** II).

Beweis: Addiere beiderseits $b + c$.

1. $17a - (13a + 4b)$; $15a - (3b + 5a)$;
2. $24y - 12x - 13x$; $n - 1 - 1$; $x - 1 - 2 - 3$;
3. $14x + 9a - (11x + 7a)$;
4. $18y - 2x - (3y + 4x) + 6x$;
5. $34a - 12x - (7a + (3x + 11a)) - (11a + 4x) + 19x$;
6. $19b - (12a + 4b) + (8b + 12a) - (3a + 5b)$;
7. $(3a + 27) + (17a + 12) - (19a + 39) + a - y$;
8. $37x - 12a - (39a + 26x) - (2x + 5a)$;
9. $2x + 1 - (x + (x + 1)) + (2x + (1 + x)) - 1 + x$;
10. $26a - 25 + (25 + 21a) - (1 + 2b + 45a)$;
11. $15a - (2a + 4x) - (4a + 5x) + (9x + 3a)$;
12. $(14x - 5y) - (2x + 3y) - (7x + 5y)$;
13. $((17a + 22) - 11) - ((2a + 7) + 4) + 3$;

Die Sätze **6** und der Satz **7** umgekehrt ermöglichen, den Wert eines mehrgliedrigen Ausdruckes dadurch zu berechnen, daß man von der Summe der Glieder mit positiven Vorzeichen (positiven Gl.) die Summe der Glieder mit negativen Vorzeichen (negativen Gl.) subtrahiert.

$$a - b + c - d - e + f = (a + c + f) - (b + d + e)$$

14. $527a - 381a - 4791a + 2544a + 3549a - 1048a$;
15. $9476x + 5987x - 6125x - 4233x + 2427x - 6302x$;
16. $593x - 1182a - 14733a + 12544x + 16824a - 16537x$;
17. $17y + 227x - 3422y - 8544x + 4359y + 987x - 12y$;
18. $3910a - 4812a + 37x - 2844a + 2997a + 712a$;
19. $338a - 427b - 337b - 1522b + 397a + 844a + 2544b - 1858b$;

20. Von 539 soll die Summe aus 39 und 250 subtrahiert werden. Von 628 soll zuerst 287 und dann noch 113 subtrahiert werden.

21. Zur Summe aus a und 3 soll man b addieren und die erhaltene Summe soll man von $2b + 3$ subtrahieren.

22. Von $337a + 522b$ soll man $228a + 519b$ subtrahieren.

23. Zu $814x - 599$ soll man $728x + 625$ addieren und von der erhaltenen Summe soll man $947x + 26$ subtrahieren.

8.

$$\mathbf{a + (b - c) = a + b - c = a - c + b.}$$

Zu einer Zahl wird eine Differenz addiert, indem man zu der Zahl den Minuend addiert und von der erhaltenen Summe den Subtrahend subtrahiert.

Umgekehrt. Von einer Summe wird eine Zahl subtrahiert, indem man die Zahl von einem Summanden subtrahiert und die erhaltene Differenz zum andern Summanden addiert. (Vergl. **6.** I.)

Beweis: Addiere beiderseits c.

1. $12 + (3a - 2b)$; $17x + (4y - 15x)$;
2. $3a + 7b - 3b$; $4a - 2x + 8x$;
3. $9a + 12b - 4a + 8b - 3a - 9b - 7b$;
4. $15a - 7x + 11 - 2x - 14a + 10x + 2a - 9$;
5. $3m + 8n - 7x - 9x - 6n + 4m - n - 5m + 18x$;
6. $33x - 15y + 14 - 11x - 19y + 31 + 43y - 9x - 11$;
7. $41 + 2x - 5a - 7 + 9x - 6a - 30 - 6x + 17a$;
8. $7a + (3b + 5a) + (4b - 3a) - (5a + 2b)$;
9. $13a - (5b + (3a + 12b)) + (8a - 19b)$;
10. $39x - ((25x + 18) + 3) + (22 + (3 - 2x)) + (2 - 10x)$;
11. $6x + (3x + 18y + 3z) - (5x + 4y + z) + (2x - 6y + 8z)$;
12. $27a - (18x + 15a) + (53y + 27a + 46x) - (36y + x + 2a)$;
13. $3 + x + (x + (x - (1 + x))) - (x + (1 + x))$;
14. $117 - ((98 + (37a + 54x)) + 22x)$
$+ ((128 - (64 + 54a)) + 106a)$;
15. $63x - (x + y + z) - (3x + (y + (y + z))) + (x + (3y - z))$;
16. $((44y - (12 + 16y)) + (24 - 19y)) - (2y + (3y + 5))$;
17. $(3x - 1 - (2x + 5)) + (4x + 6 - (3x + 4))$;
18. $(17a - (12a + (13 + (14 + 6x)) + 2)) + (32 - (3x + 2))$;
19. $(14 + (12x - 3) - (5 + (3x + 6))) + (12 - (11 - 7x))$;
20. $2 + (1 + x + ((1 - x) - (1 + x))) + ((1 + x) + (x + 1))$.

9.

$$\mathbf{a - (b - c) = a - b + c} = a + c - b = a + (c - b).$$

Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahiert, indem man von der Zahl den Minuend subtrahiert und zur erhaltenen Differenz den Subtrahend addiert.

Umgekehrt. Zu einer Differenz wird eine Zahl addiert, indem man die Zahl vom Subtrahenden subtrahiert und die erhaltene Differenz vom Minuenden subtrahiert. (Vergl. 6. II.)

Beweis: Addiere beiderseits $b - c$.

Die Sätze von 4, 7, 8, 9 faßt man zusammen zu der Regel über das Weglassen von Klammern: Nach einem Plus-Zeichen darf man eine Klammer weglassen, indem man die Vorzeichen der in der Klammer enthaltenen Glieder nicht ändert (4 und 8); nach einem Minus-Zeichen darf man eine Klammer weglassen, indem man das Vorzeichen der in der Klammer enthaltenen Glieder ändert (7 und 9).

1. $15a - (13a - 2b)$; $4x - (3y - 2x)$;
2. $16 + 3x + 4x$; $16 - 3x - 5x$; $16 + 7x - 3x$;
$16 - 4x + 11x$; $16 + 3x - 9x$; $16 - 11x + 5x$;
3. $16 - 9x + 4x + x$; $16 + 5x - 21x - 10x$;
4. $5a + 2b - 7b + 6b - 11b$; $x + 4a - 7a + 5a - 6a - 3a + 2a$;

5. $3x + 7y - 8x$; $\quad 17x - 12y + 6x + 8y$;
6. $16 - 2x + 5x - 7x - 4x + 6x + 10x$;
7. $23 + 5x - 11x + 13x - 9x - 3x + 2x + 12x$;
8. $24y - 12y + 14x - 18y - 5x - 2y + 10y - 10x + 3x$;
9. $4a - 9b + 3b - 11a + 12b - 9b + 18a - 6b - 3a$;
10. $3a - (5a + (3b - 7a)) - (5b - 4a)$;
11. $6x - ((12y - (13z - 14x)) + (22y + (14z - 18x)))$;
12. $17 - (4a - 1 - (3a - 7)) + (5a + 3 - 2b) - (5b - 4 + 3a)$
$- (a - b - 1)$;
13. $32x - (14a + 11x - 9) + (18a - 13 - 25x) - (7a - 4 - 11x)$;
14. $19 - [3a + 2 - (5a - 4 + (5 + 4a - (7a - 11)))]$;
15. $3x - [8y + ((3y - (9x - 4y)) + ((5y + 6x) - 2y)) - 7x]$;
16. $24a + [((33x - 54a) - ((44x - 2a) + 6x))$
$+ 4x - (31x - 56a)]$;
17. $31 - [(22 + 7x) + (3x - [27 + ([4x - (11x + 45)] + 10)]$
$- 18x)]$;
18. $12 - [48a - (25 - [(35a + 7) - ((19a + 24) - 11)] + 17a)$
$- 11]$;
19. $x - [(y - z) - ((x - y) + ((y - x) - (z + x)) - ((x - z) - 2y))$
$+ (y + (z - x))]$;
20. $13x + (15a - ((4x + a) - 15 - (17x - a) + 11x)$
$- 23 - (8x - 7))$;
21. $14 - [((16 - 17y) - (25 + (14y + x)) + ((14x - 25) + y) - 8)$
$+ (2x - y)]$;
22. $15a - [4a + ((2b - 7a) - (8b - (23a + 9b)) - 12a)$
$- 6a + (3b + 10a)]$;
23. $[2x - ([3y + (4 - (5x - 4y) + 2x)] + (2x - 3)) - 3x] + 5$;
24. $[(11a - [(3 - (5a + 11) - 4a) + ((3a - 7) + 4)])$
$- ((5a - 4) - a)] + a$;
25. $[((2b - 14x) - (15a - 13x + 21b)) - (((3b - 2a) + 4x)$
$+ (3b - 17a))] + 25b$;
26. $(14 - 19a - (17a + 21) - 2x)$
$- (14 + 19a - (17a - 21) - 2x) + 50$.

10.

Formuliere und beweise folgende (weniger wichtige) Sätze:

I. $a + b = (a + c) + (b - c)$;
$a + b = (a - c) + (b + c)$;

II. $a - b = (a + c) - (b + c)$;
$a - b = (a - c) - (b - c)$;

III. $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$;
$(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$;

IV. $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$;
$(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$;
$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$;

V. $(a + b) + (a - b) = 2a;$
$(a + b) - (a - b) = 2b.$

11.

Eine Verbindung mehrerer Größen durch Plus- und Minus-Zeichen heißt ein mehrgliedriger Ausdruck, Polynom, Aggregat oder algebraische Summe. Die Ordnung der aufeinanderfolgenden Operationen wird durch die Ordnung der Glieder, die Art durch die Vorzeichen der Glieder bestimmt. Deshalb sollten vor dem ersten Gliede alle Anfangsklammern und nach jedem Gliede vom zweiten an eine Schlußklammer stehen. Z. B.

I. $\mathbf{a + b - c - d + e - f = [([(a + b) - c] - d) + e] - f.}$

Der Bequemlichkeit halber werden diese Klammern weggelassen.

Aus **6** folgt, daß man die Glieder des Ausdruckes beliebig vertauschen darf, wenn man die Vorzeichen der Glieder beibehält.

Aus den Sätzen **4**, **7**, **8**, **9** folgt: Zu einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck addiert, indem man zur Zahl die Glieder des Ausdruckes mit unveränderten Zeichen hinzufügt, und: Von einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck subtrahiert, indem man zur Zahl die Glieder des Ausdruckes mit veränderten Zeichen hinzufügt.

II. $\mathbf{a + (b + c - d - e + f) = a + b + c - d - e + f;}$

III. $\mathbf{a - (b + c - d - e + f) = a - b - c + d + e - f.}$

Umgekehrt. In einem mehrgliedrigen Ausdruck darf man nach einem Plus-Zeichen eine Klammer machen und sie nach einem beliebigen Gliede schließen, wenn man die Vorzeichen der in die Klammer kommenden Glieder nicht ändert; nach einem Minus-Zeichen darf man eine Klammer machen, wenn man die Vorzeichen der in die Klammer kommenden Glieder ändert.

1. $19a + (15b - 3a + c) - (14b + 12a + c);$

2. $4x - 3c - (4a + 5c - 4x) - (6a + c);$

3. $24b + (2b - 15a + (3b - 17a + 4c) - (15b - 11a - 4c)) - (3a - 11b);$

4. $8x - 3y - 4z + (13x - (7y - (8x - 11y + 5z) + 6z) - 3y);$

5. $5a + ((2x + 5b - 6a) - (7b + 3x - 12a) - 11a) - ((3b - 2a) - (8b - 3x));$

6. $29x + 18c - (37x - 34a - (12x + 37a) + ((11a - 37x) - (13a - 54c)));$

7. $32x - 168y + 356z - [64x - (53y + (84z - (33y - 80x)) - 55x) + 122z];$

8. $12b - 3a + 7c - (13b + 11a - 14c + (24a - 17c + 11b) - (3a - 5b)) - 8x.$

Ein Ausdruck von 2 Gliedern heißt auch Binom, von 3 Gliedern Trinom, von 4 Gliedern Quadrinom.

12.

Beispiele zur Übung und Wiederholung.

1. $27a + 12b + [\{(7b + 8c) - ((13c + 24a) + (12a + 21b) - 7c) + 11a\} - 2c]$;

2. $13a + 100b - 300c - \{167a + 178b - 199c - \{237a - (327a + 166b - 345c)\}\}$;

3. $11a + 21x - (x - y) + [(22a - 37y) - \{(33a - 47y) - ((27a + 112x) - 64y)\} - (33y - x)]$;

4. $13m + 17n - [54p - \{37n + [(52n - 11p) - ([(53m - 67p) + 51n] - 84p) - 60n] + n\} - p]$;

5. $100x - [\{84x - 11y + \{33z - 11x + 160y - (6y + 21z)\} - ((73x - y) - 21z)\} + 78x]$;

6. $21a - 41c + [\{25a - 11b + [33a - 17c - 61b - (53a + (17a - 32b))] - 19c\} + (37b + 48c)]$;

7. $11x + 15 - \{13y - 17 + \{24x - 28 + (53y - 37) - (64x - 51)\} - (34y - 21)\}$.

Aufl. **1.** $2a - 2b$; **2.** $244c - 244a - 244b$; **3.** $27a + 133x - 86y$; **4.** $-40m - 4n + 87p$; **5.** $22x - 144y - 33z$; **6.** $9a - 3b - 29c$; **7.** $51x + 25 - 32y$.

8. Was erhalte ich, wenn ich von der Differenz aus $11 - 3a$ und $19a$ subtrahiere die Differenz aus $6 - 15a$ und $9 - 5a$?

9. Was erhalte ich, wenn ich von der Differenz aus $17a$ und $5b - 4a$ subtrahiere die Summe aus $8b - 4a$ und $6a - 4b$?

10. Was erhalte ich, wenn ich von der Summe aus $14a$ und $9b - 11a$ subtrahiere die Summe aus $15b - 27a$ und $16a - 31b$?

11. Was wird aus $24m - (x - y)$, wenn $x = 17m + (3p - 4q)$ und $y = 12q - (17p - 4m)$ gesetzt wird?

12. Was muß man von $12a - ((13x + 5b) - 6y)$ subtrahieren, um $17a + \{3b - (12x - 3y)\}$ zu erhalten?

13. Wovon muß man $17x - \{12y + (18z - 13u)\}$ subtrahieren, um $37x + \{14z - (3y + 6u)\}$ zu erhalten?

14. Was muß man zu $12a - ((4b - 7x) + 3c)$ addieren, um $14a - ((6b - 9x) + 5c)$ zu bekommen?

15. Gegeben sind 3 Ausdrücke:

$3x + 5y - 7z$; $4y - 8z + 7x$; $13z - 6x - 9y$; was erhält man, α) wenn man von der Summe der beiden ersten den letzten subtrahiert; β) wenn man zur Differenz des 2. und 3. den 1. addiert; γ) wenn man den mittleren von der Summe der anderen subtrahiert; δ) wenn man vom letzten die Summe der anderen subtrahiert; ε) wenn man vom 1. die Differenz aus dem 2. und 3. subtrahiert; ζ) wenn man von der Differenz des 1. und 2. die

Differenz des 2. und 3. subtrahiert; η) wenn man zur Summe der zwei letzten die Differenz des 2. und 1. addiert?

16. Gegeben sind 4 Ausdrücke:

$x = 5a + 4b - c;$ $y = 4b - 3c + a;$ $z = 7c + 5a - 4b;$ $u = 3a - 2b - 4c;$

man berechne den Wert folgender Ausdrücke:

α) $x + y - z - u;$ β) $z - y + u - x;$ γ) $y - (z - u) - x;$ δ) $x - (y - z) + (z - u);$ ε) $y - \{x + (z - (y - u))\};$ ζ) $x + [x + \{y - (z + (u + z))\}];$ η) $= (u + z) - \{(y - u) - (z - x)\};$ ϑ) $z - \{(u - (x + y) - z) + (u - y)\}.$

17. $12a + [13 - \{10 - (9 - 11a) + ((15 - a) - a) - 14a\} - 5];$

18. $2 + \{a + (x - 1 - (3a - 2)) - (1 - 2x - (3a - 2x))\};$

19. $[5a - \{((3a - 1 - x) - 2x) + 3a\} + (2a - (3x - 2))] - a;$

20. $x - [11 + \{x - 2 - (2x + 12) + ((3x - 2) + x)\} - 2x].$

Aufl. **17.** $17a - 8;$ **18.** $2 + a + x;$ **19.** 3; **20.** 5.

3. Abschnitt. Multiplikation.

13.

Soll eine Zahl mehrmals als Summand gesetzt werden, so nennt man diese Art des mehrmaligen Addierens Multiplizieren, indem man sie als eine eigene Grundrechnungsart auffaßt.

Multiplizieren heißt, eine Zahl so oft als Summand setzen, als eine andere Zahl Einheiten enthält.

I. $a \cdot b = a + a + a + \ldots\ldots$ (b mal).

Die Zahl, welche als Summand gesetzt werden soll, heißt Multiplikand, sie kann eine beliebige Größe sein; die Zahl, welche die Anzahl der Summanden angibt, heißt Multiplikator. Die erhaltene Summe heißt Produkt. Ein Produkt ist also eine Summe aus so vielen dem Multiplikand gleichen Summanden, als der Multiplikator Einheiten enthält.

Der Multiplikand kann eine benannte Zahl sein; dann ist das Produkt eine gleichbenannte Zahl.

Umgekehrt. Statt einer Summe aus lauter gleichen Summanden kann man ein Produkt schreiben, dessen Multiplikand gleich ist einem der gleichen Summanden und dessen Multiplikator gleich ist der Anzahl der Summanden. Z. B. $a + a + a = a \cdot 3 = 3a;$ $x + x + x + x = x \cdot 4 = 4x;$ $(a - b) + (a - b) = 2 \cdot (a - b).$

II. $a \cdot b = b \cdot a.$

In einem Produkt zweier Zahlen darf man Multiplikand und Multiplikator vertauschen.

Beweis: Es ist $ab = a + a + a + \ldots\ldots$ (b mal). Löst man jede Zahl a in die Summe ihrer a Einheiten auf, indem man dieselben unter einander schreibt, so ist

$$\begin{aligned}ab = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \text{ (b mal)}\\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \text{ (b mal)}\\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \text{ (b mal)}\\ + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \text{(a mal)} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„}\end{aligned}$$

Addiert man in dieser Summe die Horizontalreihen, so erhält man bei jeder b, also

$$ab = b + b + b + \ldots\ldots \text{ (a mal)} = b \cdot a.$$

Wegen der Vertauschbarkeit von Multiplikand und Multiplikator bezeichnet man jeden mit dem gemeinsamen Namen Faktor. Ein bei einer Buchstabengröße stehender Zahlenfaktor wird auch Koeffizient genannt und gewöhnlich vorangestellt.

III. Wenn $a = b$ und $c = c$, so ist $ac = bc$. Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches. Beweis wie früher.

Jeder Zahl kann der Faktor 1 beigegeben werden.

IV. $a = a \cdot 1$. Denn nach der Definition der Zahl ist $a = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots = a \cdot 1$. Ebenso kann eine benannte Zahl, z. B. a kg = a · 1 kg, als ein Produkt aus der unbenannten Zahl mal der benannten Einheit gesetzt werden.

Aufgaben: **1.** Was wird aus der Summe $a + b + c$, wenn jeder Summand $= a$ wird, oder wenn jeder die Größe x annimmt, oder wenn jeder gleich $y - z$ wird?

2. Ein Acker hat die Länge von 83 *m*; welchen Weg muß ein Pferd machen, das auf demselben 29 Längsfurchen zieht?

3. Ein Stück kostet n *ℳ*, was kosten 7 Stck., p Stck., $(x - 1)$ Stck.?

4. Eine Größe enthält a Einheiten; wie viele Einheiten enthalten 5 solche Größen, y solche Gr.?

5. Wie viel Stunden haben t Tage?

6. Wie viel Ar haben 9 Hektar?

7. Was verdienen 9 Arbeiter, wenn jeder c *ℳ* verdient?

8. In jeder Reihe liegen r Kugeln; wieviel Kugeln liegen in 6 Reihen, in s Reihen, in $x - y$ Reihen?

9. Ein Körper legt in jeder Sekunde c *m* zurück; wieviel *m* legt er in t Sekunden zurück?

10. Jedes *cdm* eines Körpers wiegt s *kg*; was wiegen v *cdm* dieses Körpers?

11. Eine Steinplatte hat 9 *qcm* Fläche; welche Fläche haben n Steinplatten.

12. Eine Röhre liefert in einer Stunde r Liter Wasser; wieviel liefert sie in t Stunden?

14.

I. $a(b + c) = ab + ac$.

Eine Zahl wird multipliziert mit einer Summe, indem man die Zahl mit jedem Summanden multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Umgekehrt. Zwei Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden addiert, indem man die nicht gemeinsamen Faktoren addiert und die erhaltene Summe mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert.

Beweis: $a(b + c) = (b + c) + (b + c) + (b + c) \ldots\ldots$ (a mal)
$= b + b + b + \ldots\ldots$ (a mal) $+ c + c + c + \ldots\ldots$ (a mal)
$= ab + ac$.

II. $a(b - c) = ab - ac$.

Eine Zahl wird mit einer Differenz multipliziert, indem man die Zahl sowohl mit dem Minuenden als auch mit dem Subtrahenden multipliziert und das letztere Produkt vom ersteren subtrahiert.

Umgekehrt. Zwei Produkte, welche einen gemeinsamen Faktor haben, werden von einander subtrahiert, indem man die nicht gemeinsamen Faktoren von einander subtrahiert und die erhaltene Differenz mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert.

Beweis: $a(b - c) = (b - c) + (b - c) + (b - c) + \ldots\ldots$ (a mal)
$= b + b + b + \ldots\ldots$ (a mal) $- (c + c + c + \ldots\ldots$ (a mal))
$= ab - ac$.

III. $a(b + c - d - e + f) = ab + ac - ad - ae + af$.

Eine Zahl wird mit einem mehrgliedrigen Ausdruck multipliziert, indem man die Zahl mit jedem Glied des Ausdrucks multipliziert und die erhaltenen Produkte durch dieselben Vorzeichen verbindet, welche die Glieder hatten.

Umgekehrt. Ein mehrgliedriger Ausdruck, dessen Glieder Produkte sind, die alle einen Faktor gemeinsam haben, kann in ein Produkt verwandelt werden, indem man die nicht gemeinschaftlichen Faktoren durch dieselben Zeichen verbindet, welche die Produkte hatten, und den erhaltenen mehrgliedrigen Ausdruck mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert.

Beweis durch wiederholte Anwendung von I und II.

Die Formeln I, II, III enthalten die Regeln über das Auflösen einer Klammer, ihre Umkehrungen die Regeln über das Ausscheiden eines gemeinsamen Faktors.

Anmerkung: Statt $a \cdot a$ schreibt man a^2 und spricht „a Quadrat" „a im Quadrat" „a hoch zwei" „a auf der zweiten (Potenz)", und umgekehrt.

1. $5(a + b) + 7(a - b) + 9(b - a)$; $= 3a + 7b$;
$3(x + 1) - 5(x - 2) - 3(x + 3)$; $= 4 - 5x$

2. $a(a+b-2)-b(a+b-3)-4(a-b)$;
3. $4(x-y+5)-5(x+y)+17(y-x-3)$;
4. $50x-12(x+y-z)-14(x-y+z)+17(y+z-x)$;
5. $(a-b-5+c)\cdot 3+(b-a+c-11)\cdot 7-(c+a-b-14)\cdot 6$;
6. $27(a+b+c)-29(a-b+c)+31(a+b-c)-35(b-c-a)$;
7. $(x+y+z)\cdot 17-(x-4-z)\cdot 12-(y-15-x)\cdot 13$;
8. $5(a+x-3)+6x-(x-a-3)\cdot 7-3a-4(a-x)$;
9. $(a-b)\cdot 5+7(a+b)-(a-7)\cdot 5-7(a+5)$;
10. $100-99(a+b-1)-50+49(b+a-1)+50(a+b-2)$;
11. $(x-y-z-2)\cdot 2+3-4(z-y-x-5)+(x+4)\cdot 8-5(y+2)$;
12. $a(1+b+c)-b(2+a-c)-c(3+a+b)$.

Ausscheiden gleicher Faktoren.

13. $6a+6y$; $5x-5y$; a^2-ab; b^2-ab; $ax-x^2$; $x-x^2$; y^2-y; $7x-7y+21$; $8a+8b-32$; $36-9c$;
14. $17(3a)-4(3a)-28(3a)+16(3a)$;
15. $a(x-1)+ax+a$; $5a+5(a-b)-5(a+b)$;
16. $4(a+b)+(a+b)(a-b)-(a-2)(a+b)$;
17. $y+y(1-y)-y(2-y)+y^2$;
18. $x(n+1)-x(n-1)+x(n-2)-nx+3x$;
19. $x(n+1)+(x+1)(n+1)-(n+1)-(n+1)(x-2)$;
20. $x^2-x(a+x)+x-x(a-1)+(a+1+x)x$;
21. $(a+x)(a-x)-(a+x)(2a-3x)+(3a-2x)(a+x)$;
22. $(a+b+2c)(a-b)+(a-b)(2a-3b-c)-(2a-b+c)(a-b)$;
23. $(9x-4y)(5x-3y)-(5x-3y)+(5x-3y)(6y-7x+1)$;
24. $(a-b-c)(a+b+c)+(a-b-c)^2-(a-b-c)(a+b-c)$;

Vereinigen verwandter Glieder.

25. $2a+3b+3c=\mathbf{2a+3(b+c)}$; $2a+3b-3c$; $2a-3b-3c$; $2a-3b+3c$;
26. $a+xy+xz-x^2-bc+b^2$;
27. $12a-5x+5y$; $9x-4(a+b)+4(a-c)$;
28. $ax+ay+bx+by=\mathbf{a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)}$;
29. $ax+ay-bx-by$; $ax-bx-ay+by$;
30. $bx-cy+cx-by$; $ax+ay-4a+bx+by-4b$;
31. $ax+bx-x-ay-by+y$; $ax-by-3a+ay+3b-bx$;
32. $3x-xy-3y+y^2$; $x^2-4x+xy-4y$;
33. $4b+a(x-3)+a(7-x)$; $a-(a+b)c+bc$;
34. $bx-(b-c)x+bc$; $xy-8y-8+x$; $mp-np-mq+nq$;
35. $xy-2x-2y+x^2$; $ax-a^2-a+x+ay+y$;
36. $a(a+b)+c(a+b)-ac-c^2+b(a+b)-bc$;
37. $a^2+c(b-c)+ac-b(b-c)+a(b-c)-ab$;
38. $ab-1+b-a$; $1-x+xy-y$;
39. $a+b+(2a+3b)(4a-7b)-(2a+3b)(3a-8b)$;
40. $(4a-b)(6a+5b)-(4a-b)(4a-9b)-(4a-b)(2a+5b)$;

41. $(2x - a)x - 2x + a - (a - x - 1)(2x - a)$;
42. $(a + b)(3b - 4a) - (a + b)(4b - 5a) - (a - b)(4b - 7a) + (a - b)(5b - 8a)$;
43. $(2 + 3x)(4 - 7x) - (8x + 3)(2 + 3x) + (1 - 15x)(5x - 11) - (1 - 15x)(8x - 13)$;
44. $(11a - 17b)(9a + 23b) - (11a - 17b)(4a - 3 + 17b) - (5a + 3 + 6b)(8a - 2 - 12b)$;
45. $ax + cy - bz - az + bx + cz - by - ay - cx$;
46. $2y + b - by + 2x + ax - 2 - bx + ay - a$;
47. $xy - 3z - xz + 3x + x^2 - yz$;
48. $a^2 - ac - bx - ab + ax + bc$.

Aufl. **36.** $(a + b + c)(a + b - c)$; **37.** $(a + b - c)(a - b + c)$; **39.** $(a + b)(1 + 2a + 3b)$; **41.** $(2x - a)(2x - a)$; **42.** $2b(a - b)$; **43.** $4(1 - 15x)$; **44.** $(3 + 5a + 6b)(2 + 3a - 5b)$.

---

49. An einen Cylinder von p *kg* Gewicht ist eine Platte von q *kg* Gewicht befestigt; wieviel wiegen r solche Körper?

50. Ein Cylinder von p *kg* Gewicht wird durchbohrt, wodurch er q *kg* an Gewicht verliert; was wiegen r solche Körper?

51. Eine Kugel von a *g* Gewicht verliert in Wasser getaucht b *g*; wieviel wiegen n solche Kugeln in Wasser?

52. Wenn ein Stück Ware an Material a *M* und an Arbeitslohn b *M* erfordert, wieviel kosten dann x Stücke dieser Ware?

53. Der Einkaufspreis eines Stückes beträgt c *M*, der zu erzielende Gewinn d *M*; wie teuer müssen m Stück verkauft werden?

15.

$$\mathbf{a \cdot bc = ab \cdot c} = abc.$$

Eine Zahl wird mit einem Produkt multipliziert, indem man die Zahl mit dem einen Faktor multipliziert und das erhaltene Produkt mit dem anderen Faktor multipliziert. (Umgekehrt ebenso).

Beweis: $a \cdot bc = bc + bc + bc$ .... (a mal). Löst man jedes Produkt bc in eine Summe auf und schreibt die Summanden unter einander, so hat man

$$a \cdot bc = b + b + b + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a mal)}$$
$$+ b + b + b + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a mal)}$$
$$+ b + b + b + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a mal)}$$
$$\vdots$$
$$\text{(c mal) (c}\cdot\text{) (c}\cdot\text{)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Addiert man die Glieder jeder Horizontalreihe, so erhält man in jeder ab, also

$$a \cdot bc = ab + ab + ab + \ldots\ldots \text{(c mal)} = ab \cdot c.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Gesetzes findet man auch:

$$a \cdot bcd = abc \cdot d = abcd;$$
$$ab \cdot cd = abc \cdot d = abcd;$$
$$ab \cdot c \cdot de \cdot f \cdot ihk = abcdefihk.$$

Allgemein: Mehrere Zahlen oder Produkte werden mit einander multipliziert, indem man die Zahlen und Faktoren der Produkte als Faktoren zu einem Produkte zusammenstellt; dabei ist die Ordnung der Faktoren beliebig.

Hat man eine benannte Zahl, z. B. b *kg* mit a zu multiplizieren, so hat man:

$$a \cdot b\,kg = a \cdot b \cdot 1\,kg = ab \cdot 1\,kg = ab\,kg.$$

Anmerkung: Statt $a \cdot a \cdot a$ schreibt man a^3, spricht „a Kubus" oder „a im Kubus" „a hoch drei" „a auf der dritten (Potenz)"; ebenso $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$; $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ u. s. w.

Es ist dann $a^2 \cdot a = a^3$; $a^2 \cdot a^2 = a^4$; $a^2 \cdot a^3 = a^5$; $a^3 \cdot a = a^4$; $a^3 \cdot a^2 = a^5$; $a^3 \cdot a^3 = a^6$; $a^3 \cdot a^4 = a^7$; $a^2 \cdot a^4 \cdot a^3 = a^9$; $a \cdot a^3 \cdot a^4 = a^8$ u. s. w.

1. $5 \cdot 2a = \mathbf{10a}$; $7 \cdot 5x$; $4(3a - 2b)$; $a \cdot 3a$; $4a \cdot 3b$; $5a(3a - 7b)$; $2ab \cdot 3ac$; $3ab \cdot 4bx$; $5ax \cdot 6bx$;

2. $6(2a + 3b - 7c) + 7(4a - 3b + 7c) - 8(5a - 4b + 3c)$;

3. $15(a + b - 3) - 6(3a - 2b) + 7(4 - 3b) - 8(5 - 2a)$;

4. $a(a - 2b) - b(2a - b)$;

5. $x(x - 1) - 3x^2 + 4x(2x + 1) - 6(3x + 2)$;

6. $15a(3x - 4y + 7a) + 12x(11a - 7y + 4x)$
$- 10y(13x - 4a + 11y)$;

7. $(3b^2 - 4ab)2b - 3a(4ab + b^2) - 5ab(3a - 2b)$;

8. $(12a^2b - 13ab^2 + b^3)5a - (11a^3 - 32a^2b - 19ab^2)3b$
$- 16ab(a^2 + 2ab + 4b^2)$;

9. $5a^2bc(2ac - 3bc^2) - 7abc^2(3abc + 4b^2c^2) - 8b^3c^2(2ac^2 - 3bc^3)$;

10. $17a^2xy(9a^2x^2y - 11ax^3y^3 + 10xy^2) - 21ax^2y^2(12a^2x^2y^2$
$+ 15ay - 9a^3x) + 23axy(7axy^2 - 5a^3x^2y + 9a^2x^3y^3)$;

11. $5ab(3ab + 4ac - bc) - 3ac(3bc - 4ac + 5ab)$
$- 4bc(3ab - 4ac + bc)$;

12. $40a^2bc^3 - 4ab^2(3a^2c + 3ac^2 + 4bc^3) + 3a^2c(4ab^2 - 2bc^2 - 4b^2c)$
$- 5abc(9ac^2 - 4abc - 4b^2c^2) + 4bc^2(5a^2c - ab^2c + a^2b)$;

---

13. $2x(1 - x(3 - 5x + 2x^2) - x^2(2 - 3x)) - 4x^2(2x - 2)$;

14. $((11 - 16x + 17x^2)3x - 5x(6 - 10x + 10x^2))3x$
$- 4x((x + 2)x + 1) + 1$;

15. $((2a + 3b)2b - (3a - 2b)3a)ab^2 + (3a(2a - 3b)$
$- 2b(3a + 2b))a^2b$;

16. $5a(6 - 4(3 - a)) - (5a(6a - 11) - 4(3a^2 - 6a + 6)) - 24$;

17. $6[((3x - 1)2 - 4(x + 5)) \cdot 5 - 4(2 - 2(3 - 3(4 - 5x)))]$
$- 20(39x - 58) - 19$;

18. $3a((5a - 4) \cdot 5 - 3(2a - 7 + 2a^2) + 6a(2a - 4)) - 5a^2(3a - 4)$;

19. $((a^2 + ab + b^2)b - a(a^2 - ab + b^2))b - a(b^3 + 2ab^2 - a^2b)$
$+ b^3(b + a)$;

20. $(a^2 + 2b(2b - 3a))a - b(b^2 - 2a(2a - b)) + b^3 - a^3$;

21. $2(3 - 4(5 - 6(7 - x))) - 7(6 - 5(4 - 3(2 - x)))$;

22. $2x\{4x((3x-2)\cdot 5-3(2x-4))+6(3x-1)\}$
$-3x^2(x(20-x)+20)$;

23. $a\{25a-((4a+3)\cdot 4-15a)\cdot 2a+3(a+4(a-2))\}$
$+4\{a(a+a(a+1))+a\}$;

Aufl.: **13.** $2x+2x^2-2x^3+2x^4$; **14.** $1-4x+x^2+2x^3+3x^4$; **16.** $a+2a^2$; **17.** 1; **18.** $3a^3+5a^2+a$; **19.** $2b^4$; **20.** $2ab^2-2a^2b$; **21.** $190+57x$; **22.** $3x^4+12x^3-8x^2-12x$; **23.** $2a^3+24a^2-20a$.

---

24. Was wird aus $ax+by-(a+b)z$, wenn $x=a+b$, $y=a-b$, $z=b$ wird?

25. Was wird aus $2ax-3b+4(a-2b)y+5xy$, wenn $x=2a-b$, $y=3b$ ist?

26. Was wird aus $7a^2-3bx+2a(x-2b)$, wenn $x=3b-2a$ ist?

27. Wenn ein Arbeiter in einem Tage x Stücke fertigt, wieviel Stücke fertigen n Arbeiter in t Tagen?

28. Auf einem Quadratmeter stehen p Pflanzen, wieviel Pflanzen stehen dann auf einem rechteckigen Beet von l *m* Länge und b *m* Breite?

29. Welchen Wert hat ein Eisenblock von v *cdm* Inhalt, wenn jeder *cdm* Eisen s *kg* wiegt und jedes *kg* p *M* kostet?

30. Welchen Wert haben r Säcke Getreide, wenn jeder Sack v *l* faßt, jeder Liter k *kg* wiegt und jedes *kg* d *₰* kostet?

31. Was kostet das Pflastern einer rechteckigen Fläche von l *m* Länge und b *m* Breite, wenn man für einen *qm* a *₰* Material und d *₰* Arbeitslohn rechnet?

Ausscheiden gemeinschaftlicher Faktoren.

32. $18a^4b+24a^3b^3+30a^2b^3$;

33. $12a^9x^2-16a^7x^4+28a^5x^6-24a^4x^8$;

34. $15a^3b^2c^6-20a^3b^3c^3+25a^4b^3c^4-15a^5bc^5-30a^2b^3c^4$;

35. $48a^7b^4c^6x-56a^5b^4c^5y-32a^3b^6c^7x^2+16a^6b^8c^2y^3$;

36. $5a^2-8x^3y^2+12x^4y-20x^2y^3$;

37. $a^3b^2x^3y^2+ab^3x^3y^2+a^3b^2xy^3+ab^3xy^3$;

38. $60a^3b^2x+90a^2b^2x^2-84a^3bxy-126a^2bx^2y$;

39. $240a^3b^3x^5-144ab^4x^6-300a^3b^2x^3y+180ab^3x^4y$;

40. $x^3y^4-xy^2-xy^4+x^3y^2$;

41. $x^4y^3z-x^3y^2z^3+x^2y^4z^2-xy^3z^4$;

42. $72a^4x^2y^4-60a^3b^2xy^4-54a^3b^2x^2y^3+45a^2b^4xy^3$;

43. $4a^5y-4a^3x^2y+8a^3xy^2-8a^4xy+4a^2x^2y^2-a^4y^2$;

44. $a^3bcx^2+a^2b^2cxy+a^2bc^2x^2-a^2bc^2xy+ab^2c^2xy-a^3c^2x^2$;

45. $3a^4b^2y-12a^2b^2y^3+9a^3b^2y^2+12a^2by^5-3a^4by^3-9a^3by^4$;

46. $12a^3x^2-6a^3x^3+24a^2x^2+12a^2x+6a^3x-12a^2x^3$.

16.

Durch wiederholte Anwendung von 14 hat man:

$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd;$

$(a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d) = ac - ad + bc - bd;$

$(a-b)(c+d) = a(c+d) - b(c+d) = ac + ad - bc - bd;$

$(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d) = ac - ad - bc + bd;$

$(a+b-c-d+\ldots)(i-k+l-m+\ldots)$

$= a(i-k+l-m+\ldots) + b(i-k+l-m+\ldots)$

$- c(i-k+l-m+\ldots) - d(i-k+l-m+\ldots) + \ldots$

$= ai - ak + al - am + \ldots + bi - bk + bl - bm + \ldots$

$- ci + ck - cl + cm - \ldots - di + dk - dl + dm - \ldots$

$+ \ldots\ldots$

Diese Formeln faßt man zusammen in die Regel: Zwei mehrgliedrige Ausdrücke werden mit einander multipliziert, indem man jedes Glied des einen Ausdruckes mit jedem Glied des anderen Ausdruckes multipliziert und die Vorzeichen der erhaltenen Produkte nach der Zeichenregel bestimmt: Gleiche Zeichen geben Plus, ungleiche Minus. Mit den so bestimmten Zeichen werden die erhaltenen Produkte zu einem mehrgliedrigen Ausdruck vereinigt.

1. $(2a+3b)(5a+4b)$; $(x+2)(x+1)$; $(4a^2+3ab)(5b^2-7ab)$;

2. $(2x+7y)(6x-3z)$; $(25a^2-33xy)(26x^2+15ay)$;

3. $(100x^2y-33xy^2)(40x^3z+27y^2z^2)$; $(a-2b)(a-3b)$;

4. $(27ax+38by^2)(16ax-25by^2)$; $(40-29x^2)(30-31y^2)$;

5. $(16x+17a)(3x-4a)+(17x+16a)(4x-3a)$;

6. $(3a^2-7ab)(2a+3b)+(9ab-10b^2)(3a+2b)$
$- 10b(2a^2-3ab-2b^2)$;

7. $(3x-4y)(5x+4y)-(3y-8x)(5y+4x)+(4x+6y)(3y-8x)$;

8. $(7a+4b)(3b-11a)+12b(3a-4b)-(2b-9a)(17a-13b)$
$-(15a-28b)\cdot 5a$;

9. $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$;

10. $(a-b)(c+d)-(a+b(c-d)$;

11. $(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)$.

---

12. $(x^2-x+1)(x-1)-(x^2+x-1)(x+1)$;

13. $(1+2x+x^2)(x-2)+4(x+1)-(x+2)(x^2-2x+1)$;

14. $(3x^2-2x+1)(1-2x)-11x^2-4(3+2x-x^2)+6x(x^2+4)$;

15. $(x^2+ax+2a^2)(2a-x)-(x^2-2ax+a^2)(x-2a)-2(3a^3-x^3)$;

16. $(3ab+4ac-7bc)(5ab-6ac)-(4ab-8ac+7bc)(5ac-7bc)$;

17. $(x^2y-2xy^2+3y^3)(2x^2-3xy)-(3x^3+2x^2y+xy^2)(4xy-5y^2)$;

18. $(x+y+z)(x-y)-(x+y-z)(x-z)-(x-y+z)(z-y)$
$-(z-x-y)(x+y)$;

19. $(o-p-q)(p+q)+(p-o-q)(o+q)-(q-o-p)(o+p)$;

20. $(xy+xz-yz)(x+y)-(xy+yz-xz)(y-z)$
$-(xz-xy+yz)(x+z)$

21. $(6x^4 - 9x^2y + 11y^2)(8x^2 - 7y) - (13y^2 + 21x^2y - 17x^4)(11x^2 + 13y)$;

22. $(64a^6b^3 + 48a^5b^5 + 36a^4b^7 + 27a^3b^9)(4a^2b - 3ab^3)$;

23. $(a^2b^4x - 2a^4b^3x^4 - 3a^6b^2x^7 + a^8bx^{10})(a^3b^2x^2 - 2a^5bx^5)$;

24. $3a(2b - 5a)(3b + 4a) - 4b(7a^2 - 12ab) - (5b + 4a)(3a - 6b)\cdot 4a$;

25. $x^2(1 - x) + x(1 + x)(1 - 2x) - 2(2 - x)(1 - 2x + 3x^2)$;

26. $9(14 + 11a + 17a^2)(10 - 12a) - 13a(15 - 19a)(17 + 20a) + 14a^2(17a - 11) - 44a^3$;

---

27. $2(x-2)\big(x-(2-3x)\big) - 3\big(2+(x-1)\big)\big(4(x-1)-3(x-2)\big)$;

28. $\big((2x(x-4) - 3(x-2)(2x+3))(4x-2)\cdot 3 + 48x^3\big)(3x-5) - 540(x^2-3x+1)$;

29. $3\big(2(y-4)+5\big)\big((y-2)\cdot 3 - 2(y-4)\big) - 4\big(7-3(y+2)+y\big)\big(5-y-3(2-y)\big)$;

30. $\big(((x-1)(x-2)-2)\cdot 2 - 2(2-x)\big)\cdot 2 - \big(2-2(x-2)(1+x) + 2(1-2x)\big)$;

31. Was wird aus $(a + b)x + (a - b)y - 3xy$, wenn $x = a - 2b$, $y = 2a + b$ ist?

32. Was wird ebendann aus $3x(a-b) - 4y(a+b) - 12ab$?

33. Welchen Wert erhält der Ausdruck $z = 2(3b - a)x - 3(2a - c)y + 4xy$, wenn $x = 2a + 3b - c$, $y = a - 2b + 3c$ ist?

34. Welches Glied müßte dem Ausdruck $ax - bx - by$ noch hinzugefügt werden, damit er den Faktor $a - b$ hätte?

35. Welches Glied muß dem Ausdruck $x - a - 1$ oder dem Ausdruck $2a - 3ax - 3x$ noch hinzugefügt werden, damit er den Faktor $a + 1$ habe?

Aufl.: **12.** $2x - 4x^2$; **13.** $4x$; **14.** $12x - 11$; **15.** $5ax^2 - 5a^2x$; **16.** $15a^2b^2 - 18a^2bc + 16a^2c^2 - 7ab^2c - 49abc^2 + 49b^2c^2$; **17.** $-10x^4y + 18x^2y^3 - 4xy^4$; **18.** $x^2 + 2xy - y^2 + xz + yz - 2z^2$; **19.** $4op - 2oq - 2pq - 2q^2$; **20.** $2x^2y + 2xyz - 2xz^2 - 2y^2z$; **21.** $235x^6 - 124x^4y - 265x^2y^2 - 246y^3$; **24.** $186ab^2 - 13a^2b - 108a^3$; **25.** $3x^3 - 16x^2 + 11x - 4$, **26.** $1260 - 3837a + 517a^2 + 3262a^3$; **27.** $5x^2 - 29x + 2$; **28.** $66x + 378x^2 - 108x^3$; **29.** $22y^2 - 13y - 14$; **30.** $6x^2 - 6x - 16$.

17.

Man findet nach **16**.

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$, also

I. $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$; ebenso

II. $\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$; d. h.:

Das Quadrat eines zweigliedrigen Ausdruckes ist gleich dem Quadrat des 1. Teiles plus dem doppelten Produkt aus dem 1. und 2. Teil plus dem Quadrat des 2. Teiles.

Da $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$, so ist

III. $\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$; d. h.:

Das Produkt aus der Summe zweier Zahlen mal ihrer Differenz

gibt die Differenz der Quadrate der zwei Zahlen. Umgekehrt: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist gleich dem Produkt aus der Summe mal der Differenz dieser Zahlen.

1. $(3a+4b)^2$; $(2x+5y)^2$; $(4x^2-9y^2)^2$; $(6xy+5y^2)^2$;

2. $(7ab-9bc)^2$; $(11a^2x+13xy^2)^2$; $(1+x)^2$; $(x-1)^2$; $(2+x)^2$; $(1-2x)^2$; $(x^3-3)^2$;

3. $(5a-4x)(5a+4x)$; $(17x^2-19y^2)(17x^2+19y^2)$;

4. $(4-x)(4+x)$; $(22x^2+33)(22x^2-33)$; $(1-4x^2)(1+4x^2)$;

5. $(a+b+c)(a+b-c)$; $(a+b-c)(a-b+c)$;

6. $(1-x-y)(1+x+y)$; $(1-x+x^2)(1-x-x^2)$;

7. $(7a-9x+11y^2)(7a+9x-11y^2)$; $(6x^2-13y^2+15xy)(6x^2-13y^2-15xy)$;

8. $(9ax^2-11a^2+4x^4)(9ax^2+11a^2-4x^4$;

9. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$; $(1-x-x^2+x^3)(1-x+x^2-x^3)$;

10. $(8x^3+7x^2y+6xy^2-5y^3)(8x^3+7x^2y-6xy^2+5y^3)$;

11. $(19a^6b-4x^4b^2-5a^2b^3-18b^4)(19a^6b-4a^4b^2+5a^2b^3+18b^4)$;

12. $(a-2b+2c-x)(a-2b-2c+x)$; $(x^2-2+y^2-b)(x^2-y^2-b+2)$;

13. $(b^2-x+a^2-y)(a^2+y-x-b^2)$; $(x+1-x^2-x^3)(1-x^2+x^3-x)$;

14. $(1-a-x-ax)(a-x+ax+1)$; $(a^3+ab^2-a^2b-b^3)(b^3-ab^2-a^2b+a^3)$;

---

15. $(2-x)^2-(2-x)(2+x)+(2+x)^2$;

16. $(4a+3x)^2+3(4a+5x)(3a-2x)-4(3a-4x)^2$;

17. $(3a^2-16ax)^2-4ax(7a-2x)(5x-4a)-6a^2(2x-3a)(2x+3a)$;

18. $17a^3-3b(11a+7b)(7b-11a)+2a(11b-7a)^2-(11b-7a)(11b-6a)\cdot 3b$;

19. $x^4+2x^2(x-1)^2-3x(x^2-x+1)(x+1)-(x^2-2x+1)(1+x)(1-x)$;

20. $(x^2-y^2)^2+x(x+y)^2(x-y)-y(x-y)^2(x+y)+xy(x+2y)(2x-y)$;

21. $(a+1)^2\cdot 2a-a(a+1)(1-a)^2+2(a-1)(a+1)^2+a(a^2+2a+1)(a-1)$;

22. $(x+y+z)(x+y-z)-(x-y-z)(x-y+z)+(y-x-z)(y+x-z)-(x+y+z)(y+z-x)$;

23. $((x+y+z)(x+y-z)+(x-y+z)(x-y-z))\cdot((x+y+z)(x-y-z)+(x+y-z)(x-y+z))$;

24. $((1-x)^2+(1+x)^2)(1+x)(1-x)-((x-1)^2+(x+1)^2)(x+1)(x-1)$.

Aufl.: **15.** $3x^2+4$; **16.** $16a^2+141ax-85x^2$; **17.** $63a^4+16a^3x+60a^2x^2+40ax^3$; **18.** $115a^3-71a^2b+671ab^2-510b^3$; **19.** $x^4-6x^3+2x^2-x-1$; **20.** $2x^4+2x^3y+x^2y^2-2xy^3$; **21.** $6a^3+6a^2-2a-2$; **22.** $4xy-4yz$; **23.** $4(x^4-2x^2z^2+z^4-y^4)$; **24.** $4(1-x^4)$.

25. Was wird aus $\alpha)$ $ax+by+cz$, $\beta)$ $x^2-y^2+z^2+2xz$, $\gamma)$ $xy^2+yz^2+zx^2$, $\delta)$ $ax^2-by^2+cz^2-a^2x+b^2y-c^2z$, wenn $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-c$?

26. Um wieviel ist das Quadrat einer Zahl von dem Produkt aus der nächstniedrigeren mal der nächsthöheren Zahl verschieden?

27. Um wieviel ändert sich ein Quadrat von der Seite a, wenn man aus ihm ein Rechteck macht, indem man der Länge b m zugibt und der Breite b m wegnimmt?

28. Was wird aus $2a^2-3(a-2b)(a+b)$, wenn $a=x-1$, $b=2-x$ ist?

29. Welchen Wert nimmt der Ausdruck $3x(x-1)-(x+3)+4$ für $x=y-2$ an?

30. Was wird aus $5x^2-7x+8$, wenn man $x-1$, oder $x+2$ statt x setzt?

18.

Weitere Übungsbeispiele.

1. $(a-b+c)(b+c-d)$; $(x^2+xy-y^2)(x^2-2xy+y^2)$;

2. $(2a+5b-c)(7a-3b-2c)$; $(1-x+x^2)(1-2x-x^2)$;

3. $(4a^3+9a^2b-6ab^2-5b^3)(7a^2+11ab-8b^2)$;

4. $(x^2-2x+1)(x^3-3x^2+3x-1)$;

5. $(64a^3-96a^2b^2+144ab^4-216b^6)(48a^2+72ab^2+27b^4)$;

6. $(8a^7-9a^6b^3-11a^5b^6+10a^4b^9-6a^3b^{12})\cdot(7a^4b-5a^3b^4-8a^2b^7+11ab^{10})$;

7. $(ab-ac-bc)(a^2+ab+b^2-ac-bc+c^2)$;

8. $(1-x-y+x^2-xy+y^2)(1-x+y)$;

9. $(x^5-2x^4+3x^2)(x^2-2x+3)-(x^4+2x^3-4x^2)(x^3-3x^2+2x)-x(x^2-4x+3)(x^4-2x^3+x^2)$;

10. $(a^3b+a^2b^2+ab^3)(a^2-2b^2)-2a(a^2-3ab+b^2)(4a^2b-3b^3)-3a^2b(a^2+ab-2b^2)(3a-2b)$;

11. $(1+2x+3x^2+6x^3-x^4)(2x^2-3x+1)-2x(1-2x+3x^2)(x^3+3x^2-x)+3x^2(1+2x-3x^2)(2x-x^2+1)$;

---

12. $(1-x)(1+x)(1-2x+x^2)-(1+x)^2(1-x-x^2)-(1-x)^2(1+x+x^2)$;

13. $(4a+3b)(4a-3b)(2a^2-3ab+2b^2)+(3a-2b)^2(4a^2-3ab-2b^2)-2b(3a+2b)(a^2-2ab+3b^2)$;

14. $2a(2a-1)(4a^2-2a-1)(2a+1)-3a(a+3)(a^2-3a+9)(a-3)$;

15. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(c+b-a)$;

16. $a^2b+a\big((a+b)^2-b(a-b)\big)$;

17. $(x+1)[x^2-(x-1)(x^2+x(1-x))]$;

18. $a^2b(5b-a)-\Big[(a^2+b^2)(a+b)\cdot a-b\Big(\big(a^2-b(a-b)\big)(a+b)-(a-b)\big(b^2-(a-b)^2\big)\Big)\Big]$;

19. $(a^2+a(a+3b)-b(a+b))\,((a+2b)b+a(a+b)-(a+3b)b)$;

20. $(2x^3-x(1-x(1-x)^2-x)-x(x-1))\,(x+1)(x-1)x^2$;

21. $[x^4+1-(x-1)\,(x^3+(x+1)\,(x^2+(x+1)(x-1)))]\,(2-x)$;

22. $16a^4b^2-(a-2b)\,(a^2b-2(a+b)\,(a^2-b(a-2b)))$
$(a^2-2b(2a-b))-8b^4(a^2-4ab+2b^2)$;

23. $(x-1)\,(x^2-x(1-x))\,((x+1)x-x(x-1))$;

24. $[8(x+2y)(x+y)y^2-((x+y)^2-2(x+y)(x-y)+(x-y)^2)$
$\cdot((x+2y)^2-x(x-2y))]\,(x+y)$;

25. $(a+x)^2(a-x)^2-(a+x)\,[x(a+2x)^2-a(a-2x)^2]$;

26. $((3a^2x-ax(a+x)+a(x-a)^2)$
$-(a+x)(a^2-2ax+3x^2))\,(2a-x)$;

27. $4a^4-(a+b)(a+2b)(3a-b)b-(a-b)(a-2b)(3a-b)a$
$+8ab(b^2+2ab-a^2)$;

28. $[x^4+y^4-(x-y)\,(x^3+(x+y)\,(x^2+(x+y)(x-y)))]\,(2y-x)$;

29. $3a^2x^2-3a^2x(a-x)+3ax\,(a^2-x(a+x))$
$+(3a-2x)\,(a^2x-(ax-x^2)(a-2x))$;

30. $3ax\,[3a(3x-2a)\,(4a^2-3a(x-2a))+(4a^2-3ax)(x-2a)x]$.

Aufl. **12.** $-1-2x+2x^2+6x^3-x^4$; **13.** $68a^4-129a^3b+56a^2b^2+29ab^3-38b^4$; **14.** $29a^5-7a^4-16a^3-77a^2+245a$; **18.** $-a^4+a^2b^2+ab^3+b^4$; **19.** $2a^4+4a^3b-a^2b^2-3ab^3+b^4$; **20.** x^8-a^4; **21.** $2x^5-5x^4-x^3+6x^2$; **22.** $2a^6-13a^5b+44a^4b^2-26a^3b^3-8a^2b^4+64ab^5-32b^6$; **23.** $4x^4-6x^3+2x^2$; **24.** $8x^3y^2+8x^2y^3$; **25.** $2a^4-4a^3x-7a^2x^2-4ax^3-3x^4$; **26.** $2a^3x-3a^2x^2-5ax^3+3x^4$; **27.** $a^4-a^3b-a^2b^2+7ab^3+2b^4$; **28.** $2x^5-5x^4y-x^3y^2+6x^2y^3$; **29.** $4x^4-15ax^3+12a^2x^2$.

19.

Zerlegung dreigliedriger Ausdrücke.

Da $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$, so läßt sich jeder Ausdruck, der die Form rechts hat, in ein Produkt von der Form links verwandeln. Z. B.

$$x^2+7x+12=(x+4)(x+3).$$

Ebenso hat man:

$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$; z. B.
$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$;
$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$; z. B.
$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$;
$(x-a)(x+b)=x^2-(a-b)x-ab$; z. B.
$x^2-4x-21=(x-7)(x+3)$.

1. $x^2+8x+15$; $x^2-10x+24$; $x^2+5x-14$;

2. $x^2-3x-40$; x^2-5x-6; $x^2-13x+22$;

3. x^2+x-12; $x^2+12x+35$; $x^2+6x-27$;

4. $x^2-20x+96$; $x^2-18x+17$; $x^2-x-272$;

5. $x^2+17x+60$; x^2+8x-9; $x^2-10x+9$;

6. $x^2-21x+80$; $x^2+8x-84$; $x^2-10x-144$;

7. $x^2-21x+108$; $x^2+5x-150$; $x^2+2x-360$;

8. $x^2-(3c+d+1)x+(3c+d)$.

4. Abschnitt. Division.

20.

Die vierte Grundrechnungsart ist das Dividieren, die Umkehrung des Multiplizierens.

Dividieren heißt, aus einem gegebenen Produkt und dem einen gegebenen Faktor den anderen Faktor suchen. In Buchstaben:

$$\text{I. } \frac{ab}{b} = a \quad \text{oder} \quad (ab) : b = a.$$

Diese Definition enthält die Rechnungsregel: wenn man ein Produkt mit dem einen Faktor dividiert, so erhält man den anderen Faktor.

Das gegebene Produkt heißt Dividend, der gegebene Faktor heißt Divisor und der gesuchte Faktor heißt Quotient.

Da der Quotient die Eigenschaft eines Faktors hat, so folgt: Quotient ist diejenige Zahl, welche mit dem Divisor multipliziert den Dividend gibt. In Buchstaben:

$$\text{II. } \frac{a}{b} \cdot b = a \quad \text{oder} \quad (a : b) \cdot b = a.$$

Dies enthält die Rechnungsregel: wenn man einen Quotient mit dem Divisor multipliziert, so erhält man den Dividend.

Liest man I und II umgekehrt, so hat man: Jede Zahl kann man als Quotient schreiben, wenn man sie mit einer beliebigen Zahl multipliziert und das erhaltene Produkt mit derselben Zahl dividiert. Jede Zahl kann man als Produkt schreiben, wenn man sie mit einer beliebigen Zahl dividiert und den erhaltenen Quotient mit derselben Zahl multipliziert. Oder beide zusammengefaßt und abgekürzt: Multiplizieren und Dividieren mit derselben Zahl heben sich auf.

Da Divisor und Quotient die einzigen Faktoren sind, aus denen das Produkt, der Dividend, besteht, so folgt: Wenn man den Dividend durch den Quotient dividiert, so erhält man den Divisor. In Buchstaben:

$$\text{III. } a : \frac{a}{b} = b \quad \text{oder} \quad a : (a : b) = b.$$

IV. Wenn $a = b$ und $c = d$, so ist $a : c = b : d$. D. h. Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches. (Bew. wie in 3.)

V. Ist $ac = bc$, und dividiert man beiderseits mit c, so hat man $a = b$. D. h.: Sind in gleichen Produkten ein paar Faktoren gleich, so sind auch die andern gleich.

VI. Ist $a : c = b : c$ und multipliziert man beiderseits mit c, so erhält man (nach II) $a = b$. D. h. sind in gleichen Quotienten die Divisoren gleich, so sind auch die Dividenden gleich.

VII. Ist $a:b=a:c$ und dividiert man mit jedem in a, so hat man (nach III) $b=c$. D. h. sind in gleichen Quotienten die Dividenden gleich, so sind auch die Divisoren gleich.

VIII. $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$. Alle Quotienten, in denen Dividend und Divisor einander gleich sind, sind gleich.

Zum Beweis multipliziert man beiderseits mit ab, so erhält man beiderseits ab, und schließt nach V aus der Gleichheit der erhaltenen Produkte auf die Gleichheit der gegebenen Größen.

IX. $\frac{a}{a}=1$. Denn $1\cdot a=a$. D. h.: Jeder Quotient, dessen Dividend gleich ist dem Divisor, ist gleich 1.

Aufgaben:

1. $\frac{6a}{6}$; $\frac{100x^2}{x^2}$; $\frac{a^2(a+b)}{a+b}$; $\frac{x^2-y^2}{x-y}$; $\frac{32a^3-18ab^2}{4a+3b}$;

2. $\frac{ax+ay}{x+y}$; $\frac{8a^2x-12ax^2}{2a-3x}$; $\frac{(a+b)^2}{a+b}$; $\frac{x^5}{x^2}$; $\frac{a^4}{a}$; $\frac{a^3}{a^2}$;

3. $\frac{a^2+ab-ac-bc}{a-c}$; $\frac{abx^2+2b^2xy-2a^2xy-4aby^2}{ax+2by}$;

4. $\frac{(a+2b)^3}{(a+2b)^2}$; $\frac{2m(m-n)^4}{(m-n)^2}$; $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$;

5. $\frac{5}{7}\cdot 7$; $\frac{11}{15}\cdot 15$; $\frac{7}{30}\cdot 60$; $\frac{8}{9}\cdot 18$; $\frac{a}{x+a}\cdot(a+x)$;

6. $\frac{x-1}{x^2-4}(x^2-4)$; $\frac{a^2}{b^2}\cdot b^3$; $\frac{2a}{3b}\cdot 6ab$; $\frac{3ax^2}{4by^2}\cdot 8aby^2$;

7. $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{3}\right)\cdot 3$; $\left(\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x^2}\right)x^2$; $ab+\left(\frac{a^2}{b}-\frac{a}{b^2}\right)b^3$;

8. $a+\frac{a-b}{c}\cdot c-\frac{a+b-c}{a-b}\cdot(a-b)+\frac{3b-a-c}{a-c}\cdot(a-c)$;

9. $x+1+\frac{x+2}{x-1}\cdot(x-1)-\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)x^2-\left(2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)x^3$;

10. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)(x^2+x^3)$; $\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)(a^3+a^4)$;

11. $x:\frac{x}{p}$; $(a-1):\frac{a-1}{a-2}$; $\frac{x(a+b)}{a+b}:x$; $\frac{4}{4/5}$;

12. $\frac{(a+2b)(a-3b)}{a-3b}:\frac{a+2b}{a-2b}$; $a+y-(x-y):\frac{x-y}{a-y}$.

13. α) Womit muß man r multiplizieren, um q zu bekommen? β) Ein Produkt ist a, der eine Faktor b; wie heißt der andere? γ) Wenn man eine Zahl mit x dividiert, so erhält man y; wie heißt die Zahl? δ) Wenn man a mit einer gewissen Zahl

dividiert, so erhält man d, wie heißt die Zahl? ε) Die Zahl m soll als ein Produkt angesehen werden, dessen einer Faktor s ist; wie heißt der andere Faktor?

21.

Bedeutung des Dividierens.

Bei der Definition des Dividierens wurde vorausgesetzt, daß der Dividend als Produkt den Divisor als Faktor wirklich enthalte; denn nur unter dieser Voraussetzung hat die Definition zunächst einen Sinn.

Ist hiebei der Divisor eine unbenannte Zahl, so heißt die Aufgabe: man soll den Dividenden in eine durch den Divisor angegebene Anzahl von gleichen Summanden zerlegen, und die Größe eines solchen Summanden angeben. Dividieren bedeutet in diesem Sinne zerlegen, teilen, kleiner machen. Ist in diesem Falle der Dividend eine benannte Zahl, so ist auch jeder der Summanden, in welche er zerlegt wird eine gleichbenannte Zahl, also auch der gesuchte Teil eine gleichbenannte Zahl; nur in uneigentlichem Sinne wird dieser Teil der Quotient genannt.

Beispiel: 20 Äpfel sollen unter 5 Knaben zu gleichen Teilen verteilt werden; man soll angeben, wieviel Äpfel jeder Knabe bekommt. Da jeder Knabe einen Teil bekommen soll, so sind die 20 Äpfel in 5 Teile, also in 5 unter sich gleiche Summanden zu zerlegen; es findet sich, daß jeder Teil 4 Äpfel enthält, da $5 \cdot 4$ Äpfel $= 20$ Äpfel.

Ist hiebei auch der Dividend eine unbenannte Zahl, so kann der Rechnung derselbe Sinn untergelegt werden, indem man den Dividend als eine Anzahl von unbestimmten Einheiten auffaßt.

Ist aber der Divisor eine benannte Zahl, so hat die Division nur dann einen Sinn, wenn auch der Dividend eine gleichbenannte Zahl ist. Denn ist ein Faktor (der Divisor) eine benannte Zahl, so ist auch das Produkt (der Dividend) eine gleichbenannte Zahl, in diesem Falle ist aber der andere Faktor eine unbenannte Zahl, also ist der Quotient unbenannt. Da der unbenannte Faktor angibt, aus wie vielen gleichen Summanden das Produkt besteht, so ist in diesem Falle die Bedeutung des Dividierens: man soll angeben, wievielmal eine benannte Größe (der Divisor) in einer andern gleichbenannten Größe (dem Dividenden enthalten ist.

Beispiel: Wievielen Knaben kann ich von 20 Äpfeln je 4 Äpfel geben? Soviel ich aus 20 Äpfeln Teile zu je 4 Äpfeln machen kann, ebensovielen Knaben kann ich je einen solchen Teil geben. Aus 20 Äpfeln kann man aber 5 Teile zu je 4 Äpfeln machen, oder 4 Äpfel sind in 20 Äpfeln 5 mal (als Summand) enthalten. Die

Anzahl der Teile ist 5. Hiemit ist die Divisionsaufgabe beendet. Daß man von den 5 Teilen je einen an jeden von 5 Knaben geben kann, gehört nicht mehr zur Divisionsaufgabe.

In diesem Falle entspricht der Ausdruck Quotient seiner wirklichen Bedeutung, da er angibt, wievielmal (quoties) die eine Zahl (Divisor) in der anderen Zahl (Dividend) enthalten ist.

Da das Produkt größer ist als der benannte Faktor, sovielmal als der unbenannte angibt, so hat bei unbenanntem Divisor das Dividieren den Sinn des Kleinermachens. Man soll eine Größe (den Dividend) sovielmal kleiner machen, als eine Zahl (der Divisor) angibt. Bei benanntem Divisor hat es den Sinn: man soll angeben, wievielmal eine Größe (der Dividend) größer ist als eine andere Größe (der Divisor).

Sind Dividend und Divisor unbenannt, so kann der Division jede dieser Bedeutungen untergelegt werden.

Unter Quotient im allgemeinen Sinn versteht man der Definition gemäß eine Zahl, welche die Eigenschaft hat, daß sie mit dem Divisor multipliziert, den Dividend gibt.

1. Wievielmal ist 9 größer als 3, 24 größer als 6, 7 größer als 11? Wievielmal ist 3 kleiner als 15, 7 kleiner als 12, 15 kleiner als 4?

2. Wievielmal sind a *m* in x *m* enthalten? Wievielmal enthalten s Liter c Liter? Was ist r mal kleiner als 9 ha? Was ist s mal größer als x Meter?

3. Wievielmal sind p *kg* in q *kg* enthalten? Was ist c mal leichter als s *kg*? Was ist 3 mal weniger als n Stücke?

4. Wie groß ist der n^{te} Teil von a, der x^{te} Teil von q, der 3^{te} Teil von r? Wievielmal ist r größer als q, r kleiner als q, q größer als r, q kleiner als r?

5. Wenn man a *m* in c gleiche Teile teilt, wie groß ist ein Teil? In wieviele Teile wurden x *m* geteilt, wenn jeder Teil y *m* lang ist?

6. Wenn man *m* Kugeln in s gleich große Haufen verteilt, wieviele Kugeln enthält jeder Haufen? Wieviele Kugeln muß man haben, um aus ihren r gleich große Haufen machen zu können, von denen jeder n Kugeln enthält? Wieviele gleich große Haufen, von denen jeder a Kugeln enthält, kann man aus b Kugeln machen?

7. Als einer von einer Strecke s mal je c *m* wegnahm, blieben noch d *m* über; wie groß war die Strecke? Nachdem einer von seinen Kugeln schon *m* Haufen von je r Kugeln gebildet hatte, machte er aus den übrigen s Kugeln auch noch Haufen von je r Kugeln. Wieviel Haufen und wieviel Kugeln hatte er im Ganzen?

22.

Einführung des Bruches.

Bei der Definition des Dividierens wurde, damit die angegebene Operation ausführbar sei, vorausgesetzt, daß der Dividend ein Produkt, und daß der Divisor ein Faktor desselben sei. Das Verlangen, die Operation des Dividierens auch dann noch auszuführen, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, führt zur Definition des Bruches, oder der gebrochenen Zahl. Ist etwa 1 zu dividieren durch 7, so muß, da 7 nicht ein Faktor von 1 ist, 1 zu erst in ein Produkt zerlegt werden, dessen einer Faktor 7 ist; es muß also 1 in eine Summe aus 7 gleichen Summanden zerlegt werden. Bedeutet 1 eine Größe, welche ihrer Natur nach nicht in Teile zerlegt werden kann, z. B. 1 Arbeiter, 1 Auge, 1 Dampfmaschine, ohne daß die Teile aufhören, mit dem ganzen von gleicher Art zu sein, so hat die verlangte Operation keinen Sinn, die verlangte Aufgabe ist unlösbar. Z. B.: Zu einer Arbeit braucht 1 Arbeiter 2 Tage; ich will die Arbeit aber in 3 Tagen machen lassen; wieviele Arbeiter muß ich nehmen? Antwort $^2/_3$ Arbeiter; da aber der Begriff Arbeiter etwas unteilbares bedeutet, so enthält die gestellte Frage eine Unmöglichkeit in sich. Wenn aber 1 eine Größe bedeutet, welche in Teile geteilt werden kann, die mit dem ganzen von gleicher Art sind, z. B. eine Linie, ein Winkel, ein Raum, eine Zeit u. s. w. so ist es auch möglich, die Größe in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen. Einen solchen Teil eines in mehrere gleiche Teile geteilten Ganzen nennt man einen Bruch, und bezeichnet ihn etwa bei 7 Teilen mit $^1/_7$.

Man kann demnach die Einheit 1 darstellen als Summe ihrer gleichen Teile und damit als Produkt.

$$1 = {}^1/_7 + {}^1/_7 + {}^1/_7 + \ldots\ldots (7 \text{ mal}) = {}^1/_7 \cdot 7.$$

Jetzt kann auch die Operation der Divison an 1 ausgeführt werden, denn

$$\frac{1}{7} = \frac{{}^1/_7 \cdot 7}{7} = {}^1/_7.$$

$\frac{1}{a}$ bedeutet demnach eine mit der Einheit gleichartige Größe, welche entsteht, wenn man die Einheit in a gleiche Teile teilt; da nach dieser Definition $\frac{1}{a} \cdot a = 1$, so sagt man auch $\frac{1}{a}$ ist a mal kleiner als 1.

Da $\frac{b}{a} = \frac{b \cdot 1}{a} = \frac{b \cdot \frac{1}{a} \cdot a}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$, so ist damit auch

die Bedeutung von $\frac{b}{a}$ erklärt, denn es bedeutet $b \cdot \frac{1}{a}$, das ist: b Teile der in a gleiche Teile geteilten Einheit. Auch eine solche aus mehreren gleichen Teilen der Einheit bestehende Größe nennt man einen Bruch.

Diese Definition des Bruches war notwendig, um nicht die Ausführung der Division in vielen Fällen als etwas unmögliches erscheinen zu lassen. Für die Rechnung wird der Bruch als Quotient betrachtet, d. h. als eine Zahlengröße, welche die Eigenschaft hat, daß sie mit dem Divisor multipliziert den Dividend gibt.

Es führt somit die Forderung, eine Division von Zahlen in jedem Falle ausführen zu können, zur Einführung der gebrochenen Zahlen, und damit zu einer Vervollständigung der Zahlenreihe. Stellt man sich die Zahlenreihe vor als eine Reihe von Punkten, die von einem Anfangspunkte (Nullpunkt) aus auf einer geraden Linie in gleichen Abständen angebracht sind, so bedeutet jede Strecke vom Anfangspunkte bis zu einem dieser Punkte eine Zahl von so vielen Einheiten, als Strecken zwischen ihm und dem Nullpunkte liegen. Gebrochene Zahlen bedeuten dann Strecken, die zwischen zwei benachbarten Punkten endigen. Ob auch jedem Zwischenpunkt eine gebrochene Zahl entspricht oder entsprechen muß, kann zunächst nicht behauptet werden.

1. Was bedeutet $\frac{1}{a}$ *kg*? Was bedeuten $\frac{c}{n}$ Meter?

2. 16 ist 7 mal größer als eine andere Zahl; wie heißt diese? Ein Stein von 19 *kg* Gewicht ist 8 mal schwerer als ein anderer Stein; wie schwer ist dieser?

3. Man schreibe algebraisch, daß eine Größe a n mal kleiner ist als die Größe b, daß x r mal kleiner ist als y, daß die Größe c um a größer ist als der n^{te} Teil von b, daß die Größe m um r kleiner ist der s^{te} Teil von x.

4. Man schreibe algebraisch, daß die Größe a um c größer ist als der m^{te} Teil von b und der n^{te} Teil von x zusammen.

23.

$$\text{I. } \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \quad \text{II. } \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}.$$

Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man sowohl Dividend als Divisor mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert.

Zum Beweis multipliziert man bei I beiderseits mit bc, bei II rechts Dividend und Divisor mit c.

1. Bringe folgende Brüche auf die angegebenen Nenner:
$\frac{17}{25}=\frac{?}{100}$; $\frac{19}{32}=\frac{?}{96}$; $\frac{41}{54}=\frac{?}{270}$; $\frac{12}{19}=\frac{?}{152}$; $\frac{15}{32}=\frac{?}{1024}$;

2. Bringe $\frac{79}{84}$ auf die Nenner 588, 756, 1092, 2268, $\frac{28}{37}$ auf 185, 444, 1073, 2960;

3. Bringe $\frac{5b}{6c}$ auf den Nenner $18c^2x$; $\frac{a+b}{2a+4b}$ auf $4a^2+8ab$; $\frac{xy^2}{x-y^2}$ auf x^2y-xy^3; $\frac{a+b}{a-b}$ auf a^2-b^2; $\frac{1}{x+1}$ auf x^2-1; $\frac{49a}{26bxy}$ auf $156ab^3x^2y^2$; $\frac{5x^2(x+y)}{18a^2y(x-y)}$ auf $450a^4x^4y^4(x^2-y^2)$;

Vereinfache folgende Brüche:

4. $\frac{18}{24}$; $\frac{30}{45}$; $\frac{90}{126}$; $\frac{192}{312}$; $\frac{810}{1125}$; $\frac{10633}{14063}$; $\frac{3564}{3630}$;

5. $\frac{a^5}{a^2}$; $\frac{a^2}{a^5}$; $\frac{12ab}{18ac}$; $\frac{x^2y}{xy^2}$; $\frac{27a^2b}{18ab^3}$; $\frac{26x}{3x^2y}$; $\frac{36abx^2z^2}{42a^2xz^4}$;

6. $\frac{5a^2(a+2b)(a-b)}{15ab(a+2b)(a+b)}$; $\frac{4ab(x^2-1)}{8b^2(x-1)^2}$; $\frac{3a-3b}{6a+6b}$;

7. $\frac{5a^2-10ab}{5a-10b}$; $\frac{4a-8b}{6a-12b}$; $\frac{12a^3b+30a^2b^2}{20a^2b^2+50ab^3}$;

8. $\frac{36a^3xy-48a^2x^2y^2}{36a^2x^2y^2-27ax^3y}$; $\frac{60a^5b-135a^3b^3}{20a^2b^3-30ab^4}$;

9. $\frac{x^3y+x^2y^2-x^2y}{xy^3-xy^2+x^2y}$; $\frac{x^4y^3-x^3y^5+x^2y^7}{x^5y^2+x^3y^6-x^4y^4}$;

10. $\frac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$; $\frac{15x^2-45x+30}{20x^2-20x-40}$;

11. $\frac{24a^3b^3x^2-18a^2b^4x^3+36ab^5x^4}{36a^2b^3x^5-18a^3b^2x^4+24a^4bx^3}$; $\frac{288a^2m^2x^3y^2-324a^3mx^2yz}{108a^2m^2x^3yz-144a^3mx^2y^2}$;

12. $\frac{8a^3x^2y+8a^2x^3y-12a^2x^2y^2-12ax^3y^2}{12a^2xy^3-18axy^4-12a^3y^3+18a^2y^4}$;

13. $\frac{4b^2(12a^3b-21a^2b^2)(96a^6b^3-132a^4b^5)}{3a(72a^4b^5+99a^2b^7)(32a^4b-56a^3b^2)}$;

14. $\frac{8(12a^2b-18ab^2)(3x^4-3x^3)(75ax^3-60a^2x^2)}{3(50abx^2-40a^2bx)(4x^3-4x)(18a^3-27a^2b)}$;

15. $\frac{(8x^2-2x^4)(4x^2+8x)(8x^4-8x^3)}{(2x^3-8x^2)(16x-4x^3)(16x^3+8x^4)}$;

16. $\frac{24x^3(x-2a)^2(54a^3x^3y^3-72a^2xy^4)}{(24a^2x^4y^2-32ax^2y^3)(12a^2x^5-48a^4x^3)}$;

17. $\frac{(3x^2-48)(4x^2-16x+12)}{(2x^2+2x-24)(6x^2-18x-24)}$;

18. $\frac{3x^2-30x+63}{x^2-4x-21}-\frac{2x^2+4x-30}{x^2+8x+15}$; $\left[=\frac{x-3}{x+3}\right]$

19. $\frac{2x^2+8x+8}{x^2-4}+\frac{3x^2+3x-6}{x^2-3x+2}-\frac{4x^2+12x+8}{x^2-x-2}$; $\left[=\frac{x+2}{x-2}\right]$

20. $\frac{ac+bc-ad-bd}{ac-ad-2bc+2bd}+\frac{6ac+10bc+15bd+9ad}{6ac-6bd+9ad-4bc}$.

24.

I. $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$; II. $\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$;

III. $\frac{a+b-c-d+e-f}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}-\frac{d}{n}+\frac{e}{n}-\frac{f}{n}$.

(Formuliere I und II; beides mit III zusammengefaßt heißt): Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied des Ausdrucks durch die Zahl dividiert und die erhaltenen Quotienten durch dieselben Vorzeichen verbindet, welche die Glieder hatten.

Umgekehrt. (Formuliere I und II). Ein mehrgliedriger Ausdruck, dessen Glieder Quotienten sind, die alle denselben Divisor haben, läßt sich in einen Quotienten vereinigen, indem man die Dividenden durch die den Gliedern zugehörigen Vorzeichen verbindet, und den erhaltenen mehrgliedrigen Ausdruck durch den gemeinsamen Divisor dividiert. (Regel über das Vereinigen gleichnamiger Brüche.)

Beweis: Man multipliziert beiderseits mit dem Nenner c (resp. n).

1. $\frac{3a+3b}{3}$; $\frac{5x^2y-4xy^2}{xy}$; $\frac{20a^2b^3+28a^4b^3-32a^3b^5}{4a^2b^2}$;

2. $\frac{5ax-10ay+15az}{5a}-\frac{6x^2-12xy-18xz}{6x}$;

3. $\frac{8ab+12b^2}{4b}+\frac{7a(a+b)-8b(a+b)}{a+b}-\frac{5a^2b+10ab^2}{5ab}$;

4. $\frac{4a+3b}{4ab}=\frac{1}{b}+\frac{3}{4a}$; $\frac{45a^3x^2-30a^2x^3+20ax^4}{30a^2x^3}$;

5. $\frac{2a^2+3ab}{a^2b}-\frac{4b^2x-5abx}{ab^2x}+\frac{8a^2xy-12abxy}{4a^2bxy}$;

6. $7a+\frac{4a^2b^2-3a^3b^3}{a^3b^2}-\frac{6a^3b^3+4ab^3-3a^2b^4}{a^2b^3}$;

7. $\frac{4x^3+5x^2y+3x^3y^4}{x^3y^2}-\frac{4x+2y-4x^2y^2}{xy^2}+\frac{7x^2y-4x^5y-2x^3}{x^4y}$;

8. $\frac{1-x}{x}+\frac{x-x^3}{x^2}-\frac{x^2-x^4}{x^4}+\frac{x^3-x^4}{x^5}+\frac{x^4-x^2}{x^3}$;

9. $\frac{4ab+5a^2b^2+5ab^2}{a^2b}+\frac{8a^3b^2-3ab^3}{a^2b^3}-\frac{3a^2b+7ab^3}{ab^2}$
$-\frac{5a^4b+5a^2b^3-a^3b^3}{a^3b^2}$;

10. $\frac{5x^3y^3+11x^3y^2z-7xy^5}{x^2y^4}-\frac{15x^3z-2xy^3-3x^3y}{x^2y^2}$
$+\frac{4x^4yz-7x^4y^2+6x^2y^4}{x^3y^3}$;

Vereinigen gleichnamiger Quotienten.

11. $\frac{5}{11}+\frac{7}{11}-\frac{3}{11}+\frac{4}{11}+\frac{9}{11}$; $\frac{3a}{10}+\frac{5a}{10}-\frac{7a}{10}+\frac{9a}{10}$;

12. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$; $\frac{a+b}{a-2b}-\frac{2a-b}{a-2b}+\frac{3a-b}{a-2b}$;

13. $\frac{3x-5y}{5(x+y)}+\frac{4x+3y}{5(x+y)}+\frac{3x+7y}{5(x+y)}$;

14. $\frac{b}{2}+\frac{a-b}{2}$; $\frac{a}{2}-\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$;

15. $\frac{2a+y}{a+x}-\frac{3x-4y}{a+x}+\frac{4x-5y-a}{a+x}$; (=1)

16. $\frac{a^2+ab}{a-b}-\frac{ab-b^2}{a-b}$; $3-\frac{5a-7b}{a}+7-\frac{7b+4a}{a}$;

17. $\frac{3a}{7}+\frac{2a}{a+x}+\frac{6a}{7}+\frac{3x-4a}{a+x}+\frac{5a}{7}-\frac{2x-3a}{a+x}$; [= 2a+1]

18. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x+2}{x+1}-\frac{2}{x-1}$; [$= 1+\frac{x+3}{x+1}$]

19. $\frac{x-1}{x}+\frac{x-y}{y}-\frac{x-y}{x}-\frac{x-1}{y}+\frac{1-y}{x}+\frac{2y-1}{y}$;

20. $\frac{8x-5}{2x-3}-\frac{9-4x}{3x-7}-\frac{4x+1}{2x-3}+\frac{5x+30}{3x-7}$;

21. $\frac{12-2x}{7-5x}-\frac{2-5x}{7x-2}+\frac{1+5x}{7-5x}+\frac{9x-2}{7x-2}-\frac{6+8x}{7-5x}$;

22. $\frac{x^2+8x+16}{x^2-16}+\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-8}-\frac{x^2-2x-35}{x^2-11x+28}+\frac{2x-8}{x-4}$;

23. $\frac{x^2-x-42}{x^2-36}-\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}+\frac{2(x-1)}{x-5}+\frac{x^2-12x+35}{x^2-13x+42}$;

24. Wie groß ist eine Strecke, welche gleich der Hälfte von a und der Hälfte von b zusammen ist? Wie groß ist eine Strecke, welche um den dritten Teil von a kleiner ist als der dritte Teil

von b? Wie viel habe ich, wenn ich von den 4 Größen c, b, c, d überall den n^{ten} Teil nehmen darf?

Aufl. **19.** 1; **20.** 5; **21.** 3; **22.** 3; **23.** 3.

25.

Vereinigen ungleichnamiger Quotienten.

Ungleichnamige Quotienten können nur dadurch vereinigt werden, daß man sie gleichnamig macht, d. h. sie auf einen gemeinschaftlichen Divisor bringt. Da jeder Quotient nur dadurch auf einen anderen Nenner gebracht werden kann, daß man (23 I) sowohl den Zähler als den Nenner mit derselben Zahl multipliziert, so muß der gemeinschaftliche Divisor die Eigenschaft haben, daß jeder einzelne Nenner in ihm als Faktor enthalten ist. Der gemeinschaftliche Divisor muß also wenigstens jeden einzelnen Faktor jedes Nenners als Faktor enthalten. Man bildet also den kleinsten gemeinschaftlichen Divisor mehrerer Quotienten, indem man (nach möglichster Vereinfachung derselben nach 23 II) jeden Nenner in seine einfachsten Faktoren zerlegt und aus diesen Faktoren ein Produkt bildet, indem man jeden Faktor so oft aufnimmt, als er da vorkommt, wo er am öftesten vorkommt. Andere gemeinschaftliche Nenner kann man bilden, indem man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner mit einer beliebigen Zahl multipliziert. Zum Gleichnamigmachen von Quotienten benützt man meistens den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner; einen größeren nur dann, wenn er durch leichtere Übersichtlichkeit besondere Bequemlichkeit zu bieten scheint. Auch ist es manchmal von Vorteil zuerst diejenigen Brüche zu vereinigen, deren Nenner durch Gleichheit mehrerer Faktoren verwandt sind, die so entstandenen Brüche zu vereinfachen und dann erst auf einen gemeinschaftlichen Nenner zu bringen. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist der Definition gemäß das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Nenner und wird auch Hauptnenner oder Generalnenner genannt.

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $\frac{3}{4}-\frac{5}{7}$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$;

2. $\frac{5}{6}+\frac{4}{9}$; $\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}$; $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}$; $2a-\frac{5}{7}a$; $\frac{r}{4}+r-\frac{2r}{3}$;

3. $\frac{7}{24}+\frac{11}{36}$; $\frac{a}{x^3y}+\frac{b}{x^2y^2}$; $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{11}{16}$;

4. $\frac{1}{2a}+\frac{1}{4b}$; $\frac{2a}{5b}-\frac{4b}{3a}$; $\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{a}$;

$\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^4}$; $\frac{7b-3a}{3b}-\frac{2m-x}{2x}+\frac{ax+bm}{bx}-\frac{1}{6}$;

5. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$; $\frac{x}{2}-\left(x-\frac{5x}{6}+\frac{x}{4}\right)$;
$\frac{5}{a}-\frac{7}{b}+\left(\frac{4}{b}-\left(\frac{3}{a}-\frac{11}{b}\right)\right)$;

6. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$; $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}$; $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}$;
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$; $\frac{b^2+3ax}{bx}-\frac{2a^2-5b^2}{ab}-\frac{ab+4bx}{ax}$;

7. $\left(\frac{a}{3}-\frac{2b}{5}+\frac{5c}{6}\right)-\left(\frac{a}{10}+\frac{b}{6}+\frac{2c}{5}\right)+b$;

8. $\frac{x^2}{y^2z}+\frac{y^2}{z^2x}+\frac{z^2}{x^2y}$; $\frac{2a}{3b}-\frac{4a-b}{3a+3b}$;

9. $\frac{2a+x}{a-2x}-\frac{a+2x}{2a-x}$; $\frac{5a+7y}{7a+12y}-\frac{9a-11y}{8a-5y}$;

10. $\frac{7a}{4}+\frac{11b}{25}-\frac{11c}{18}-\left(\frac{b}{10}-\frac{5a}{8}-\frac{7c}{9}\right)+\left(\frac{13b}{50}-\frac{3a}{8}+\frac{c}{2}\right)$;

11. $\frac{a}{10b}-\frac{3}{28}+\frac{4b}{35a}$; $\frac{3x^2}{14y^2}-\frac{x}{4}+\frac{4y^2}{14}-\frac{y^4}{3x}$;

12. $\frac{3x^2}{28y^3}+\frac{1}{14xy}-\frac{y}{42x^4}$; $\frac{2a^3c}{9b^6}-\frac{a}{6b^2}+\frac{b^2}{7ac}-\frac{2b^6}{21a^3c^2}$;

13. $\frac{1}{a+b}-\frac{a-b}{(a+b)^2}+\frac{a^2+b^2}{(a+b)^3}$; $\frac{1}{1-x}+\frac{1+x}{(1-x)^2}+\frac{1-x-x^2}{(1-x)^3}$;

14. $\frac{4a-3b}{2a(a+b)}+\frac{3a+5b}{3b(a-b)}-\frac{2a-b}{6ab}$;

15. $\frac{1+2x-x^2}{2x+x^2}-\frac{x+2}{3-6x}-\frac{x-2}{3x}$;

16. $\frac{2}{9a-15x}-\frac{4}{60a+105x}-\frac{x-2a}{3a^2-5ax}$;

17. $\frac{3x-7}{4x-8}-\frac{3x+6}{4x+5}$; $\frac{11x-17}{45x-60}-\frac{12x+13}{80x+60}$;

18. $\frac{2}{a^2-ab}-\frac{3}{a^2+ab}-\frac{4}{2a^2+3ab}$; $\frac{9}{4-4x}+\frac{7}{6-3x}-\frac{15}{6-2x}$;

19. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}$;

20. $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}$; $1-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}$;

21. $\frac{b}{a}-1+\frac{a}{b}$; $\frac{a}{a-1}-1+\frac{b}{b-1}$;

22. $\frac{7a-5x}{5a+10x}+\frac{6a+5x}{4a-8x}-\frac{13a^2+40x^2}{10a^2-40x^2}$;

23. $\frac{5}{3ab^3(a^2-b^2)}-\frac{3}{4a^3b(a^2+b^2)}-\frac{4}{5a^3b^3}$;

24. $\frac{2a-3bx}{42a^4b^2}-\frac{a^2+4b^2x^2}{63a^3b^4x^2}-\frac{4a^2-b^2x^2}{28a^2b^5x^3}+\frac{3a+2bx}{36ab^5x^3}$;

25. $\frac{x-2}{(1+x)^2}+\frac{x-3}{(1-x)^2}-\frac{x-4}{1-x^2}-\frac{5}{1-x}$;

26. $\frac{a^2-2a+3}{a^2+2a+3}-\frac{a^2-3a-2}{a^2+3a-2}$; $\frac{x^2-3xy+4y^2}{x^2y+2xy^2-5y^3}$

$-\frac{2x^2-5xy-3y^2}{2x^3-x^2y+xy^2}$;

27. $\frac{2}{1-x+x^2}-2-\frac{x}{1-x}$;

28. $\frac{1}{2a+b}-\frac{1}{2a-b}-\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a-2b}$;

29. $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}$;

30. $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$;

31. $\frac{3a-2b}{8a^2+8ab}+\frac{4b-3a}{6ab-6b^2}-\frac{3b-a}{12a^2-12b^2}$;

32. $\frac{2b^3r-aq^2}{21a^2b^6q^2r^5}+\frac{b^2r+3aq^2}{45ab^8r^6}-\frac{3aq^2-4b^2r}{15a^4bq^6r^3}-\frac{2aq^2-3br}{35a^3b^3q^4r^4}$;

33. $\frac{a+3b}{a-b}-\frac{a^2-3ab+b^2}{(a-b)^2}-\frac{a^2+3ab-b^2}{(a+b)^2}+\frac{a-3b}{a+b}$;

34. $\frac{12a-13b}{3a^2+6ab}-\frac{14a-15b}{4ab-8b^2}+\frac{16a-17b}{6a^2-24b^2}$;

---

35. $\frac{3-5x}{x^2-2x-15}+\frac{4x+7}{x^2+2x-3}-\frac{5-2x}{x^2-6x+5}$;

36. $\frac{2x-9}{x^2-16}-\frac{5-11x}{x^2-2x-24}-\frac{3x-8}{x^2-10x+24}$;

37. $\frac{x+3}{x^2+x-2}+\frac{x+1}{x^2-x-6}-\frac{x-2}{x^2-4x+3}-\frac{1}{x-1}$;

38. $\frac{2x+5}{x^2-9x+14}-\frac{2x+4}{x^2-4}+\frac{2x-5}{x^2-4x-21}-\frac{2x+4}{x^2+5x+6}$;

39. $\frac{2x+2}{x^2-4x-5}-\frac{3x-3}{x^2+3x-4}+\frac{x-4}{x^2-7x+12}$;

40. $\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x-2}{x^2-x-2}-\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^3-x}$;

41. $\frac{6ab-9b^2}{12a^2b-36ab^2+27b^3}-\frac{6a^2+8ab}{18a^3-32ab^2}+\frac{6a^2}{8a^3-18ab^2}$;

42. $\frac{a+3}{5a^2+5a-30}-\frac{a+5}{4a^2-100}+\frac{2a+10}{3a^2-6a-105}-\frac{a-5}{2a-10}$.

Aufl. **15.** $\frac{7x^3-20x^2-12x+7}{3x(2+x)(1-2x)}$; **16.** $\frac{148a^2+240ax-105x^2}{15a(3a-5x)(4a+7x)}$;
18. $\frac{19b^2+7ab-6a^2}{a(a^2-b^2)(2a+3b)}$; **22.** $\frac{32a^2+9ax+10x^2}{20(a^2-4x^2)}$; **25.** $\frac{8x^3-4x^2-6x-6}{(1+x^2)(1-x^2)}$;
26. $\frac{2a^3-2a^2+26a}{(a^2+2a+3)(a^2+3a-2)}$; **28.** $\frac{4b^3+14a^2b}{(4a^2-b^2)(a^2-4b^2)}$;
31. $\frac{6b^3-5ab^2+15a^2b-12a^3}{24ab(a^2-b^2)}$; **33.** $\frac{14a^2b^2-4ab^3-6b^4}{(a-b)^2(a+b)^2}$;
35. $\frac{x^2-4x-53}{(x-1)(x+3)(x-5)}$; **37.** $\frac{x}{(x-1)(x+2)(x-3)}$;
38. $\frac{28x+39}{(x-2)(x+3)(x-7)}$; **40.** $\frac{3x^2+2x+1}{x^4-1}$; **41.** $\frac{11a^2-11ab-3b^2}{(4a^2-9b^2)(3a-4b)}$;
42. $\frac{-30a^3+457a^2-2059a+2710}{60(a-2)(a-5)(a-7)}$.

26.

$$\frac{a}{c}\cdot b=\frac{ab}{c}=\frac{a}{c:b}.$$

Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliziert, indem man entweder den Dividend mit der Zahl multipliziert oder den Divisor mit der Zahl dividiert. (Das ist eine abgekürzte Formulierung; formuliere vollständig!)

Zusatz. In manchen Fällen kann man mit Vorteil so verfahren: Man zerlegt die Zahl (b) in zwei passende Faktoren, und dividiert mit dem einen den Divisor und multipliziert mit dem andern den Dividend. In komplizierteren Fällen setzt man die Zahl als Faktor in den Dividend und wendet Vereinfachung nach **23** an.

Umgekehrt. Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man den einen Faktor durch die Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multipliziert. (Die andere Umkehrung später).

Beweis. Bei $\frac{a}{c}\cdot b=\frac{ab}{c}$ multipliziert man beiderseits mit c. Bei $\frac{ab}{c}$ dividiert man Zähler und Nenner mit b, so erhält man $\frac{a}{c:b}$.

Oder $\frac{ab}{c} = \frac{a+a+a+\ldots(b\,\text{mal})}{c} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \ldots (b\,\text{mal})$

$= \frac{a}{c} \cdot b.$

1. $\frac{2}{7} \cdot 3$; $\frac{5}{8} \cdot 2$; $\frac{4}{5} \cdot 9$; $\frac{18}{25} \cdot 12$; $\frac{17}{30} \cdot 6$; $\frac{13}{42} \cdot 14$; $\frac{49}{60} \cdot 11$; $\frac{84}{121} \cdot 11$; $\frac{16}{45} \cdot 14$; $\frac{27}{70} \cdot 35$;

2. $\frac{5}{6} \cdot 4$; $\frac{7}{8} \cdot 6$; $\frac{8}{9} \cdot 12$; $\frac{5}{27} \cdot 18$; $\frac{14}{15} \cdot 10$; $\frac{19}{60} \cdot 36$; $\frac{20}{49} \cdot 35$; $\frac{41}{90} \cdot 80$; $\frac{31}{72} \cdot 63$; $\frac{17}{33} \cdot 22$; $\frac{15}{26} \cdot 39$; $\frac{19}{62} \cdot 93$;

3. $\frac{2a}{3b} \cdot 5a$; $\frac{a+b}{a-b} \cdot (a-b)$; $\frac{1}{x-1} \cdot x$; $\frac{3a^2b}{a^2-b^2} \cdot 4ab$;

4. $\frac{ax-by}{a-b}(x+y)$; $\frac{a+2b}{a^2-b^2}(a-2b)$; $\frac{6a}{7b^2} \cdot 7b$; $\frac{3x}{8y^2} \cdot 4y$;

5. $\frac{3x-y}{4x+2y} \cdot (2x+y)$; $\frac{35a}{36b^2} \cdot 12b$; $\frac{19x-18m}{16mx} \cdot 8x$;

6. $\frac{ax-ay}{bx^2-by^2} \cdot b(x+y)$; $\frac{a-by}{(a^2y-b)^2} \cdot (a^2y-b)$;

7. $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} \cdot 5b$; $\frac{7}{8} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot 4b^2$; $\frac{10}{21} \cdot \frac{a^3x}{b^2y^3} \cdot 14by^2$;

8. $\left(\frac{4}{x} - \frac{5}{4x^2} + \frac{6}{5x^3}\right)(10x - 12x^2)$;

9. $\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{a}{b^2} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{b}\right)(12a^2 - 6ab) + \left(\frac{7}{12} \cdot \frac{a^2}{b^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{b^2}\right)(18ab - 12b^2)$;

10. $\left(\frac{3}{4}\frac{a^4}{b^3} - \frac{1}{2}\frac{a}{b} + \frac{1}{3}\frac{b}{a^2} - \frac{2}{9}\frac{b^3}{a^5}\right)(3a^3b + 2b^3)$;

11. $\left(3\frac{1}{2}\frac{a^4}{x^3} + 4\frac{3}{4}\frac{a^3}{x^2} - 1\frac{5}{6}\frac{a^2}{x} + 2\frac{2}{3}a\right)(6a^2 - 8ax + 9x^2)$;

---

12. $\frac{5a-6by}{108a^3b^4y^5} \cdot 84a^4b^2y^7$; $\frac{a^2+ab}{24a^2+36ax} \cdot (28ax + 42x^2)$;

13. $\frac{x^4+x^5}{(x^2+x^4-x^6)(x^4-x^6)} \cdot (x + x^3 - x^5)$;

14. $\frac{24a^2b + 28ab^2x}{6a^2bx(11a + 13bx)^2} \cdot (33a^2x + 39abx^2)$;

15. $\frac{axy + a^2y^2}{a^2x^6y^2 - a^4x^3y^3} \cdot (x^5y - a^2x^2y^2)(ax^2 + a^2xy)$;

16. $\frac{p^3q^3 + p^2q^4x}{p^7q^3x^2 - p^5q^5x^4} \cdot (p^4x^2 - p^3qx^3)$;

17. $\frac{120\,a^3b^3 - 108\,ab^4x}{60\,a^4b^3x^2\,(10\,a^2 - 9\,bx)^2} \cdot (150\,a^4bx^2 - 135\,a^2b^2x^3)$;

18. $\frac{4x - 12}{3x^2 - 27x + 60}(x - 5) + \frac{7x - 28}{6x^2 - 66x + 180} \cdot (x - 6)$
$- \frac{5}{2x^2 + 4x - 48} \cdot (x^2 + 4x - 12)$;

19. $\frac{5\,a^2 - 7\,ab}{200\,a^5b^2 - 150\,a^4b^3} \cdot (8\,ab - 6\,b^2)$
$- \frac{9\,ab + 11\,b^2}{945\,a^5b^3 + 1155\,a^4b^4} \cdot (27\,a^3 + 30\,a^2b)$
$+ \frac{48\,a^3 - 28\,a^2b}{1960\,a^3b^5 - 1568\,a^4b^4} \cdot (10\,b^2 - 8\,ab)$;

20. $\frac{a^2}{a^5 - a^3} \cdot (a^3 - a^2) - \frac{a^2 + 2a}{2\,a^3 + 2\,a^2 - 4\,a} \cdot 2\,a + \frac{a^2 + 1}{a^6 - a^2}(2\,a^3 + a^2)$.

---

21. n Arbeiter fertigen x Stücke; wieviel fertigt ein Arbeiter, und wieviel fertigen p Arbeiter?

22. n Arbeiter brauchen x Tage zu einer Arbeit; wie lange braucht ein Arbeiter, und wie lange brauchen p Arbeiter?

23. a Größen enthalten b Dinge gleichmäßig unter sich verteilt. Wieviel Dinge enthalten c Größen? und wieviele Größen enthalten d Dinge?

24. Welchen Zins tragen k ℳ Kapital bei p %?

25. Man drücke algebraisch aus, daß die Größe x um a kleiner ist als das c fache des r^{ten} Teiles der Größe y.

26. A hat bei sich c ℳ und den Verkaufspreis von n Stücken, von denen je r Stück m ℳ kosten; wie groß ist seine Baarschaft?

Aufl.: **13.** $\frac{1}{x(1-x)}$; **14.** $\frac{2\,(6a+7bx)}{11a+13bx}$; **15.** $(x+ay)^2$; **16.** 1; **17.** $\frac{3b}{a}$; **18.** $\frac{82-15x}{6\,(x-4)\,(x-5)}$; **19.** $\frac{300\,a^3 - 490\,a^2b - 105\,ab^2 - 343\,b^3}{1225\,a^3b^3}$; **20.** $\frac{1}{a^2-1}$.

27.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{bc}.$$

Ein Quotient wird mit einer Zahl dividiert, indem man entweder den Dividend durch die Zahl dividiert, oder den Divisor mit der Zahl multipliziert. (Abgekürzte Formulierung; ausführlich!)

Zusatz. In manchen Fällen kann man mit Vorteil so verfahren, daß man die Zahl (c) in zwei passende Faktoren zerlegt und mit dem einen Faktor den Dividend dividiert und mit dem andern Faktor den Divisor multipliziert. In komplizierteren Fällen

setzt man die Zahl als Faktor in den Divisor und vereinfacht nach **23.**

Umgekehrt. Eine Zahl wird mit einem Produkt dividiert, indem man die Zahl mit dem einen Faktor dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor dividiert.

Beweis. Man multipliziert beiderseits mit b c.

1. $\frac{9}{16}:4;\quad 2\frac{1}{2}:3;\quad 5\frac{1}{4}:10;\quad 7\frac{5}{8}:5;\quad 2\frac{11}{13}:9;\quad 127\frac{3}{4}:6;$

$\frac{9}{16}:3;\quad \frac{27}{24}:9;\quad \frac{35}{11}:5;\quad 3\frac{3}{5}:9;\quad 7\frac{7}{11}:12;\quad 127\frac{3}{4}:7;$

2. $\frac{16}{15}:12;\quad \frac{27}{35}:21;\quad \frac{30}{41}:20;\quad \frac{64}{17}:24;\quad 2\frac{1}{7}:10;\quad 3\frac{1}{9}:21;$

$4\frac{2}{25}:6;\quad 9\frac{3}{4}:6;\quad 533\frac{3}{8}:12;\quad 6037\frac{1}{7}:15;\quad 8255\frac{3}{4}:30;$

3. $\frac{5a^2}{3bx}:3bx;\quad \frac{12ax^2}{7y}:5y^2;\quad \frac{a+b}{a-b}:(a-b);$

4. $\frac{15a^2}{4bx}:3a;\quad \frac{18a^3bx^2}{2x+3a}:6a^2x^2;\quad \frac{a^2-9b^2}{a+2b}:(a-3b);$

5. $\frac{15a^2x-15a^2y}{x+y}:15a^2;\quad \frac{x^2y^4-x^4y^2}{y^2-xy}:x^2y;$

6. $\frac{24a^3b^2}{7xy^2}:8a^2xy^2;\quad \frac{42x^4y^5}{5u^4v^2}:49x^2y^2u^2v^2;$

7. $\frac{a+b}{a-b}:(a^2-b^2);\quad \frac{x^2-u^2}{x-v}:(x-u)(x-v);$

8. $\left(\frac{5a^3y^5}{6x}-\frac{12a^2y^3}{x^3}+\frac{10a}{5x^2}\right):30a^2y^3;$

9. $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1\right):ab;\quad \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right):x^3;$

---

10. $\frac{25a^2x^3-25a^4x}{6ax^3+6a^2x^2}:(5ax-5a^2);$

11. $\frac{64u^2v^3(7u-9v)^3}{28u^2-36uv}:(392u^4v^2-648u^2v^4);$

12. $\frac{(x-1)^2(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2-1)(x-2)}:(x^2-1)(x-2);$

13. $\frac{72a^2uv^3(12ax+13uv)^2}{96a^2x^2v+88axuv^2}:(108a^2xuv^2+117au^2v^3);$

14. $\frac{(60a^3b^2x-48a^2b^3x^2)(3b-4ax)^2}{18b^2x-24abx^2}:4ab(5a-4bx)^2;$

15. $\frac{18b+6b^2}{3a+6}:(6+2b)-\frac{6ab^3-4ab^2}{6b^2-4b}:(a^2-2a)$
$+\frac{36ab^3+18ab^2}{6a^2b-12ab}:(3ab+6b);$

16. $\frac{12x-60}{7x-42}:(2x-10)-\frac{7x^2+7x-84}{2x^2-20x+42}:(4x+16)$
$+\frac{8x^2-16x-192}{3x-18}:(3x^2-12x-96).$

---

17. n Dinge sind zusammen so viel wert, als der a^{te} Teil von b Mark; was gilt ein Ding?

18. k ℳ Kapital tragen in n Jahren z ℳ Zins; welchen Zins trägt 1 ℳ Kapital in 1 Jahr?

19. Arbeiter fertigen in b Tagen m Stücke; wie viel fertigt 1 Arbeiter in 1 Tag?

20. Man drücke algebraisch aus, daß die Größe x c mal kleiner ist als der b^{te} Teil von a.

21. Man stelle eine Größe dar, welche n mal kleiner ist als die Summe (Differenz) aus dem r^{ten} Teil von a und dem s^{ten} Teil von b.

Aufl.: **13.** $\frac{12ax+13uv}{x(12ax+11uv)}$; **14.** $\frac{a(3b-4ax)}{3(5a-4bx)}$; **15.** $\frac{1-2b}{a^2-4}$;
16. $\frac{439x^2-6130x+21840}{504(x-6)(x-7)(x-8)}$.

28.

I. $\mathbf{a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}}$.

Eine Zahl wird mit einem Quotienten multiplizirt, indem man die Zahl mit dem Dividenden multipliziert und das erhaltene Produkt mit dem Divisor multipliziert.

Die Aufstellung dieses Gesetzes ist (obwohl es ähnlich **26** ist) notwendig, weil die Operation des Multiplizierens nur für einen ganzzahligen Multiplikator definirt ist und auch das Gesetz der Vertauschbarkeit der Faktoren nur unter derselben Voraussetzung gültig bewiesen ist.

Die Bedeutung von $a\cdot\frac{b}{c}$ ist, daß a multipliziert werden soll mit einer Zahl die c mal kleiner ist als b; also erhält man eine Größe die c mal kleiner ist als das Produkt ab.

Beweis. Man multipliziert beiderseits mit c. Da $a\cdot\frac{b}{c}$

$= \frac{ab}{c} = \frac{b}{c} \cdot a$, so sind die Faktoren auch dann vertauschbar, wenn der eine ein Quotient ist.

II. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a:d}{b:d}$.

Zwei Quotienten werden mit einander multipliziert, indem man das Produkt der Dividenden durch das Produkt der Divisoren dividiert. (Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert und das erste Produkt durch das zweite dividiert. Formuliere auch die zweite, seltener zur Anwendung kommende Form).

Umgekehrt. Ein Quotient, dessen Dividend und Divisor Produkte sind, kann in ein Produkt zweier Quotienten verwandelt werden, indem man je einen Faktor des Dividenden durch je einen Faktor des Divisors dividiert und die erhaltenen Quotienten mit einander multipliziert.

1. $18 \cdot \frac{3}{7}$; $5 \cdot \frac{11}{12}$; $9 \cdot 3\frac{1}{2}$; $24 \cdot \frac{61}{72}$; $32 \cdot \frac{111}{1024}$; $104 \cdot \frac{5}{8}$;

2. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$; $\frac{11}{17} \cdot \frac{3}{2}$; $2\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{3}$; $3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{7}{9}$; $5\frac{5}{24} \cdot 9\frac{3}{5}$; $4\frac{5}{7} \cdot 15\frac{13}{22}$; $(\frac{3}{4})^2$; $(\frac{5}{7})^2$; $(1\frac{1}{2})^2$; $(1\frac{2}{3})^2$; $(2\frac{3}{5})^2$;

3. $\frac{ab}{a+b} \cdot \frac{cx}{a-b}$; $\frac{9a^2b}{4x-2} \cdot \frac{8x-4}{3ab^2}$; $\frac{x^2-x^3}{x^4+x^5} \cdot \frac{x^3-x^5}{(1-x)^2}$;

4. $\frac{6a^2bx^3}{7u^2v} \cdot \frac{21bu^3}{8a^2x^2v}$; $\frac{24a^3b}{35xy^2} \cdot \frac{7xy}{6a^2b}$;

5. $\frac{55}{72} \cdot 1\frac{1}{35} \cdot 2\frac{6}{11}$; $7\frac{1}{32} \cdot 2\frac{26}{27} \cdot 2\frac{2}{35}$; $5\frac{17}{33} \cdot 15\frac{45}{52} \cdot 1\frac{31}{105}$;

6. $\frac{9a^3x}{14u^2v^3} \cdot \frac{35av^4}{12x^5u} \cdot \frac{8x^4u^3}{25a^5v}$;

7. $\frac{5(a+u)}{6(b-v)} \cdot \frac{9(u+v)}{7(a+u)} \cdot \frac{8(b-v)}{15(u+v)}$;

8. $\frac{16x-20}{9x-12} \cdot \frac{18x-24}{10x-15} \cdot \frac{4x-6}{12x-15}$;

9. $\frac{a^2ux+au^2}{av^2x+a^2v} \cdot \frac{a^2uv+av^2}{ax^2u+xu^2} \cdot \frac{ax^2v+a^2x}{a^2u^2+auv}$;

10. $\frac{24a^4b-54a^2b^3}{54a^2b^4-72a^4b^2} \cdot \frac{24a^2b+12ab^3}{18a^2b-27ab^2} \cdot \frac{24ab^4-32a^3b^2}{32a^3b^2+48a^2b^3}$;

11. $\frac{5x-55}{6x-15} \cdot \frac{4x-10}{5x-60} - \frac{10x-18}{4x-40} \cdot \frac{8x-72}{25x-45}$;

12. $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-2b}{a+2b}\right) \cdot \frac{a+2b}{a+b} - \frac{a+2b}{a-b} \cdot \frac{a+b}{a-2b}$;

13. $\left(\frac{a^3}{b^2} - \frac{a}{b} + \frac{b}{a^2} - \frac{b^3}{a^5}\right) \cdot \frac{a^2}{b}$;

14. $\left(\frac{x^3}{y^2} - \frac{x}{y} - \frac{1}{x} + \frac{y}{x^3}\right)\frac{y}{x} - \left(x + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^3} - \frac{y^3}{x^5}\right)\frac{x}{y}$;

15. $\left(\frac{a^3b^2}{x^3y^2}-\frac{a^2}{bxy^2}\right)\left(\frac{xy^6}{a^2b^2}+\frac{b^3y}{ax}\right)$; $\left(\frac{a+x}{x}+\frac{2x}{a-x}\right)\cdot\frac{a-x}{a^2+x^2}$;

16. $\left(\frac{3}{5}\frac{a^3}{xy}-\frac{7ax^2}{4y^4}\right)\cdot\left(\frac{8}{3}\frac{ay^2}{x^2}-\frac{10}{3}\frac{x}{ay}\right)$;

17. $\left(\frac{12ux}{v^3y^2}+\frac{15u^2y}{v^2x}-\frac{18u^3y^4}{vx^3}\right)\left(\frac{vx}{uy}-\frac{5y^2v^2}{6x}\right)$;

18. $\left(\frac{4x}{5b^2y}-\frac{5a}{6b}-\frac{8a^2y}{9x}\right)\left(\frac{5bx^2}{6y^2}+\frac{9axb^2}{8y}\right)$;

19. $\left(\frac{25}{a^4xy^2}+\frac{27}{a^3x^2y}+\frac{30}{a^2x^3}\right)\left(\frac{ax}{5y}-\frac{a^2}{6}-\frac{a^3y}{9x}\right)$;

20. $\left(\frac{9a^2y^3}{16x^5}+1\frac{1}{4}\frac{ab^2}{x^3}+\frac{25b^4}{36xy^3}\right)\left(\frac{9y^2}{16ab^3}-\frac{5x^2}{4a^2by}+\frac{25bx^4}{36a^3y^4}\right)$;

---

21. $\left(\frac{4a^2}{9b^2}-\frac{4x}{3b}+\frac{4x^2}{a^2}\right)\left(\frac{2a}{3b}+\frac{2x}{a}\right)-\left(\frac{2a}{3b}+\frac{2x}{a}\right)\left(\frac{2a}{3b}+\frac{2x}{a}\right)\cdot\frac{2a}{3b}$;

22. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)+\left(2+\frac{a}{b}\right)\left(3-\frac{a}{b}\right)$;

23. $\left(\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}\right)\cdot\frac{2x}{x+1}+\left(\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}\right)\cdot\frac{2x}{x-1}$;

24. $\left(\frac{x+2}{3x}-\frac{2x+3}{3x+2}+\frac{x+3}{2x}\right)\frac{3x+2}{6x}-\left(\frac{x-3}{2x}+\frac{3x-2}{2x-3}-\frac{x-2}{3x}\right)\frac{2x-3}{6x}$;

25. Wenn man $\frac{a}{b}$ vom Inhalt eines Sackes, der n Nüsse enthält, nehmen darf, wieviel Nüsse bekommt man?

26. Man drücke algebraisch aus, daß eine Strecke x um die Hälfte der Strecke a kleiner ist als $\frac{b}{c}$ der Strecke 1.

27. Man schreibe algebraisch an, daß $\frac{n}{x}$ der Größe a um $\frac{r}{x}$ der Größe b größer sind als die Größe c.

28. Wie wird eine Größe dargestellt, welche c mal kleiner ist als $\frac{n}{r}$ von a?

29.

I. $a:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}=a\cdot\frac{c}{b}$.

Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividiert, indem man die Zahl mit dem Dividenden dividiert und den erhaltenen Quo=

tienten mit dem Divisor multipliziert, oder indem man die Zahl mit dem umgekehrten, umgestürzten Quotienten, dem reciproken Wert des Quotienten, multipliziert.

Umkehrung (bloß in folgender Form von einiger Wichtigkeit). Anstatt eine Zahl mit einem Quotienten zu multiplizieren, kann man sie mit dem reciproken Wert des Quotienten dividieren.

Beweis. Man multipliziert beiderseits mit $\frac{b}{c}$.

II. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} = \frac{a:c}{b:d}$.

Zwei Quotienten werden durch einander dividiert, indem man den ersten mit dem reciproken Wert des zweiten multipliziert (oder?)

Umgekehrt. Anstatt zwei Quotienten mit einander zu multiplizieren, kann man auch den einen mit dem reciproken Wert des andern dividieren.

1. $2 : \frac{3}{4}$; $10 : \frac{3}{5}$; $24 : \frac{6}{7}$; $39 : 6\frac{1}{2}$; $45 : 2\frac{1}{7}$; $80 : 5\frac{1}{3}$;

2. $\frac{4}{3} : \frac{5}{7}$; $\frac{6}{7} : \frac{9}{10}$; $\frac{21}{44} : \frac{28}{55}$; $\frac{51}{80} : \frac{85}{112}$; $\frac{77}{120} : \frac{88}{135}$; $\frac{72}{125} : \frac{96}{175}$;

3. $4\frac{2}{3} : 5\frac{1}{4}$; $2\frac{2}{15} : 8\frac{8}{9}$; $2\frac{22}{25} : 2\frac{26}{25}$; $11\frac{1}{12} : 11\frac{11}{18}$; $4\frac{19}{20} : 4\frac{17}{25}$;

4. $2a^2b : \frac{4a^3}{bx}$; $(12a^3x^2 + 28abx^3) : \frac{24a^5bx + 56a^3b^2x^2}{6ab^2}$;

5. $(30a^2b^3x - 55a^5b) : \frac{360\,ab^6x^3 - 1210\,a^7b^2x}{48\,b^3x^3 + 88\,a^3bx^2}$;

6. $\frac{27a^2x^3}{20y^2} : \frac{36a^4}{25xy^3}$; $\frac{6a - 6b}{5a + 10b} : \frac{9a - 9b}{20a + 10b}$;

7. $\frac{42a^3m^5n^7}{55x^{14}y^3z^8} : \frac{77m^7y^2n^4}{25a^2x^{11}z^{10}}$; $\frac{5(a+2b) - 7x(a+2b)}{3(a-3b) + 4x(a-3b)} : \frac{a+2b}{a-3b}$;

8. $\frac{3x(a-x) - 4y(a-x)}{4x(a+x) - 3y(a+x)} : \frac{a-x}{4x-3y}$; $\frac{1 - x - x^2 + x^3}{1 - y + y^2 - y^3} : \frac{1-x}{1-y}$;

9. $\frac{56a^3b + 72a^2b^2x}{75ab^2x - 108a^5x^3} : \frac{42ab^2x^2 + 54b^3x^3}{45ab^2x - 54a^3bx^2}$;

10. $\frac{x(1+x)^2}{x^3 - x^5} : \frac{x^3 + x^4}{x^2(1-x)^2}$; $\frac{x^5y^3 - x^3y^4}{x^3y^3 - xy} : \frac{x^6y - x^2y^3}{x^4y^3 - x^3y^2}$;

11. $\left(\frac{6a^3}{7x^2y^2} - \frac{7ax}{8y} + \frac{8x^3y}{9a^2}\right) : \frac{3a^2}{4xy^2}$;

12. $\left(\frac{a^3}{b^5} - \frac{2a}{b^2} + \frac{3}{ab} - \frac{4b^3}{a}\right) : \frac{6a^2}{b}$;

13. $\frac{6a^4b^2 + 24a^3b^3 + 24a^2b^4}{36x^3y^3 - 24x^2y^4 + 4xy^5} : \frac{3a^2b^2}{2xy^2}$;

14. $\left(\frac{200x}{21ab^3} - \frac{27a^5b}{7x^5}\right) : \frac{30a^2b}{7x^2} - \left(\frac{5x^2}{6ab^3} - \frac{3a^2}{4bx}\right)\left(\frac{6ab}{5x^2} + \frac{8x}{3a^2b}\right)$;

15. $\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$; $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} : \frac{e}{f}\right)$; $\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} : \frac{e}{f}\right)$;

16. $\frac{175a^2x^3y^5 - 63a^4xy^3}{220ax^4y + 180a^2x^3y^2} : \left(\frac{35a^2xy^3 - 63ax^2y^2}{88\,a^2x^2y^2 + 72\,a^3xy^3} \cdot \frac{2a^2x^2y^2(5xy - 3a)^2}{25a^4x^2y^2 - 45a^3x^3y}\right)$;

17. $\frac{6a^3b}{5x^4} \cdot \left(\frac{10b^3}{9ax^2} : \frac{4a^2b^2}{3x^3}\right)$; $\frac{a^2 - ab}{ab + b^2} : \left(\frac{a^2b}{a+b} \cdot \frac{a-b}{ab^2}\right)$;

18. $\frac{x^5y^4}{a^2z^3} : \left(\frac{ay^2}{x^2z} : \frac{a^4z^2}{x^6y^3}\right)$; $\frac{a^2b}{x^2} \cdot \left(\frac{b^2}{ax^2} : \left(\frac{a^2b^2}{x} \cdot \frac{b}{ax}\right)\right)$;

19. $\frac{(a-b)^2}{ab+b^2} : \left(\frac{a^2b - b^3}{2a^2 - 4ab} : \left(\frac{3ab + 6b^2}{3ab - 3b^2} \cdot \frac{(a+b)^2}{2\,a^2 - 8\,b^2}\right)\right)$;

20. $\frac{10ax^2}{63b^2} \cdot \left(\frac{99x}{40ab^4} : \left(\frac{55x}{72a^2b^3} : \frac{35b^3}{18a^2x^2}\right)\right)$;

21. $\frac{1}{x} : \left(\frac{x^2}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{x^3} : \frac{1}{xy}\right)\right)$; $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{a-x}{a}\right) : \frac{a^2 + bx}{b^2}$;

22. $\frac{a^2}{bx^3} : \left[\frac{x^2}{a^3b} \cdot \left(\left(\frac{a^2}{b^2x} : \frac{x^2}{ab}\right) \cdot \frac{a^2b}{x^3}\right)\right]$;

23. $\frac{35}{102} \cdot \left[\frac{52}{63} : \left(\frac{26}{27} \cdot \left(\frac{9}{56} : \frac{153}{280}\right)\right)\right]$;

24. $\frac{2}{x} : \left[\left(\frac{yz}{2x} : \left(\frac{3}{2x} : \frac{6}{xy}\right)\right) \cdot \frac{2x}{z}\right]$;

25. $\frac{3}{2y}\left[\frac{x}{6} : \left(\frac{3}{2y^2}\left(\left(\frac{a}{6} \cdot \frac{3x}{2}\right) : \frac{3a}{2}\right)\right)\right]$;

26. $\frac{21a^3 + 7a^2x}{3a^2(a+2x)^2} \cdot \frac{a^2x + 2ax^2}{63a^3x - 7ax^3} - \frac{8a^3 - 16a^2x}{10a^2(3a-x)^2} : \frac{16a^3x - 64ax^3}{15a^2x - 5ax^2}$;

27. $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}$; $\dfrac{\frac{a}{2} + \frac{x}{3}}{\frac{a}{4} - \frac{x}{3}}$; $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$; $\dfrac{1 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}$; $\dfrac{b - \frac{1}{a}}{b + \frac{1}{a}}$;

28. $\dfrac{\frac{4}{3}a + \frac{3}{2}b}{\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b}$; $\dfrac{\frac{2x}{3yz} + \frac{5y}{7x^2}}{\frac{2x}{5yz} + \frac{5y}{9xz}}$; $\dfrac{\frac{1}{14x^3} - \frac{b}{6a^2x^2}}{\frac{5x}{84ab^2} + \frac{b}{10a^2x}}$;

29. $\dfrac{\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4\,x}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{2}{x}}{\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{8x}}$; $\dfrac{1 + \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}} : \dfrac{\frac{b}{a} + 1}{\frac{b}{a} - 1}$;

30. $\dfrac{2-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{3a+5b}{a+b}-2}$; $\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1-x}}$; $\dfrac{\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{2a+b}}{\dfrac{2}{b}+\dfrac{6}{a-2b}}$;

31. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-1}}$; $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+3}}}$; $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}}}$;

32. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}$; $\dfrac{\dfrac{1}{4bc}-\dfrac{1}{8ac}-\dfrac{a}{12bc}+\dfrac{1}{24c}}{\dfrac{1}{2cx}-\dfrac{1}{6ax}-\dfrac{a}{6cx}+\dfrac{1}{18x}}$;

Aufl.: **16.** $\dfrac{a^3y(5xy+3a)}{x^2(5xy-3a)}$; **19.** $\dfrac{a}{b^2}$; **20.** 1; **21.** $\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{b}{a}$; **22.** x; **23.** 1; **24.** $\dfrac{1}{2x}$; **25.** y; **26.** $\dfrac{1}{12(3a-x)(a+2x)}$; **29.** $\dfrac{4x}{3(2+x)}$; 1; **30.** 1; $\dfrac{x(1-x)}{1+x}$; $\dfrac{b(a-2b)}{a(2a+b)}$; **31.** $\dfrac{x-1}{2x-1}$; $\dfrac{x+2}{x+1}$; $\dfrac{2-x}{2+x}$; **32.** $\dfrac{a^2+2ab}{a^2+b^2}$; $\dfrac{3x(2a-b)}{4b(3a-c)}$.

---

33. Welche Größe ist a mal kleiner als c; welche ist a mal kleiner als $\dfrac{b}{c}$; welche ist $\dfrac{a}{b}$ mal größer als c, welche ist $\dfrac{a}{b}$ mal kleiner als c.

34. Wievielmal ist a größer als b; wievielmal ist $\dfrac{a}{b}$ größer als x; wievielmal ist a größer als $\dfrac{x}{c}$; wievielmal a kleiner als m; wievielmal $\dfrac{a}{x}$ kleiner als c; wievielmal m kleiner als $\dfrac{c}{s}$; wievielmal $\dfrac{a}{b}$ größer als $\dfrac{c}{d}$; wievielmal $\dfrac{m}{x}$ kleiner als $\dfrac{u}{y}$?

35. Wievielmal sind $\dfrac{c}{x}$ der Größe a größer als $\dfrac{d}{y}$ der Größe b; wievielmal sind sie kleiner?

36. Wievielmal muß man $\dfrac{m}{r}$ größer machen, damit es gleich s wird? Wievielmal muß man a kleiner machen, damit es gleich $\dfrac{r}{x}$ wird? Wievielmal muß man $\dfrac{a}{c}$ kleiner machen, damit es

gleich d wird? Wievielmal muß man x größer machen, damit es gleich $\frac{r}{y}$ wird?

37. Wenn a $\frac{x}{y}$mal größer ist als b, wievielmal ist b größer als a, b kleiner als a, a kleiner als b?

38. Stelle eine Größe dar, welche $\frac{n}{r}$mal kleiner ist als die Summe der Größen x und y.

39. Wievielmal ist die Größe $1+\frac{1}{x}$ größer als die Größe $1-\frac{1}{x}$; wievielmal ist sie kleiner?

30.

Vermischte Beispiele zur Übung und Repetition.

1. $\left(\frac{23x}{160c^2}+\frac{c}{2bx}\right):\frac{3bx^4}{20c^5}+\left(\frac{3x}{4bc}+\frac{5c^2}{4b^2x}\right)\cdot\left(\frac{5bc}{6x^2}-\frac{8c^4}{3x^4}\right)$;

2. $\left(\frac{1}{2cx}+\frac{2c}{3bx^2}\right):\frac{3bx+4c^2}{7bc+4x}+\left(\frac{1}{2b^2c}-\frac{1}{4bx}\right):\frac{3x}{2b}$;

3. $\left(\frac{2b+3c}{2b^2}-\frac{2b+3c}{3c^2}\right):\frac{2b+3c}{6bc}-\left(\frac{c}{b}+1\right):\frac{c}{3(c-b)}$;

4. $\frac{a-b}{a+2b}:\left(\frac{a-b}{a+2b}+\frac{b-a}{2a+b}\right)+\frac{12a^2b^2-30ab^3}{45a^3b-60a^2b^2}:\frac{4ab^2-4b^3}{30a^2b-40ab^2}$;

5. $\left(\frac{4ax-7y}{3ax-2y}+\frac{3y-5ax}{3ax+2y}\right):\frac{5axy}{9a^2x^2-4y^2}+\frac{2ax-3y}{5ay}\cdot\frac{ax+y}{3x}$;

6. $\frac{2a-x}{3a+x}\cdot\frac{6a+2x}{10a-15x}-\frac{4a-5x}{3a-2x}:\frac{8a-12x}{15a-10x}+\frac{5a-6x}{6a-9x}$;

7. $\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x^2}\right)\frac{4-4x}{2+x}+\left(\frac{2}{1-x}-\frac{3}{1+x}\right):\frac{4+2x}{3+3x}$;

8. $\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2+2}{1-x^2}\right)\frac{1-x}{2-x}+\frac{3-x}{2-x}-\frac{1-x}{1+x}$;

9. $\frac{57a^4}{22x^3}:\left[\left(\frac{68a^2}{65x^2}\cdot\frac{76x^4}{77a^3}\right)\cdot\left(\frac{15a^2}{34x^5}:\frac{12}{91a^2x}\right)\right]$;

10. $\frac{x}{ay}:\left[\left(\left(\frac{x^2}{ay}:\frac{y^2}{ax}\right)\cdot\frac{y}{a^2x}\right):\frac{y}{ax}\right]$;

11. $\frac{7}{a}:\left[\left(\frac{9}{xy}:\left(\frac{a^2}{11y}\cdot\frac{y}{7x}\right)\right)\cdot\left(\frac{x}{11}:\frac{9}{y}\right)\right]$;

12. $\frac{5a^2}{12x} : \left[\frac{4a^4}{9x^5} \cdot \left(\left(\frac{15x^6}{14a^3} : \frac{6b}{11x^2}\right) \cdot \frac{21a}{44x^4}\right)\right];$

13. $\frac{a^4b - 2a^3b^2}{a^2(a-b)^2} : \left[\left(\frac{a(a-2b)^2}{a^5 - a^3b^2} : \frac{a^2b^2 - ab^3}{ab^2 + b^3}\right) \cdot \left(\frac{a^5b - a^4b^2}{b^3(a+b)^2} \cdot \frac{a^3b^3 + a^2b^4}{a^3 - 2a^2b}\right)\right];$

14. $\frac{45a^4 - 80a^2b^2}{12a^3b^2 - 6a^2b^3} : \frac{20a(3a-4b)^2}{24a^3b - 6ab^3} - \frac{8ab(5a-6b)^2}{54a^3 - 72a^2b} \cdot \frac{15a^3 + 18a^2b}{100a^3b - 144ab^3};$

15. $\frac{2}{2-x} - \left(\frac{3}{2-x} - \frac{4}{3-x}\right) \cdot \frac{3-x}{4-x};$

16. $\frac{49a^2}{120b^4} : \left[\left(\frac{55a^2}{36b^3} \cdot \frac{21b^2}{16a^3}\right) : \left(\frac{44b^5}{7a^2} : \frac{24b^5}{25a^3}\right)\right];$

17. $\frac{3a^2 + 9ab}{7a^2b} : \left[\left(\frac{2ab - b^2}{5b^2} : \frac{3ab^2 + 3b^3}{a^2}\right) : \left(\frac{7ab^2}{5a + 15b} \cdot \frac{4a^3 - 2a^2b}{9b^3}\right)\right];$

18. $\frac{\frac{18bx}{35a^2} - \frac{5a^2}{14bx^3}}{\frac{ax}{b} + \frac{9b}{7a}} \cdot \frac{\frac{7ax}{3b^2} + \frac{3}{a}}{\frac{2x}{5a} - \frac{a}{3bx}};$

19. $\frac{\frac{a}{2b^2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2a}}{\frac{a}{4b^3} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}} \cdot \frac{\frac{1}{4ab} - \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a^3}}{\frac{1}{2b} + \frac{1}{a} + \frac{b}{2a^2}};$

20. $\frac{\frac{z}{6x^3y} + \frac{2}{9y^3}}{\frac{2y}{33x^4z} - \frac{z}{21x^2y^2}} \cdot \frac{\frac{7y^2}{33x^2z^4} - \frac{1}{6yz^2}}{\frac{1}{12xyz} + \frac{x}{8y^2z^3}};$

21. $\frac{\frac{1}{12ab} - \frac{1}{9a^2}}{\frac{1}{8b^2} + \frac{1}{6ab}} : \frac{\frac{1}{2b} - \frac{3}{5a}}{\frac{1}{4ab^2} - \frac{1}{3a^2b}};$

22. $\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} - 1 - x} : \frac{\frac{1}{x} - x}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}; \quad \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{o}} : \frac{\frac{1}{o} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{x}};$

23. $$\frac{\frac{9}{55y}-\frac{b}{7ax}}{\frac{3a}{7bx}+\frac{11}{15y}}:\frac{\frac{4x}{165by}-\frac{2}{77a}}{\frac{y}{7bx}+\frac{11}{45a}};$$

24. $$\frac{x-\frac{1}{3}}{x-\frac{7}{4}}:\left(\frac{3x-\frac{1}{3x}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1-\frac{x}{2}}{\frac{4}{7}-\frac{1}{x}}\right);$$

25. $$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{4x}-\frac{1}{2x^2}}:\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{4x}-\frac{1}{3x^3}}:\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}}\right);$$

26. $$\frac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}}{\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-2b}};\quad \frac{\frac{3a+2b}{2a+2b}+1}{\frac{2a+3b}{3a+b}+1};\quad \frac{\frac{x+2y}{2x-y}+\frac{1}{15}}{\frac{3x+11y}{4x-2y}+\frac{2}{3}};$$

27. $$\frac{\frac{4a}{25bx^2}-\frac{b}{4a^3}}{\frac{4x}{11b^3}-\frac{1}{3abx^2}}\cdot\frac{\frac{2a}{3b}+1}{\frac{a}{5b^2}-\frac{x}{4ab}}:\frac{\frac{1}{5x^2}+\frac{b}{4a^2x}}{\frac{3x}{11b^3}-\frac{1}{4abx^2}};$$

28. $$\frac{\frac{3}{4x+3y}+\frac{1}{4x+6y}}{\frac{9}{2}-\frac{2x-3y}{4x+4y}}\cdot\frac{\frac{21x-22y}{x+y}-3}{\frac{x-2y}{4x+3y}-\frac{1}{7}};$$

29. $$\frac{\frac{x}{x+y}-\frac{2}{3}}{\frac{x^2-2y^2}{3x-3y}-\frac{x+y}{15}}\cdot\frac{2-\frac{y}{x-y}}{5(x-y)-\frac{5x^2-14y^2}{6x+6y}};$$

30. $$\frac{4}{3-\frac{2}{1+\frac{1}{x-2}}};\quad \frac{3}{4-\frac{3}{2+\frac{3}{\frac{1}{x}-1}}};\quad \frac{x}{x-\frac{x-1}{x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}}};$$

31. $$\left(1+\frac{7-x}{3x-4}\right):\left(1-\frac{x-1}{3x-4}\right)$$
$$-\left(2+\frac{4-5x}{4x-3}\right):\left(2-\frac{5x-8}{4x-3}\right);$$

32. $\left(\frac{3x+1}{2x+5}-1\right):\left(\frac{1-2x}{3x-5}+1\right)$
$-\left(\frac{3-3x}{3x-4}+2\right):\left(\frac{7x+5}{2x+5}-2\right)$;

33. $\left(\frac{4x+10}{2x+3}-2\right):\left(\frac{x+2}{x-2}+2\right)$
$-\left(\frac{5-2x}{2x-3}+1\right):\left(\frac{5x-7}{2x-5}-1\right)$;

34. $\dfrac{\frac{4x+7}{4x+5}-1}{\frac{2x}{2x-3}+1}+\dfrac{\frac{5x+1}{5x-4}-1}{\frac{x-6}{x+1}+3}$;

35. $\left(\frac{4a}{2a-b}-1\right):\left(1-\frac{2b}{a+b}\right)-\left(1-\frac{b}{a+2b}\right):\left(\frac{a+b}{a-2b}+1\right)$;

36. $\dfrac{\frac{10b-5a}{4a-7b}+2}{\frac{b-2a}{3b-5a}+1}-\dfrac{\frac{4b-11a}{4b-7a}-2}{\frac{b-6a}{3b+5a}+2}+\dfrac{\frac{7a+3b}{4a+7b}-1}{\frac{a-2b}{5b-3a}-1}$;

37. $\left(1-\frac{3a-b}{4a+3b}\right)\cdot\dfrac{\frac{2a}{2a+3b}+1}{\frac{4a+2b}{2a-b}-2}-\left(\frac{a-b}{2a-3b}+1\right)$
$:\left[\left(\frac{a}{a-4b}-1\right):\left(\frac{3b-a}{3a-4b}+1\right)\right]$;

38. $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}-\left(\frac{2x}{x+1}-1\right):\left(1-\frac{1}{x}\right)+\dfrac{\frac{1-x}{1+x}+x}{\frac{x+1}{x-1}+x}:(x-1)$;

39. $1+\frac{5}{x-3}-\left(1+\frac{x-7}{x+2}\right):\left(1-\frac{5}{x+2}\right)$
$+\left(x-\frac{3x+6}{x+4}\right):\left[\left(1-\frac{1}{x+4}\right)\left(x+\frac{6-x}{x-4}\right)\right]$;

40. $\dfrac{\frac{1}{15x}-\frac{1}{10c}-\frac{y}{15ax}+\frac{y}{10ac}}{\frac{c}{4xy}+\frac{1}{6a}-\frac{1}{6y}-\frac{c}{4ax}}$;

Aufl.: 1. $\frac{5}{8x}$; 2. $\frac{bc+x}{bcx^2}$; 3. $\frac{b}{c}$; 4. 4;

5. $\frac{-7a^2x^2+17axy-63y^2}{15axy}$; 6. $\frac{231x-152a}{60(2a-3x)}$; 7. $\frac{5+20x-x^2}{2(1-x^2)(2+x)}$;

8. $\frac{-x^2+5x-1}{(2-x)(1+x)}$; 9. $\frac{3a}{4x}$; 10. $\frac{y^2}{x^2}$; 11. $\frac{a}{x}$; 12. b; 13. $\frac{a+b}{a-b}$;
14. $\frac{18a^2+13ab+36b^2}{12b(3a-4b)}$; 15. $\frac{7-3x}{(2-x)(4-x)}$; 16. $\frac{4a^4}{3b^3}$; 17. $2b(a+b)$;
18. $\frac{6bx^2+5a^2}{2abx^2}$; 19. $\frac{b}{a}$; 20. $\frac{14(3y^2z+4x^3)}{3(2yz^2+3x^2)}$; 21. $\frac{5(3a-4b)^2}{9a^2(3a+4b)(5a-3b)}$;
22. $\frac{1}{x^2(1+x)}$; $\frac{o^2(s-r)(x-s)}{s^2(o-r)(x+o)}$; 23. $\frac{by(63ax-55by)}{2ax(14ax-15by)}$; 24. $\frac{4(2+x)}{7x(3x+1)}$;
25. $\frac{2(3x+2)}{x^2(3x-2)}$; 27. $2a+3b$; 28. $\frac{14(18x-25y)}{(2x+3y)(3x-17y)}$;
29. $\frac{30(x-2y)}{(2x+3y)(25x^2-16y^2)}$; 30. $\frac{4(x-1)}{x+1}$; $\frac{3(2+x)}{5+7x}$; x^2;
31. $\frac{26x}{(2x-3)(3x+2)}$; 32. $\frac{5x^2-47x-5}{(2x+5)(3x-4)}$; 33. $\frac{54-20x}{(4x^2-9)(3x-2)}$;
34. $\frac{40x^2-x+49}{(4x+5)(5x-4)(4x-3)}$; 35. $\frac{a(a+b)(a+8b)}{(a-b)(2a-b)(a+2b)}$;
36. $\frac{(3a-4b)(-19a^2-47ab+62b^2)}{(4a-7b)(4a+7b)(4b-7a)}$; 37. $\frac{5a(2a-b)}{2(4a^2-9b^2)}$; 38. 0;
39. $\frac{3}{x-3}$; 40. $\frac{2y(2c-3x)}{5c(3c-2x)}$.

31.

Division zweier Polynome.

Sollen zwei mehrgliedrige Ausdrücke durch einander dividiert werden, so müssen sie zuerst geordnet werden; man nimmt hiezu eine im Polynom vorkommende Buchstabengröße und ordnet die Glieder nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Faktoren dieser Buchstabengröße und zwar entweder nach steigender oder nach abnehmender, fallender Anzahl. Z. B.:
$a^3b^2+ab^6+a^2b^4+a^4+b^8$ gibt nach fallenden a geordnet:
$a^4+a^3b^2+a^2b^4+ab^6+b^8$, und nach steigenden a geordnet:
$b^8+ab^6+a^2b^4+a^3b^2+a^4$; man sieht daß der Ausdruck jedesmal auch nach b, wenn auch in anderem Sinn geordnet ist. Sind Dividend und Divisor nach derselben Größe und in demselben Sinn geordnet, so verfährt man folgendermaßen: man dividiert mit dem ersten Glied des Divisors in das erste Glied des Dividenden; der Quotient q_1 gibt das erste Glied des gesuchten Quotienten Q; mit q_1 multipliziert man den ganzen Divisor und subtrahiert das erhaltene Polynom vom Dividenden, indem man die Vorzeichen ändert, gleichartige Glieder verbindet und für Beibehaltung der Ordnung sorgt. Das was hiebei herauskommt bildet mit dem noch unbenützten Rest des Dividenden den neuen Dividenden. Das Verfahren wird nun auf dieselbe Weise fortgesetzt: man dividiert wieder mit dem 1. Glied des Divisors in das 1. Glied des Dividenden, fügt den dadurch erhaltenen Quotienten q_2 als zweites Glied dem q_1 hinzu, multipliziert mit q_2 den ganzen Divisor und subtrahiert das erhaltene vom

Dividenden. So fährt man fort, bis bei der Subtraktion 0 überbleibt, oder bis bei der Subtraktion auch das letzte Glied des Zählers zur Vereinigung beigezogen wurde und nicht 0 übrig geblieben ist. Im ersteren Falle geht die Division auf und der aus den Gliedern $q_1 + q_2 + q_3 + \ldots$ bestehende mehrgliedrige Ausdruck ist der richtige Quotient Q. Man hat hiezu nur zu beweisen, daß Q mit dem Divisor multipliziert den Dividenden gibt. Nun hat aber die im Lauf der Operation vollzogene Multiplikation der einzelnen Glieder q mit dem Divisor wirklich den Dividenden gegeben, da die Subtraktion der erhaltenen Polynome vom Dividenden den Rest 0 ergeben hat.

Wenn jedoch nach Benützung des letzten Gliedes des Dividenden nicht der Rest 0 geblieben ist, so geht die Operation nicht auf; man kann zwar das Verfahren fortsetzen, erhält dadurch aber als Quotienten eine unendliche Reihe, deren Betrachtung über den Rahmen der elementaren Mathematik hinausgeht. In einem solchen Falle kann man dann noch nachsehen, ob vielleicht der Divisor, oder der Dividend sich in Faktoren zerlegen läßt, und ob einer dieser Faktoren des Nenners (oder Zählers) im gegebenen Zähler (oder Nenner) enthalten sei.

Beispiele:

$$\frac{2a^2 + 5ab + 6ac + 2b^2 + 3bc}{2a + b} = a + 2b + 3c.$$

$$\begin{array}{ll}
2a^2 + ab & \text{(ist das Produkt aus a mal der Divisor)} \\
(-)\quad(-) & \\
\hline
4ab + \ldots & \text{(dividiert mit 2a gibt + 2b)} \\
4ab + 2b^2 & \text{(ist das Produkt aus 2b mal der Divisor)} \\
(-)\quad(-) & \\
\hline
6ac + \ldots & \text{(dividiert mit 2a gibt + 3c)} \\
6ac + 3bc & \text{(ist das Produkt aus 3c mal der Divisor).} \\
(-)\quad(-) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\frac{x^5 - x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 14x + 5}{x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = x^2 - 4x + 5$$

$$\begin{array}{ll}
x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 & \\
(-)\quad(-)\quad(-)\quad(-) & \\
\hline
-4x^4 - 7x^3 + 23x^2 \ldots & \text{(Div. mit } x^3 \text{ gibt } -4x \\
-4x^4 - 12x^3 + 8x^2 - 4x & \\
(+)\quad(+)\quad(-)\quad(+) & \\
\hline
5x^3 + 15x^2 - 10x \ldots & \text{(Div. mit } x^3 \text{ gibt } +5 \\
5x^3 + 15x^2 - 10x + 5 & \\
(-)\quad(-)\quad(+)\quad(-) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

1. $(ac + bc + ad + bd) : (a + b)$;

2. $(8my + 12xy - 6mz - 9xz) : (4y - 3z)$;

3. $(49ax - 63ay - 77bx + 99by + 105cx - 135cy) : (7x - 9y)$;

4. $(9xu - 22\frac{1}{2}yu - 34zu - 12xv + 30yv + 45\frac{1}{3}zv)$
$: (1\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}y - 5\frac{2}{3}z)$;

5. $\left(\frac{75a}{x} + \frac{135a}{y} - \frac{255a}{z} + \frac{95b}{x} + \frac{171b}{y} - \frac{323b}{z}\right) : (15a + 19b)$;

6. $(9p^2r + 10pqr + 10\frac{1}{2}q^2r - 12p^2s - 13\frac{1}{3}pqs - 14q^2s) : (\frac{1}{2}r - \frac{2}{3}s)$;

7. $(5ax^2 - 50ay^2 + 75az^2 - 10cx^2 + 100cy^2 - 150cz^2)$
$: (x^2 - 10y^2 + 15z^2)$;

8. $\left(\frac{ax}{10} - \frac{4ay}{45} + \frac{2az}{25} - \frac{xb}{12} + \frac{2by}{27} - \frac{bz}{15}\right) : \left(\frac{8a}{5} - \frac{4b}{3}\right)$;

---

9. $(x^2 - 7x + 12) : (x - 3)$; $(x^2 - 2x - 120) : (x^2 + 10)$;

10. $(a^2 + 7ab - 60b^2) : (a - 5b)$; $(1 - 48x + 560x^2) : (1 - 28x)$;

11. $(77x^2 + 34x - 16) : (11x + 8)$;
$(63a^2 + 48ab - 231b^2) : (7a - 11b)$;

12. $(9\frac{1}{3}a^2 - 19\frac{8}{15}ab + 6\frac{9}{10}b^2) : (2\frac{2}{3}a - 1\frac{1}{5}b)$;

13. $(11\frac{11}{15}x^2 + 10\frac{1}{2}xy - 8\frac{7}{16}y^2) : (7\frac{1}{3}x - 3\frac{3}{4}y)$;

14. $(6\frac{7}{8}x^2 - 16\frac{3}{10}ax - 26\frac{22}{25}a^2) : (1\frac{5}{6}x - 6\frac{2}{5}a)$;

15. $(x^3 - 6x^2 + 11x - 12) : (x - 4)$;

16. $(2 + 7x - 29x^2 + 21x^3) : (2 - 3x)$;

17. $(9x^3 - 48x^2 + 97x - 70) : (3x - 5)$;

18. $(352x^3 - 2418x^2 + 2307x + 5814) : (16x - 51)$;

19. $(210y^3 + 7y^2 - 882y + 616) : (15y - 22)$;

20. $(589x^3 + 90x^2 + 74x - 987) : (19x - 21)$;

21. $(20 - 48\frac{5}{12}a + 37\frac{3}{4}a^2 - 21\frac{15}{16}a^3) : (1\frac{1}{7} - 1\frac{13}{14}a)$;

22. $(82\frac{1}{2}a^3 + 19\frac{1}{3}a^2x - 289\frac{1}{2}ax^2 + 177x^3) : (15a - 18x)$

23. $(x^3 - 5x^2 + 11x - 15) : (x^2 - 2x + 5)$;

24. $(91a^3 - 220a^2b - 74ab^2 + 165b^3) : (7a^2 - 11ab - 15b^2)$;

25. $(112a^3 + 374a^2x + 99ax^2 - 247x^3) : (16a^2 + 10ax - 13x^2)$;

26. $(3a^5 + 7a^4 - 41a^3 + 44a^2 - 21a + 10) : (3a - 5)$;

27. $(147a^5 - 420a^4x + 477a^3x^2 - 174a^2x^3 - 426ax^4 + 432x^5)$
$: (21a - 24x)$;

28. $(84a^4x^8 + 143a^3x^6y^2 - 74a^2x^4y^4 - 230x^2y^6 - 99y^8)$
$: (7ax^2 + 9y^2)$;

---

29. $\left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^4}{36} - \frac{3x^3}{4} - \frac{11x^2}{72} + \frac{x}{6} - \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1\right)$;

30. $\left(\frac{24}{x^5} + \frac{2z}{x^4y} - \frac{103z^2}{x^3y^2} + \frac{38z^3}{x^2y^3} + \frac{93z^4}{xy^4} - \frac{54z^5}{y^5}\right)$
$: \left(\frac{4}{x^2} + \frac{5z}{xy} - \frac{6z^2}{y^2}\right)$;

31. $(4 - 10x - 11x^2 + 5\frac{1}{2}x^3 - 2\frac{3}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^5 - x^6)$
$: \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{2} - x^2\right)$;

32. $(12a^6 - 14a^5 + 44a^3 - 58a^2 - 8a + 24) : (4a^2 + 2a - 6)$;

33. $(4x^{14} - 25x^{10} + 10x^8 - 23x^6 + 26x^4 - 13x^2 + 12)$
$: (2x^6 + 5x^4 - x^2 + 3)$;

34. $(x^6 - x^3 - x^2 + 3x - 2) : (x^3 + x - 2)$;

35. $\left(\frac{9a^4}{16x^2} + \frac{11a^2}{4} + 36x^4\right) : \left(\frac{3a^2}{4x} - \frac{5a}{2} + 6x\right)$;

36. $(35a^2 - 4ab + 38ac - 63b^2 + 116bc - 45c^2) : (5a - 7b + 9c)$;

37. $(36a^2b - 45a^2c - 40ab^2 + 97abc + 65ac^2 - 110b^2c - 143bc^2)$
$: 9a - 10b - 13c)$;

38. $(35a^3b + 25a^2b^2 - 56a^3c + 63a^2bc - 64a^2c^2 - 45ab^3 + 62ab^2c$
$+ 140abc^2 + 32ac^3 - 81b^3c - 99b^2c^2 - 36bc^3)$
$: (5ab - 8ac + 9bc)$;

39. $(3a^4 - 4a^3b - 2a^3c - 11a^2b^2 + 10a^2bc + 7a^2c^2 + 16ab^3 - 16ab^2c$
$- 21abc^2 - 4b^4 + 8b^3c + 14b^2c^2)$
$: (3a^2 + 5ab - 2b^2 - 2ac + 4bc + 7c^2)$;

40. $\left(595 + \frac{225}{x} - \frac{1027}{x^2} + \frac{1694}{x^3} - \frac{2567}{x^4} + \frac{1786}{x^5} - \frac{1080}{x^6} + \frac{500}{x^7}\right)$
$: \left(\frac{35}{x} - \frac{30}{x^2} + \frac{24}{x^3} - \frac{20}{x^4}\right)$;

41. $\left(\frac{1}{x^4} - \frac{x^4}{y^4}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y}\right)$;

42. $\left(\frac{x^3}{y^2} - xy^2 + y^4 - \frac{y^8}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{y} - y + \frac{y^3}{x}\right)$;

43. $\frac{8x^4 - 50x^3 - 59x^2 + 104x + 105}{(2x - 3)(4x + 5)(x + 2)(x - 7)}$;

44. $\frac{320a^4 + 656a^3b - 180a^2b^2 - 1025ab^3 - 500b^4}{(16a^2 - 25b^2)(25a^2 - 16b^2)}$.

32.

Allgemeine Beispiele.

1. $\frac{x^3 - 14x^2 + 63x - 90}{x^2 - 7x + 12}$; $\frac{x^3 + x^2 - 102x + 360}{x^2 + 7x - 60}$;

2. $\frac{x^3 + 13x^2 - 10x - 400}{x^2 + 2x - 80}$; $\frac{x^3 - 25x + 182x - 392}{x^2 - 18x + 56}$;

3. $\frac{x^3 - 14x^2 - 32x + 57}{x^2 - 17x + 19}$; $\frac{3x^3 - 18x^2 - 21x + 180}{4x^2 - 4x - 80}$;

4. $\frac{x^2 + x - 42}{x^2 - 2x - 24} - \frac{x^2 - 25}{x^2 - x - 20} + \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$;

5. $\frac{3x^2+3x-60}{4x^2-8x-140}+\frac{5x^2+65x+210}{12x^2-588}-\frac{2x^2-20x+48}{3x^2-39x+126}$;

6. $\frac{x^3-6x^2+13x-10}{x^2-5x+6}-\frac{x^3-9x^2+24x-20}{x^2-9x+20}$;

7. $\frac{x^2}{x+4}+\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2+x-6}-\frac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2+2x-15}$;

8. $\frac{x^4-12x^2+36}{x^3+3x^2-6x-18}-\frac{x^4-25}{x^3-2x^2+5x-10}+\frac{x^4-3x^3+4x^2}{x^3-2x^2+x+4}$;

9. $\frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-14x+24}-\frac{x^2+5x+6}{x^3+4x^2-11x-30}$;

10. $\frac{x^2-4x+3}{x^3-21x+20}-\frac{x^2+5x+4}{x^3-31x-30}+\frac{x^2+3x-10}{x^3-12x^2+44x-48}$;

11. $\frac{x^2-2x-48}{x^3+3x^2+126x-648}-\frac{x^2+7x+12}{x^4+2x^3-12x^2+17x+132}$
$+\frac{x^2+2x-120}{x^3-14x^2-56x+960}+\frac{x^2-7x+9}{x^4-12x^2+55x^2-122x+99}$.

33.

Gemeinschaftlicher Teiler zweier Polynome.

Soll untersucht werden, ob zwei Polynome A und B einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so wendet man folgendes Verfahren an. Man ordnet beide Polynome nach derselben Größe und in derselben Art, dividiert dann mit dem kleineren B in das größere A und erhält einen Quotienten q und einen Rest A_1, so daß $A = Bq + A_1$. Wenn nun A und B einen gemeinschaftlichen Teiler haben so muß derselbe auch in A_1 enthalten sein. Man hat also den gemeinschaftlichen Teiler von B und A_1 zu suchen, und verfährt hiezu ebenso wie vorher; man dividiert mit dem kleineren A_1 in B, erhält einen Quotient q_1 und einen Rest A_2, so daß $B = A_1 \cdot q_1 + A_2$, schließt daß derselbe gem. T. von A_1 und B auch in A_2 enthalten sein muß, sucht also den gem. T. von A_1 und A_2 und fährt so fort, bis entweder einmal die Division aufgeht, oder der Rest 1 bleibt. Im ersten Fall ist der letzte Divisor der Ableitung gemäß der gemeinschaftliche Teiler von A und B; im letzteren Falle haben die Polynome keinen gemeinschaftlichen Teiler.

Beispiel:

$(x^3 - 5x^2 + 10x - 8) : (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 1$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$(-) \quad (+) \quad (-) \quad (+)$

$x^2 - x - 2$;

$$(x^3 - 6x^3 + 11x - 6) : (x^2 - x - 2) = x - 5$$
$$x^3 - x^2 - 2x$$
$$(-) \quad (+) \quad (+)$$
$$-5x^2 + 13x$$
$$-5x^2 + 5x + 10$$
$$(+) \quad (-) \quad (-)$$
$$8x - 16 = 8(x - 2);$$
$$(x^2 - x - 2) : (x - 2) = x + 1$$
$$x^2 - 2x$$
$$(-) \quad (+)$$
$$x - 2$$
$$x - 2$$
$$0$$

Der gemeinschaftliche Teiler beider Polynome ist $x - 2$;

Suche die gemeinschaftlichen Teiler von

1. $x^3 - 8x^2 + 26x - 33$ und $x^3 - 9x^2 + 31x - 44$;
2. $x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10$ und $x^3 + x^2 - 4x - 4$;
3. $x^4 + 4x^3 - 26x^2 + 65x - 50$ und $x^3 + 6x^2 - 17x + 10$;
4. $x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 14x - 20$ und $x^3 - 8x^2 + 20x - 25$;
5. $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 3x^2 + 10x - 16} - \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^3 + x^2 + 6x + 16}$.

5. Abschnitt. Null und negative Zahlen.

34.

Nach **5.** VIII. ist Null gleich einer Differenz, deren Minuend gleich dem Subtrahend. Man beweist folgende Sätze:

I. $\mathbf{a + 0 = a}$; denn $a + 0 = a + (b - b) = a + b - b = a$;

II. $\mathbf{a - 0 = a}$; denn $a - 0 = a - (b - b) = a - b + b = a$;

Eine Zahl bleibt ungeändert durch Addition oder Subtraktion einer Null.

III. $\mathbf{a \cdot 0 = 0}$; denn $a \cdot 0 = a(b - b) = ab - ab = 0$;

IV. $\mathbf{\frac{0}{a} = 0}$; denn $\frac{0}{a} = \frac{b - b}{a} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$.

Null mit einer beliebigen Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert gibt 0.

V. $\mathbf{\frac{a}{0} = \infty}$. Denn $\frac{a}{0}$ kann keine endliche Zahl sein, da jede endliche Zahl, mit 0 multipliziert, selbst 0 gibt; der Wert von $a : 0$ müßte aber, mit 0 multipliziert, a geben; also kann $a : 0$ keinen endlichen Wert haben. Nimmt man statt 0 zuerst eine endliche Größe, etwa 1, nimmt dann statt 1 immer kleinere und kleinere Werte, welche sich immer mehr der 0 als Grenze nähern, bestimmt für alle diese Werte ε die Werte des Bruches $a : \varepsilon$, so zeigt sich,

daß dieselben immer größer werden; man schließt also, daß sie über alle Grenzen wachsen, wenn ε sich der Null als Grenze nähert.

Definition negativer Größen.

Der Begriff des Subtrahierens ist nur definiert unter der Voraussetzung, daß der Subtrahend im Minuend als Summand enthalten, also kleiner als der Minuend sei.

Ist diese Voraussetzung aber nicht erfüllt, so enthält die Aufgabe häufig eine Unmöglichkeit in sich. Während es z. B. möglich ist, aus einem Gefäß, in welchem sich 5 l Flüssigkeit befinden, 3 l herauszunehmen, ist es unmöglich, aus diesem Gefäß 7 l Flüssigkeit herauszunehmen. In manchen anderen Fällen aber scheint uns eine derartige Forderung nicht unmöglich zu sein. Wenn z. B. ein Körper von einem Punkte A aus sich längs einer geraden Linie um 5 m vorwärts bewegt hat, so können wir, wenn er sich von da aus um 3 m rückwärts bewegt, angeben, wie weit er sich dann von A entfernt befinde; aber auch, wenn angegeben wird, daß er sich von da aus um 7 m rückwärts bewegt habe, halten wir es nicht für schwer anzugeben, wie weit er sich nun von A entfernt befinde, nämlich 2 m jedoch rückwärts von A.

Um nun auch solchen Rechnungen gerecht werden zu können, bei denen die Subtraktion eines größeren von einem kleineren gefordert wird, definiert man negative Größen. Man benennt zunächst die schon bekannten durch Zählen von 0 an erhaltenen Zahlen und die zwischen den Werten derselben liegenden gebrochenen Zahlen als positive Zahlen, hat also eine positive Zahlenreihe, welche von 0 ausgeht, immer größere Werte durchläuft und sich ohne Grenze fortsetzen läßt. Eine positive Größe ist also derart von 0 verschieden, daß sie, wenn man von ihr ihren eigenen Wert subtrahiert, wieder 0 gibt.

Man definiert nun eine zweite Reihe von Größen, welche auch von 0 ausgehen, und derart von 0 verschieden sind, daß sie, wenn man zu ihnen eine positive Größe addiert, wieder 0 geben. Man nennt sie negative Größen, mißt sie durch die negative Einheit und bezeichnet sie durch ein ihrer Maßzahl vorgesetztes Minuszeichen.

Eine negative Größe ist also eine Größe, welche, wenn man zu ihr eine bestimmte positive Größe addiert, 0 gibt.

Man sagt: eine negative Größe ist dem Betrage nach gleich einer positiven Größe, wenn beide addiert 0 geben; beide haben dieselbe Maßzahl und können deshalb mit demselben Buchstaben bezeichnet werden; die negative Größe wird aber durch Vorsetzen eines — Zeichens als solche bezeichnet.

Eine negative Größe hat nach der Definition den Charakter

einer Differenz, deren Minuend 0 und deren Subtrahend die ihr gleiche positive Zahl ist.

VI. $-a = 0 - a$.

Wählt man auf einer unbegrenzten Geraden einen beliebigen Punkt als Anfangspunkt und bezeichnet ihn mit 0 und trägt von da aus in der einen Richtung, etwa nach rechts, eine beliebige als Einheit gewählte Strecke beliebig oft ab, so stellen die Endpunkte dieser Strecken durch ihre Abstände vom Nullpunkt das positive Zahlensystem vor, wobei Zwischenpunkte die gebrochenen Zahlen vorstellen. Trägt man nun vom Nullpunkt aus in der andern Richtung der Geraden, also nach links dieselbe als Einheit gewählte Strecke auch beliebig oft auf, so stellen die Endpunkte dieser Strecken durch ihre Abstände vom Nullpunkte das negative Zahlensystem vor. Denn wenn wir ein Gehen nach rechts als Addieren betrachten, so müssen wir ein Gehen nach links als Subtrahieren betrachten. Weil nun die links der 0 liegenden Punkte die Eigenschaft haben, daß man von ihnen aus nach rechts gehen muß (daß man zu ihnen etwas addieren muß), um zur 0 zu gelangen, so repräsentieren sie die negativen Größen. Es ist das eine anschauliche, jedoch nicht notwendige Darstellung der negativen Größen.

Negative Größen haben nicht eine Bedeutung an und für sich, sondern nur im Gegensatz zu positiven Größen.

Die Maßzahl der negativen Größe oder die ihr dem Betrage nach gleiche positive Größe nennt man das Glied der negativen Größe.

Jede Differenz, deren Subtrahend größer ist als der Minuend ist eine negative Größe, deren Glied gleich der Differenz aus dem Subtrahend und Minuend ist.

VII. $a - b = 0 - (b - a)$.

Denn $a - b = (a - a) - (b - a) = 0 - (b - a)$.

Beispiele: $3 - 5 = -(5 - 3) = -2$; $7 - 11 = -4$.

Gesetze für negative Größen.

VIII. $a + (-b) = a - b$.

Denn $a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$;

Zu einer Zahl wird ein negativer Ausdruck addiert, indem man das Glied des negativen Ausdrucks von der Zahl subtrahiert. Umgekehrt. Eine Differenz kann verwandelt werden in eine Summe, indem man zum Minuenden addiert einen negativen Ausdruck, dessen Glied der Subtrahend ist.

IX. $a - (-b) = a + b$.

Denn $a - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b$.

Von einer Zahl wird ein negativer Ausdruck subtrahiert, indem man zur Zahl das Glied des negativen Ausdruckes addiert. Umgekehrt. Eine Summe kann verwandelt werden in eine Dif-

ferenz, indem man vom einen Summanden subtrahiert einen negativen Ausdruck, dessen Glied der andere Summand ist.

Zusatz: $-(-b) = b$.

Die Gesetze VIII und IX folgen der Regel über das Weglassen von Klammern (**9**).

X. $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

XI. $(-a) - (-b) = b - a = -(a - b)$.

Formuliere und beweise selbst, und beachte bei XI: Jede Differenz darf man umkehren, wenn man sie zum Glied eines negativen Ausdrucks macht.

XII. $\mathbf{a + b - c - d + e - f = a + b + (-c) + (-d) + e + (-f)}$.

Jeder mehrgliedrige Ausdruck kann als eine Summe betrachtet werden, indem man die positiven Glieder als positive Größen, die negativen Glieder als negative Größen nimmt.

XIII. $\mathbf{a \cdot (-b) = -ab}$.

Denn $a \cdot (-b) = a \cdot (0 - b) = a \cdot 0 - ab = 0 - ab = -ab$.

Eine Zahl wird mit einem negativen Ausdruck multipliziert, indem man die Zahl mit dem Glied des negativen Ausdruckes multipliziert und das erhaltene Produkt zum Glied eines negativen Ausdruckes macht. Umgekehrt. Ein negatives Produkt kann verwandelt werden in ein Produkt aus einer positiven und einer negativen Größe.

XIV. $\mathbf{(-a) \cdot (-b) = ab}$;

Denn $(-a)(-b) = -(-a) \cdot b = -(-ab) = ab$.

Zwei negative Größen werden mit einander multipliziert, indem man ihre Glieder mit einander multipliziert. Umgekehrt. Ein positives Produkt kann auch als Produkt zweier negativen Größen betrachtet werden.

Die Gesetze XIII und XIV folgen der Zeichenregel über das Auflösen von Klammern (**16**).

XV. $\mathbf{\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}}$; **XVI.** $\mathbf{\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}}$;

XVII. $\mathbf{\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}}$;

Formuliere und beweise selbst.

35.

Beispiele über negative Größen.

1. Man zeige, daß $a + (b - c) = a - (c - b)$;
und $a - (b - c) = a + (c - b)$; und $a \pm b(c - d) = a \mp b(d - c)$;
und $a \pm \frac{b - c}{d} = a \mp \frac{c - b}{d}$; und $a \pm \frac{b}{c - d} = a \mp \frac{b}{d - c}$;

und $(a-b)(c-d) = (b-a)(d-c) = -(a-b)(d-c)$;

und $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c} = -\frac{a-b}{d-c} = -\frac{b-a}{c-d}$;

2. $2a + (-3b) - (-4a) + (7b - (-4a) + (-3b))$;

3. $-6a - [-5a + ((-4b) - (5a - (-3b))) + (-a)]$;

4. $-x - [-(-(-1) + (2 - (3 - 5x))) + ((-2x) + (4 - (-8x)))]$;

5. $-3 + (-5 - (3 - (-2x) + (-4)) + (-4) - (-5 - x))$;

6. $44 - (-33) - (-11 - (-22)) - (22 - (-17 - (-33)))$;

7. $3x + [-(x - (-3 + x)) - (-((x + 2) + (-3)))]$;

8. $-[(-(-x - 4) + (-2 + (2 - 3x))) - (-3 - ((3x - 1) - 1))]$;

9. Berechne $a - (b - c)$ und $a + (b - c)$ und $b + (a - c)$ und $c - (b - a)$ und $b - (c - a)$ für:

α) $a = -18$, $b = 12$, $c = 19$,

β) $a = 8$, $b = -3$, $c = -7$,

γ) $a = -9$, $b = 15$, $c = -18$,

δ) $a = -19$, $b = -3$, $c = 5$.

10. Berechne: $-a + b - (x - y)$ und $a - (b - y) - x$ und $-y - (b + a - x)$ und $-x + (a - y) - b$ für

α) $a = 4$, $b = -12$, $x = 18$, $y = -13$,

β) $a = -11$, $b = 5$, $x = -13$, $y = -9$,

γ) $a = 7$, $b = -2$, $x = 4$, $y = -12$,

δ) $a = -9$, $b = -3$, $x = -8$, $y = 4$.

11. Berechne $a - (y - c) - x$ und $-c - (y + x) + a$ und $x - (y - a) + c$ und $-(x - a) - (c - y)$ für

α) $a = 2$, $c = -1$, $y = 1$, $x = -2$,

β) $a = 3$, $c = 2$, $y = -2$, $x = -3$,

γ) $a = -1$, $c = -2$, $y = -2$, $x = 2$,

δ) $a = -2$, $c = -1$, $y = 2$, $x = -1$.

36.

Multiplikation negativer Größen.

1. $3(-4) - 4(-2) + (-5) \cdot 3 - (-4) \cdot 6 + (-3)(-2) - (-4)(-3) \cdot 2 - (-2)(-3)(-4) + (-3)(-5)(-2)$;

2. $-(-2) \cdot 7 + (-3) \cdot 8 - (-4) \cdot 3 \cdot (-4) + (-2)(-4)(-7) - (-5) + (-2) \cdot 7 - 8(-4)(-1) + (-4) \cdot 3 \cdot (-2)$;

3. $(-5a)(-a) + 3a(-b) + (-3)(-a)(-a) + 2(-b)^2$;

4. $3(-x)^2 \cdot y(-z) - 7 \cdot (-xy)(-x \cdot (-z)) - (-2x^2 \cdot (-yz))$;

5. $3(-xy^2)(-x \cdot (-y)) - (-3xy(-y \cdot (-x)^2)) - x(-2(-2(-y)^2))(-2xy) - x[-y(-x(-y(-x)))]$;

6. $2(-3a(-b)^2)(-a^2(-b)) + (-(-2(-a)(-b)^2)(-5a^2b)) + 2[-(-2[-(a(-b))^2])(-2a(-b))]$;

7. $4\{-2(-(-3))\}+(-5)(-3(-2))$
$+[-2\{-(-3(-4))\}]$;

8. $(-1)(-(-2))\{-(-(-3))\}-\{-(-3)(-(-2))\}$
$-\{-(-3(-2))(-1)\}$;

9. Berechne $ab-ac+bc$ und $a+(b-5)c-(c-3)a$
und $-5-ab+(c-4)(7-b)$
und $-c-(-b)(c-3)-(3-c)(3-a)$
und $b+(-3)(4-a)(b-5)-(-c-a)b$ für
$\alpha)$ $a=2$, $b=-4$, $c=-7$;
$\beta)$ $a=-7$, $b=5$, $c=-3$;
$\gamma)$ $a=-2$, $b=-3$, $c=5$;
$\delta)$ $a=9$, $b=8$, $c=-7$;
$\varepsilon)$ $a=-9$, $b=2$, $c=3$;
$\zeta)$ $a=-5$, $b=-12$, $c=5$.

10. Was gibt $x-1-x(2-x)+3(x-5)-(x-4)(x-5)$ für $x=2$, $x=-3$, $x=4$, $x=-5$?

11. Was gibt: $a-(-x)(-a-1)-(x-2)(a+1)(a-x)$
und $2+(-a-x)(-1)-(-2)(2-a)(x+2)$
und $-3-(1-ax)(x-1)-(-x(a-x)+1)$
und $-4+(ax-2)(-2)(a+2)-(a-1)(x-2)(ax+1)$
für $\alpha)$ $a=1$, $x=-1$; $\beta)$ $a=2$, $x=-1$;
$\gamma)$ $a=-2$, $x=1$; $\delta)$ $a=-2$, $x=-1$;
$\varepsilon)$ $a=-1$, $x=2$; $\zeta)$ $a=-1$, $x=-3$.

Aufl.: **4.** $2x^2yz$; **5.** $5x^2y^3-4x^3y^2$; **6.** $-4a^3b^3$; **7.** -30; **8.** -6.

37.

Division negativer Größen.

1. $\frac{12}{-4}+\frac{-10}{5}-\frac{14}{-7}+\frac{-18}{-3}-\frac{-20}{5}-\frac{-12}{-3}$;

2. $\frac{-40}{2(-10)}+\frac{2-20}{3}-\frac{-14}{9-2}-\frac{-12-15}{-4-5}+\frac{3(-5)(-6)}{(-10)(-3)}$;

3. $\frac{-3}{5}+\frac{2}{-5}-\frac{-4}{-5}-\frac{7}{-5}-\frac{-1}{5}$;

4. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{b-a}+\frac{-b-a}{a-b}-\frac{a-b}{b-a}-\frac{-b}{a-b}$;

5. $\frac{-x}{1-x}+\frac{2}{x-1}-\frac{x+1}{x-1}-\frac{-x-1}{1-x}-\frac{x}{x-1}$;

6. Was gibt $7-\frac{x+1}{x-2}$ und $x+\frac{2-x}{x-3}$ und $x-\frac{x-5}{3+x}$
für $x=4$, $x=-2$, $x=5$, $x=-1$;

7. Was gibt $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}+\frac{x}{x-3}-\frac{x-1}{x-2}$
für $x=4$, $x=-2$, $x=0$, $x=5$;

8. Was gibt $\frac{x-2}{x-5}-\frac{2x+3}{5-3x}-6$ und $\frac{3-x}{4+x}-2\cdot\frac{x-5}{2x-7}$
für $x=-3$, $x=2$, $x=7$, $x=-6$;

9. Was gibt $x-\frac{a-x}{x-1}$ und $a+\frac{x+1}{x-1}-\frac{a+1}{1-a}$
und $1-\frac{1-ax}{1+a}$ und $\frac{a}{x}-\frac{x}{a}+\frac{x-1}{a-2}-\frac{a+1}{x-2}$
für $a=-2$, $x=-1$; $a=-2$, $x=\ \ 3$,
$a=\ \ 3$, $x=-2$; $a=-3$, $x=-1$.

---

10. $\frac{-(5a-6b)}{-6a(-b)}-\frac{2(a-b)}{3b(-a)}-\frac{2a-3b}{6(-a)b}+\frac{-1}{-2(-a)}$;

11. $\frac{(1-a)-(-a)}{-6(-a)}-\frac{6b-5}{6(5a-4b)}-\frac{b(3a-2)}{3a(4b+5(-a))}$;

12. $\frac{-2}{-1-x}+\frac{1}{-x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{1-x^2}$;

13. $\frac{-2}{1-x^2}+\frac{1}{(2-x)(x+1)}-\frac{-x}{(x^2-1)(x-2)}-\frac{1}{(1-x)(x-2)}$;

14. $\frac{4-x}{(1-x^2)(2-x)}-\frac{1}{2-x}-\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{(x-1)(x-2)}$
$+\frac{1}{(x+1)(x-2)}$;

15. $\frac{80a^2x-60a^3}{81x^4-144a^2x^2}:\left(\frac{504a^3-896ax^2}{12ax^2-9x^3}\cdot\frac{12a^2x^2-12ax^3}{72a^2x+96ax^2}\right)$;

16. $\frac{x}{x-1}-\frac{3-x}{2x-1}-\frac{1}{1-x}+\frac{x-3}{1-2x}$;

17. $\frac{4}{10x-15}-\frac{3}{20-30x}-\frac{5}{18x-12}+\frac{2}{45-30x}$;

18. $\frac{x-1}{x^3}-\frac{1}{x^2-x}-\frac{x+1}{x^2-x^3}-\frac{1}{x^2-1}$;

19. $\frac{2x+1}{5x-x^2-6}-\frac{2x-1}{4-x^2}+\frac{2+x}{x+6-x^2}$;

20. $\frac{1}{16-4x}-\frac{x+1}{2x^2-8}-\frac{x-1}{4x-2x^2+16}-\frac{x}{24x-4x^2-32}$;

21. $\frac{4+x}{3x^2+16x-48-x^3}-\frac{x+5}{4x^2-100+25x-x^3}$
$-\frac{3+x}{9x-x^3-45+5x^2}$.

Aufl. 10. $\frac{a-4b}{6ab}$; 11. $\frac{1}{3a}$; 12. $-\frac{1}{x(x+1)}$;
13. $\frac{2-3x}{(x^2-1)(x-2)}$; 14. $\frac{3}{1-x^2}$; 15. $\frac{5a}{21x(3x+4a)(x-a)}$;
16. $\frac{x+1}{x-1}$; 17. $\frac{14x+2}{15(2x-3)(3x-2)}$; 18. $\frac{1}{x^3(x^2-1)}$;
19. $\frac{-x^2-12x+5}{(x-3)(x^2-4)}$; 20. $\frac{x+8}{2(x-4)(x^2-4)}$; 21. $\frac{11x-37}{12(x-3)(x-4)(x-5)}$.

6. Abschnitt. Verhältnisse und Proportionen.

38.

Das arithmetische Verhältnis.

Will man zwei Größen unter sich vergleichen, so nennt man eine Zahl, welche die Beziehung zweier Größen auf einander angibt, ein Verhältnis.

Man unterscheidet zweierlei Arten von Verhältnissen:

1. Das arithmetische Verhältnis; es ist eine Zahl, welche angibt, um wieviel eine Größe größer ist als eine andere.

2. Das geometrische Verhältnis; es ist eine Zahl, welche angibt, wievielmal eine Größe größer ist als eine andere.

Beide Benennungen sind unschön gewählt.

Da das arithmetische Verhältnis angeben soll, um wieviel die eine Größe, das erste Glied, a, größer ist als die andere Größe, das zweite Glied, b, so findet man das arithmetische Verhältnis, indem man von der ersten Größe die zweite subtrahiert, $a-b$; dieser Satz gilt auch dann noch, wenn die erste Größe kleiner ist als die zweite; nur ergibt sich dann das arithmetische Verhältnis als eine negative Größe, welche gerade durch ihr negatives Vorzeichen angibt, daß die erste Größe nicht größer ist als die zweite. In jedem Falle gibt das arithmetische Verhältnis auch an, um wieviel die zweite Größe kleiner ist als die erste.

Da der Begriff des arithmetischen Verhältnisses der Bedeutung nach nichts voraus hat vor dem Begriff der Differenz, des Unterschiedes, so ist auch sein Name zu gunsten letzterer fast außer gebrauch gekommen.

Beispiel: Eine Straße steigt zuerst um 9,20 *m*, dann um 18,45 *m*, dann um 12,53 *m*; dann fällt sie um 10,14 *m*, dann um 19,27 *m*, dann um 10,05 *m*; um wieviel beträgt das Steigen mehr als das Fallen?

$$x = 9{,}20 + 18{,}45 + 12{,}53 - (10{,}14 + 19{,}27 + 10{,}05)$$
$$x = 0{,}72\ m.$$

Von A nach B führen zwei Wege; der erste hat zuerst $5\frac{2}{3}$ *km* Feldweg, dann $3\frac{3}{4}$ *km* Landstraße, der andere hat zuerst $4\frac{1}{2}$ *km* Landstraße, dann $1\frac{1}{3}$ *km* Fußweg, dann $4\frac{2}{5}$ *km* Feldweg; um wieviel ist der erste Weg länger als der zweite?

$$x = 5\tfrac{2}{3} + 3\tfrac{3}{4} - (4\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{3} + 4\tfrac{2}{5}) = -\tfrac{49}{60}\ km;$$

der erste Weg ist somit um $-\frac{49}{60}$ *km* länger also um $\frac{49}{60}$ *km* kürzer als der zweite.

1. Suche aus der ersten Größe a und dem arithmetischen Verhältnis d die zweite Größe, und aus der 2. Größe und dem Verhältnis d die erste Größe.

2. Ein arithmetisches Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man jedes ihrer Glieder um gleichviel vermehrt oder vermindert.

3. Welchen Wert hat das arithmetische Verhältnis von $a+b$ und $x-a$ für $a=7$, $b=2$, $x=12$; und für $a=1$, $b=4$, $x=6$; und $a=-1$, $b=3$, $x=2$; und $a=-4$, $b=2$, $x=3$; und $a=5$, $b=-8$, $x=7$?

39.

Das geometrische Verhältnis.

Das geometrische Verhältnis ist eine Zahl, welche angibt wievielmal eine Größe größer ist als eine andere.

Da das geometrische Verhältnis angeben soll, wievielmal die eine Größe, das erste Glied, a, größer ist als die andere Größe, das zweite Glied, b, so findet man es, indem man das erste Glied durch das zweite Glied dividiert; $v=a:b$. Ist das erste Glied größer als das zweite, so ist der Wert des geometrischen Verhältnisses >1; gleiche Größen haben das geometrische Verhältnis 1; ist das erste Glied kleiner als das zweite, so ist der Wert des geometrischen Verhältnisses <1. Auch für diesen letzten Fall gilt dieselbe Definition des geometrischen Verhältnisses und das geometrische Verhältnis gibt dann gerade dadurch, daß sein Wert kleiner als 1 ist, an, daß die 1. Größe in Wirklichkeit nicht größer ist als die zweite.

Beispiel: In welchem Verhältnis steht 12 zu 4? Antwort: das Verhältnis von 12 zu 4 ist $v=12:4=3$; d. h. 12 ist 3 mal größer als 4. (Statt 3 mal größer sagt man auch 3 mal so groß). In welchem Verhältnis steht 6 zu 9? Antwort: das Verhältnis von 6 und 9 ist $v=6:9=\frac{2}{3}$; d. h. 6 ist $\frac{2}{3}$ mal größer ($\frac{2}{3}$ mal so groß) als 9.

In jedem Falle gibt das geometrische Verhältnis auch an, wievielmal die zweite Größe kleiner ist als die erste; 4 ist 3 mal kleiner als 12; 9 ist $\frac{2}{3}$ mal kleiner als 6.

Ein geometrisches Verhältnis bleibt (als Quotient) ungeändert, wenn man jedes Glied mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert.

Da die Glieder eines geometrischen Verhältnisses entweder beide unbenannte oder beide gleich benannte Zahlen sind, so ist das Verhältnis stets eine unbenannte Zahl.

Sobald zwei gleich benannte Zahlen zur Bildung eines Verhältnisses benützt worden sind, können sie auch als unbenannte Zahlen, als die Maßzahlen der Größen, welche sie vorstellen, angesehen werden.

Statt „geometrisches Verhältnis“ sagt man häufig nur „Verhältnis.“

1. Aus dem 1. Glied und dem Verhältnis v soll man das 2. Glied finden; aus dem 2. Glied und dem Verhältnis v soll man das erste Glied finden.

2. Wie groß ist das Verhältnis von 42 *M* zu 14 *M*, von 63 *m* zu 42 *m*, von $1\frac{1}{2}$ *hl* zu 30 *l*, von $1\frac{1}{4}$ *km* zu 250 *m*, von 45 Min. zu 18 Min., von 15 *Ct* zu 10 *Ct*, von 15 *kg* zu 27 *kg*, von $1\frac{2}{5}$ Meilen zu $1\frac{3}{4}$ Meilen, von $3\frac{1}{3}$ *qm* zu 4 *qm*, von 1 *a* 20 *qm* zu 1 *a* 40 *qm*, von 15 Std. 45 Min. zu 4 Std. 12 Min. von 2 Tg. 20 Std. zu 6 Tg. 12 Std., von 6 Tg. $13\frac{1}{2}$ Std. zu 3 Tg. 8 Std., von 1 Tg. 5 Std. 10 Min. zu 18 Std. 40 Min.?

3. Die Länge eines Bildes ist 91 *cm* und verhält sich zur Breite wie 7 : 5; wie groß ist die Breite?

4. Die Länge eines Bildes ist 60 *cm*, die Breite 45 *cm*; wie verhält sich Länge zu Breite, und wie Breite zu Länge?

5. Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkligen Körpers (Ziegelsteines) verhalten sich wie 9 : 6 : 4; die Länge ist 33 *cm*; wie groß ist Breite und Höhe; die Breite ist 18 *cm*, wie groß ist Länge und Höhe; die Höhe ist 14 *cm*, wie groß ist Länge und Breite?

6. Bei einer Kiste soll sich Länge, Breite und Höhe wie 7 : 5 : 4 verhalten; man berechne aus der Länge = 84 *cm*, oder aus der Breite = 52 *cm*, oder aus der Höhe = 46 *cm* die anderen Dimensionen.

7. Eine Zeichnung ist im Maßstabe 2 : 9 gefertigt (Maßstab = 2 : 9 oder = $\frac{2}{9}$ bedeutet: jede Linie der Zeichnung steht zur entsprechenden Linie des Gegenstandes im Verhältnis 2 : 9); wenn nun eine Linie des Gegenstandes 1 *m* 23 *cm* (63 *cm*, 11,2 *cm*, 7,5 *mm*) lang ist, wie lang ist die entsprechende Linie der Zeichnung; oder wenn eine Linie der Zeichnung 26 *cm* (15,3 *cm*, 9,6 *mm*, 1,5 *mm*) lang ist, wie lang ist die entsprechende Linie des Gegenstandes?

8. Ich will einen Gegenstand im Maßstabe 4 : 5 oder 7 : 3, oder 1 : 10 abzeichnen; wenn nun 3 Linien des Gegenstandes die Längen 15 *cm*, 21 *cm*, 50 *cm* haben, wie groß werden sie in jeder Zeichnung?

9. Eine Landkarte ist im Verhältnis (Maßstab) 1 : 100 0000, oder 1 : 750 000 oder 1 : 500 000 oder 1 : 1200 000 entworfen; auf der Landkarte ist die Breite eines Meeresarmes = 19,4 *mm*, die Länge einer Insel = 37,2 *mm*, die Entfernung zweier Städte

$= 51{,}9\ mm$; wie groß ist jede dieser Strecken in der Natur. Wie lang muß eine geographische Meile $= 7300\ m$ auf jeder Karte erscheinen?

10. a steht zu b im Verhältnis v_1, b zu c im Verhältnis v_2, in welchem Verhältnis steht a zu c?

11. Eine im Maßstabe 5 : 7 entworfene Zeichnung zeichnet man im Maßstab 3 : 2 ab, welchen Maßstab hat die neue Zeichnung?

12. In welchem Maßstabe muß man eine im Maßstabe 5 : 6 entworfene Zeichnung abzeichnen, damit die neue Zeichnung den Maßstab 2 : 3 hat?

13. Wenn der Preis einer Ware um 10% ($12\frac{1}{2}\%$, 20%) steigt (oder fällt), in welchem Verhältnis steht der neue Wert zum alten, und in welchem der alte zum neuen?

14. Eine Ware ist zuerst im Verhältnis 4 : 5 im Preis gestiegen, dann im Verhältnis 7 : 6 im Preis gefallen; um wie viel % steht sie noch höher als anfangs?

15. Wenn ich eine Linie um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge größer mache und die so verlängerte Linie nun um $\frac{1}{4}$ ihrer jetzigen Länge vergrößere, in welchem Verhältnis steht dann diese verlängerte Linie zu ihrer ursprünglichen Länge?

16. Wenn man eine Ware mit 15% Gewinn (Verlust) verkauft, in welchem Verhältnis steht der Gewinn (Verlust) zum Einkaufspreis, in welchem Verhältnis steht der Einkaufspreis zum Verkaufspreis, wie verhält sich der Verkaufspreis zum Gewinn (Verlust) und wie zum Einkaufspreis?

17. Verwandle folgende Verhältnisse in Verhältnisse von ganzen Zahlen: $\frac{3}{4}:\frac{7}{8}$; $\frac{11}{12}:1\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}:1\frac{11}{14}$; $\frac{3}{4}:\frac{4}{9}$; $\frac{14}{15}:\frac{18}{25}$; $0{,}2:0{,}25$.

18. Wenn sich a : b wie 7 : 5 und b : c wie 9 : 10 verhält, wie verhält sich dann a : c?

19. Wenn sich $a : b = 8 : 5$ und a : c wie 4 : 9 verhält, wie verhält sich dann b : c?

20. Wenn sich a : c wie 9 : 14 und b : c wie 10 : 21 verhält, wie verhält sich a : b?

21. Wenn sich a : b wie 6 : 5, b : c wie 10 : 9, c : d wie 12 : 5 und d : e wie 10 : 7 verhält, so soll man daraus die Verhältnisse von a : d, e : c, e : b, c : a, d : b, e : a berechnen, und stets als Verhältnisse ganzer Zahlen darstellen.

40.

Die arithmetische Proportion.

Eine arithmetische Proportion ist die Gleichheit zweier arithmetischen Verhältnisse. Sie besteht demnach aus 4 Gliedern, zwei Gliedern des 1. und zwei Gliedern des 2. Verhältnisses.

$$\mathbf{a - b = c - d.}$$

Die Glieder a und c heißen Vorderglieder, die Glieder b und d heißen Hinterglieder.

Die arithmetische Proportion bedeutet: Um wieviel das 1. Glied größer ist als das zweite, um ebensoviel ist das 3. Glied größer als das vierte.

Addiert man beiderseits $b + d$, so hat man $a + d = b + c$.

D. h. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der inneren (mittleren) Glieder. Umgekehrt: Wenn die Summe der äußeren Glieder gleich ist der Summe der inneren Glieder, so ist die arithmetische Proportion richtig. Daraus folgt, daß jede Veränderung in der Stellung oder Größe der Glieder, welche die Gleichheit dieser Summen nicht ungültig macht, vornehmen darf, ohne die Richtigkeit der Proportion zu ändern.

Von den hiebei möglichen Fällen seien die folgenden als die wichtigsten hervorgehoben:

Eine arithmetische Proportion bleibt richtig,

1) wenn man die äußeren Glieder vertauscht,
2) wenn man die inneren Glieder vertauscht,
3) wenn man zu einem äußeren und einem inneren dieselbe Zahl addiert, oder von ihnen dieselbe Zahl subtrahiert.

Wenn demnach $a - b = c - d$, so ist auch

1) $d - b = c - a$,
2) $a - c = b - d$,
3) $(a \pm i) - b = (c \pm i) - d$, $(a \pm i) - (b \pm i) = c - d$ u. s. w.

Aus $a - b = c - d$ folgt, indem man beiderseits b (oder d) addiert:

$$a = b + c - d, \quad c = a + d - b;$$

ebenso findet man aus anderen Formen:

$$b = a + d - c, \quad d = b + c - a.$$

Dies faßt man zusammen in die Doppelregel: Man findet ein äußeres Glied einer arithm. Proportion, indem man von der Summe der inneren Glieder das andere äußere Glied subtrahiert, und man findet ein inneres Glied, wenn man von der Summe der äußeren Glieder das andere innere Glied subtrahiert.

Bestimme das mit x bezeichnete unbekannte Glied aus folgenden Proportionen:

$$x - 37 = 83 - 25; \quad 144 - x = 95 - 58;$$
$$81 - 21 = x - 64; \quad 117 - 48 = 36 - x.$$

Das *arithmetische Mittel* zweier Zahlen (zwischen zwei Zahlen) ist eine Zahl, welche um ebensoviel kleiner ist als die größere, als sie selbst größer ist als die kleinere (welche von beiden Zahlen den gleichen Abstand hat). Man findet sie also, indem man den Unterschied beider Zahlen (a und b) in zwei gleiche Teile teilt, und

diese halbe Differenz entweder von der größeren Zahl (a) subtrahiert, oder zur kleineren Zahl (b) addiert. Es ist also

$$m = a - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} \text{ und } m = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2};$$

das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist somit auch gleich der halben Summe der Zahlen.

Bilde das arithmetische Mittel aus 136 und 128, 3549 und 3581, 15832 und 22926, 16 und 9, $15\frac{1}{2}$ und $7\frac{3}{4}$, $4\frac{3}{7}$ und $5\frac{8}{9}$, a und a + b, n und n + 5, y − 4 und y + 6, 2 − y und 2 + y, 7 − a und 19 − a, a − 11 und 11 − a, a + 2b und 2a + b.

Unter dem arithmetischen Mittel (dem Mittelwert) mehrerer (n) Zahlen versteht man die durch die Anzahl (n) der Zahlen geteilte Summe der Zahlen (den n^{ten} Teil ihrer Summe),

$$m = \frac{a + b + c + \ldots\ldots}{n}.$$

Das arithmetische Mittel mehrerer Zahlen hat auch die Eigenschaft, daß die Summe der Größen, um welche sie kleiner ist als jede der größeren Zahlen, gleich ist der Summe der Größen, um welche sie größer ist als jede der kleineren Zahlen. (Die Summe ihrer Abstände von den einzelnen Zahlen ist beiderseits gleich groß).

Bilde das arithmetische Mittel von 15, 17, 42, und von 11, 15, 21, 41, und von 9, 16, 22, 37, und von 26, 29, 33, 35, 47, und untersuche die Richtigkeit der angegebenen Eigenschaft.

Man findet das arithmetische Mittel auch, indem man von jeder der gegebenen Zahlen ein und dieselbe beliebige Zahl subtrahiert, aus den erhaltenen Differenzen das arithmetische Mittel bildet, und zu diesem wieder dieselbe beliebige Zahl addiert.

$$\frac{a + b + c + \ldots\ldots}{n} = \frac{a - i + b - i + c - i + \ldots\ldots}{n} + i.$$

Bilde das arithmetische Mittel aus 508, 525, 560, und aus 3784, 3761, 3752, 3719, und aus 4517, 4456, 4410, 4324, 4308.

Ein Händler verkaufte 6 Gänse zu folgenden Preisen: 4,80 ℳ, 4,75 ℳ, 4,40 ℳ, 4,20 ℳ, 4 ℳ und 3,80 ℳ; wieviel löste er durchschnittlich für eine?

Auf der Schranne wurden verkauft 6 hl à 8,40 ℳ, 2 hl à 8,25 ℳ, 9 hl à 8,10 ℳ, 3 hl à 7,85 ℳ, 8 hl à 7,80 ℳ; welches war der Durchschnittspreis?

Der Definition gemäß genügt das arithmetische Mittel m zweier Zahlen a und b der arithmetischen Proportion:

$$a - x = x - b; \text{ hieraus}$$
$$2x = a + b, \text{ also } x = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

41.

Die geometrische Proportion.

Eine geometrische Proportion ist die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnisse.

Die Bezeichnung „geometrisch“ läßt man gewöhnlich weg.

Eine Proportion besteht aus 4 Gliedern, zwei des 1. und zwei des 2. Verhältnisses.

$$a : b = c : d.$$

Die ersten Glieder, a und c, nennt man auch Vorderglieder, die letzten, b und d, Hinterglieder, beide nennt man homologe Glieder. a und d nennt man äußere, b und c innere (mittlere) Glieder.

Die Proportion $a : b = c : d$ bedeutet: wievielmal a größer ist als b, ebensovielmal ist c größer als d. Man spricht statt dessen: a verhält sich zu b wie sich c zu d verhält; oder: a und b stehen in demselben Verhältnis, haben dasselbe Verhältnis, wie c und d, oder: das Verhältnis von a und b ist dem Verhältnis von c und d gleich, oder: die Größen a und b verhalten sich zu einander, wie sich die Größen c und d zu einander verhalten, oder die Größen a und b sind proportional den (zu den) Größen c und d.

In jedem Verhältnis können die Glieder benannte Zahlen sein, müssen dann aber gleichbenannte Zahlen sein, und können, sobald sie in das Verhältnis eingetreten sind, als unbenannte, durch ihre Maßzahlen ersetzte Zahlen betrachtet werden.

In jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren Glieder.

Beweis: Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt, wenn man beiderseits mit $b \cdot d$ multipliziert, $ad = bc$.

Umgekehrt: Aus der Gleichheit zweier Produkte kann man eine Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produktes als äußere, die des anderen Produktes als innere Glieder einer Proportion setzt. Und:

Ist in einer Proportion das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren, so ist die Proportion eine richtige.

Jede Änderung in der Stellung oder Größe der Glieder ändert nichts an der Richtigkeit der Proportion, wenn sie nichts an der Gleichheit dieser Produkte ändert.

Deshalb ergeben sich über die **Stellung der Glieder** einer Proportion ($a : b = c : d$) leicht folgende Sätze:

1) Man darf die inneren Glieder vertauschen ($a : c = b : d$), oder die Vorderglieder verhalten sich wie die Hinterglieder, oder die homologen Glieder sind proportional.
2) Man darf die äußeren Glieder vertauschen.
3) Man darf die Verhältnisse vertauschen.

4) Man darf die Proportion von rückwärts lesen (1 und 2 verbunden).

5) Man darf beide Verhältnisse zugleich umkehren.

6) Man darf die inneren Glieder zu äußeren und die äußeren zu inneren machen.

(Abwechselnde Anwendung von 1 und 3 führt zu allen 8 möglichen Stellungen).

Über die Veränderungen in der Größe der Glieder hat man folgende Sätze:

1) Man darf ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren.

2) Man darf ein äußeres (inneres) Glied mit einer Zahl multiplizieren, wenn man das andere äußere (innere) Glied mit derselben Zahl dividiert.

3) Jede Proportion $a : b = c : d$ kann auf die Form $a : ka = c : kc$ gebracht werden.

Denn setzt man $\frac{b}{a} = k = \frac{d}{c}$, so ist $b = ak$, $d = ck$, dies gibt eingesetzt: $a : ka = c : kc$; ebenso kann man die Form $a : b = qa : qb$ ableiten.

Aus $a : b = c : d$ folgt $ad = bc$; hieraus durch Division mit einer passenden Größe:

$$a = \frac{bc}{d}, \quad d = \frac{bc}{a}; \quad b = \frac{ad}{c}; \quad c = \frac{ad}{b}.$$

D. h. Man findet ein äußeres Glied, indem man das Produkt der inneren Glieder durch das andere äußere Glied dividiert, und man findet ein inneres Glied, indem man das Produkt der äußeren Glieder durch das andere innere Glied dividiert.

42.

1. Untersuche, ob folgende Proportionen richtig sind: $3:4 = 9:12$; $16:6 = 15:5$; $25:10 = 30:12$; $78:170 = 117:255$; $9 : 13\frac{1}{3} = 6\frac{3}{4} : 10$; $\frac{5}{6} : \frac{2}{5} = 17\frac{1}{2} : 7$; $2\frac{3}{4} : \frac{7}{15} = 16\frac{1}{2} : 2\frac{4}{5}$; $6820 : 40326 = 6510 : 38493$; $96976 : 19866 = 13224 : 2709$; $\frac{1}{8} : \frac{1}{6} = \frac{1}{12} : \frac{1}{9}$;

2. Ebenso: $(a^2 + ab) : (ab + b^2) = (a - a^2) : (b - ab)$; $(1 - a^2) : (2a - a^2 - 1) = (a^2 - a - 2) : (a^2 - 3a + 2)$;

$a : b = (a + c) : (b + c)$; $a : \frac{a+b}{2} = b : \frac{a+2b}{2}$;

$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) : \frac{r+s}{2rs} = \frac{1}{r} : \frac{1}{2r}$; $\left(1 - \frac{1}{x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right) = (1 - x) : (1 + x)$;

$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \frac{1}{ab}$;

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{a}-1\right)=\left(\frac{1}{x}-1\right):1.$

3. Wenn ich von einer Ware für 16,1 ℳ $11\frac{1}{2}$ ℔ und für 22,75 ℳ $16\frac{1}{4}$ ℔ bekomme, sind dann die Preise den Gewichten proportional?

4. Wenn einer in $2\frac{1}{2}$ Std 12 *km* und in $3\frac{1}{3}$ Std 16 *km* zurücklegt, entsprechen dann die Wege den Zeiten?

5. Wenn eine Straße auf 138 *m* Länge um 70 *cm* und auf 227 *m* Länge um 112 *cm* steigt, entsprechen dann die Steigungen den Längen?

6. Wenn 7 Arbeiter in einer gewissen Zeit 360 Stück und 9 Arbeiter in derselben Zeit 460 Stück fertigen, entsprechen dann die Leistungen den Anzahlen der Arbeiter?

7. Sind die Leistungen zweier Pumpen gleichartig, von denen die eine in 42 Min. 819 *l*, die andere in 58 Min. 1131 *l* liefert?

8. Stelle in jeder der folgenden Proportionen das mit x bezeichnete Glied an die 1., 2., 3., 4. Stelle.

$7:x=9:2;\quad x:5=7:11;\quad 3:4=x:5;\quad 4:7=3:x.$

9. Schaffe in folgenden Proportionen die Brüche weg, ohne daß das mit x bezeichnete Glied einen Faktor bekommt, und vereinfache dann die Glieder.

$\alpha)\ x:14\frac{1}{6}=6\frac{4}{5}:2\frac{5}{6};\qquad \beta)\ x:1\frac{2}{5}=16\frac{1}{2}:1\frac{1}{10};$

$\gamma)\ 7\frac{1}{5}:1\frac{1}{5}=x:6\frac{3}{4};\qquad \delta)\ 8\frac{2}{3}:4\frac{4}{5}=9\frac{3}{4}:x;$

$\varepsilon)\ 2\frac{6}{7}:x=2\frac{2}{9}:6\frac{1}{4};\qquad \zeta)\ 0{,}6:0{,}2=x:0{,}04;$

$\eta)\ 1{,}6:0{,}03=18:x;\qquad \vartheta)\ 2{,}4:2\frac{2}{3}=x:2\frac{7}{9}.$

10. Berechne x aus den Proportionen von **8** und **9**.

11. Berechne x aus $x:(a^2b+ab^2)=(a^2b^2-ab^3):(a^3b-a^2b^2)$; $(a+a^2):x=(a-a^3):(a^2-a^3)$;

$\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=x:\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right);$

$\left(\frac{6}{a}-1+a\right):(3-a)=\left(\frac{2}{a}+1\right):x;\quad x:a=x:\frac{1}{x}.$

43.

Weitere Sätze über Proportionen.

Aus $a:b=c:d$ folgt der Summensatz:

$(a+b):(c+d)=a:c,$ oder $(a+c):(b+d)=a:b.$

Die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses verhält sich zur Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses wie das 1. Vorderglied zum zweiten Vorderglied. Oder: Die Summe der Vorderglieder verhält sich zur Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Zum Beweis bildet man die Produkte der äußeren und inneren Glieder, so ist:

$(a + b) c = (c + d) a$, oder $ac + bc = ac + ad$ oder $bc = ad$; dies ist nach der Voraussetzung richtig, also auch der Summensatz. Ebenso beweist man die andere Form. Ebenso beweist man die Richtigkeit des Differenzensatzes:

$$(a - b) : (c - d) = a : c, \text{ oder } (a - c) : (b - d) = a : b.$$

Durch Vergleich beider hat man

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Allgemeiner Summensatz:

Aus $a : b = c : d$ bildet man $pa : qb = pc : qd$;
hieraus $(pa + qb) : (pc + qd) = pa : pc = a : c$;
ebenso $(ma + nb) : (mc + nd) = ma : mc = a : c$;
also $(pa + qb) : (pc + qd) = (ma + nb) : (nc + nd)$.

Das ist die allgemeinste Form des Summensatzes:

Die Summe von Vielfachen der Glieder des 1. Verhältnisses verhält sich zu Summe von ebensolchen Vielfachen der Glieder des 2. Verhältnisses wie die Summe von beliebigen anderen Vielfachen der Glieder des 1. Verhältnisses zur Summe von ebensolchen Vielfachen der Glieder des 2. Verhältnisses.

Man kann dem Summensatz auch die Form geben:

$$(pa + qc) : (ma + nc) = (pb + qd) : (mb + nd).$$

Zweierlei Summen von beliebigen Vielfachen der Vorderglieder verhalten sich wie die gleich gebildeten Summen der Hinterglieder.

Verbindung von Proportionen.

Wenn $a : b = c : d$ und
$a' : b' = c' : d'$, so ist auch
$a \cdot a' : b \cdot b' = c \cdot c' : d \cdot d'$ und

$$\frac{a}{a'} : \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} : \frac{d}{d'}.$$

Zwei Proportionen können mit einander multipliziert oder dividiert werden, indem man Glied für Glied multipliziert oder dividiert.

Multipliziert man die Proportion $a:b = c:d$ mit sich selbst, so hat man

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2.$$

Verhältnis zusammengesetzter Größen.

Ist eine Größe von zweierlei Größen abhängig derart, daß sie jeder derselben bei sonst gleichen Verhältnissen proportional ist, so ist sie dem Produkt der beiden Größen proportional.

Beweis: Die Größe sei A; die Größen, von denen sie abhängt, seien a und b, derart, daß für die Werte a_1 und b_1 die

Größe A den Wert A_1 und für die Werte a_2 und b_2 den Wert A_2 hat, so wird die Größe A auch einen gewissen Wert A′ haben, wenn a den Wert a_2 und b den Wert b_1 hat. Vergleicht man nun A_1 mit A′, so sind sie, da b für beide denselben Wert b_1 hat, den Größen a proportional, welche die Werte a_1 und a_2 haben; also hat man

$A_1 : A' = a_1 : a_2$; ebenso findet man, daß A′ und A_2, da die Größe a denselben Wert a_2 hat, den Größen b proportional sind, hat also

$A' : A_2 = b_1 : b_2$; durch Multiplikation ist

$A_1 A' : A' A_2 = a_1 b_1 : a_2 b_2$, oder

$A_1 : A_2 = a_1 b_1 : a_2 b_2$, was zu beweisen war. Der Satz läßt sich durch Fortsetzung dieses Verfahrens unter Beibehaltung des Wortlautes auf drei und mehr Größen ausdehnen, also

$A_1 : A_2 = a_1 b_1 c_1 \ldots : a_2 b_2 c_2 \ldots$

Umgekehrtes oder indirektes Verhältnis.

Soll ausgesprochen werden, daß, so vielmal a_1 größer ist als a_2, ebensovielmal b_1 kleiner ist als b_2, so hat man zu schreiben:

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_1 \quad \text{oder} \quad a_1 : a_2 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2}.$$

Man sagt dabei: die Größen a verhalten sich umgekehrt wie die Größen b, oder die Größen a stehen im umgekehrten oder indirekten Verhältnis wie die Größen b, oder die Größen a sind den Größen b umgekehrt oder indirekt proportional.

In Verbindung mit dem vorigen Satze findet man:

Ist eine Größe von mehreren Größen abhängig derart, daß sie unter sonst gleichen Verhältnissen jeder einzelnen derselben entweder direkt oder indirekt proportional ist, so ist sie einem Produkte proportional, welches die Größen der direkten Proportionalität als Faktoren und von den Größen der indirekten Proportionalität die reziproken Werte als Faktoren enthält.

Ist also A proportional den Größen a, b, ... und indirekt proportional den Größen c, d, ..., so ist:

$$A_1 : A_2 = a_1 b_1 \ldots \frac{1}{c_1} \frac{1}{d_1} \ldots : a_2 b_2 \ldots \frac{1}{c_2} \frac{1}{d_2}, \quad \text{oder}$$

$$A_1 : A_2 = \frac{a_1 b_1 \ldots.}{c_1 d_1 \ldots.} : \frac{a_2 b_2 \ldots.}{c_2 d_2 \ldots.}.$$

Geometrisches Mittel.

Das geometrische Mittel zweier Zahlen oder die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen ist eine Zahl, welche ebensovielmal kleiner ist, als die größere, als sie selbst größer ist als die kleinere.

Sind a und b die Zahlen, x das geometrische Mittel, so muß x der Proportion genügen:

$$a : x = x : b, \text{ also muß } x^2 = ab.$$

Z. B. für $a = 9$, $b = 4$ ist:

$$9 : x = x : 4; \quad x^2 = 36, \text{ also } x = 6.$$

Erst später kann angegeben werden, wie man in jedem Falle das geometrische Mittel berechnet.

44.

Aufgaben zur Anwendung der Proportionen.

1. Für 17,5 ℳ bekommt man $12\frac{1}{2}$ *kg*, wieviel *kg* bekommt man für 21 ℳ?

2. Wenn das Pfund 24 ₰ kostet, bekommt man für eine gewisse Summe 147 ℔; wieviel ℔ bekommt man für dasselbe Geld, wenn das ℔ 28 ₰ kostet?

3. Legt einer 84 *m* in der Minute zurück, so kommt einer in einer gewissen Zeit $15\frac{3}{4}$ *km* weit; wieviel muß er aber zurücklegen, wenn er in derselben Zeit $16\frac{3}{4}$ *km* weit kommen soll?

4. $11\frac{1}{2}$ *km* legt einer in 2 Std. 35 Min. zurück; wie lange wird er zu 17 *km* brauchen?

5. 24 Flaschen Wein à 1 ℳ 30 ₰ tauscht einer gegen Wein um, von dem die Flasche 1 ℳ 60 ₰ kostet. Wieviel Flaschen bekommt er?

6. Bei einer täglichen Ration von $2\frac{1}{3}$ ℔ Brod reicht ein Vorrat auf 26 Tage; wie lange wird er reichen bei täglich $2\frac{1}{2}$ ℔?

7. Bei einer täglichen Ration von $2\frac{1}{4}$ ℔ Brod reicht ein Vorrat für 54 Mann; wenn derselbe Vorrat aber nur für 50 Mann ausreichen soll, wie groß darf dann die Ration sein?

8. Bei wieviel Prozent bringt ein Kapital 540 ℳ Zinsen, wenn es bei $3\frac{1}{2}$ % 470 ℳ Zinsen bringt?

9. Zu wieviel % müssen 6380 ℳ ausgeliehen sein, damit sie denselben Zins bringen, wie 7430 ℳ zu $3\frac{2}{3}$ %?

10. Wieviel Zins bringt ein Kapital in 9 Mon. 6 Tg., wenn es in 7 Mon. 20 Tg. 38 ℳ 53 ₰ bringt?

11. Ein Liter Spiritus von 83 % Gehalt ist 64 ₰ wert; wieviel ist dann ein Liter von 62 % Gehalt wert?

12. Mit 11 Ster Holz reicht einer 35 Wochen; wie lange wird er mit 14 Ster reichen?

13. Verbraucht einer monatlich $2\frac{3}{4}$ Ster Holz, so wird sein Vorrat $4\frac{1}{2}$ Monate reichen. Wieviel darf er monatlich brauchen, wenn der Vorrat 6 Monate reichen soll?

14. Nimmt man $2\frac{1}{2}$ *l* Samen auf die Ar, so braucht man zu einem Acker 76 *l*; wieviel *l* braucht man, wenn man $2\frac{2}{3}$ *l* auf die Ar nimmt?

15. Braucht einer 15 Minuten zu einem Kilometer, so legt er eine gewisse Strecke in $4\frac{1}{2}$ Std. zurück; wieviel Minuten braucht ein anderer zum Kilometer, der dieselbe Strecke in $3\frac{3}{4}$ Std. zurücklegt?

---

16. Wenn 5220 ℳ Kapital 7 Monate und 4830 ℳ 6 Monate auf Zinsen stehen, wie verhalten sich dann die Zinsen?

17. In 7 Stunden legt einer 33 *km* zurück; in 6 Stunden legt ein anderer 30 *km* zurück; wie verhalten sich deren Geschwindigkeiten?

18. Wenn 880 ℳ in 9 Monaten denselben Zins geben, wie 720 ℳ in 11 Mon., wie verhalten sich dann die Prozente?

19. Wenn 1400 ℳ Kapital 63 ℳ Zinsen tragen und 2300 ℳ bei denselben Prozenten 184 ℳ Zinsen tragen, wie verhalten sich dann die Zeiten?

20. Wenn ein Körper mit 3,2 *m* Geschwindigkeit 15 Minuten lang und ein anderer mit 2,7 *m* Geschwindigkeit 16 Minuten lang sich bewegt, wie verhalten sich die Wege?

21. Wenn 12 Pferde mit einem Vorrat 17 Wochen, und 14 Pferde mit demselben Vorrat 15 Wochen reichen, wie verhalten sich dann die Rationen?

22. 8 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 20 Tage, 10 Arbeiter brauchen zu derselben Arbeit 18 Tage; wie verhalten sich die täglichen Arbeitszeiten?

23 Ein Pferd zieht eine Last von 15 Ztr. 8 *km* weit; ein anderes zieht 16 Ztr. in derselben Zeit 9 *km* weit; wie verhalten sich deren Leistungen?

24. Ein Setzer setzt in einer gewissen Zeit 480 Zeilen à 42 Buchstaben; ein anderer setzt in derselben Zeit 350 Zeilen à 45 Buchstaben; wie verhalten sich ihre Leistungen?

25. Ein Bote legt einen gewissen Weg in 6 Stunden, ein anderer einen um $\frac{1}{4}$ größeren Weg in 7 Stunden zurück; wie verhalten sich deren Geschwindigkeiten?

26. Ein Kanal füllt einen Teich in $3\frac{1}{4}$ Stunden; ein anderer füllt einen $2\frac{1}{2}$mal größeren Teich in $6\frac{1}{2}$ Stunden; wie verhalten sich die Wassermengen, welche jeder Kanal in einer bestimmten Zeit liefert?

---

27. 4150 ℳ Kapital bringen bei 4 % 312 ℳ Zinsen; wieviel Zinsen bringen 3760 ℳ bei $3\frac{1}{2}$ % in derselben Zeit?

28. 840 ℳ stehen zu $4\frac{1}{2}$ % 7 Monate lang auf Zinsen; wieviel Monate müssen 733 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ % ausstehen, um denselben Zins zu bringen?

29. Bei einer täglichen Ration von 5 ℔ reichen 12 Pferde mit einem Vorrat 19 Wochen; wieviel Wochen reichen 10 Pferde

bei einer täglichen Ration von $4\frac{1}{2}$ *ℓℓ* mit demselben Vorrat?

30. Wielange brauchen 15 Arbeiter zu 480 Stück, wenn 12 Arbeiter zu 300 St. 7 Wochen brauchen?

31. Wieviel Stück fertigen 5 Arbeiter in 16 Tagen, wenn 3 Arbeiter in 6 Tagen 170 Stck. fertigen?

32. Macht einer 11 Stück in 3 Stunden, so braucht er 6 Tage, um eine bestellte Anzahl Stücke zu fertigen; wie lange würde ein anderer zu derselben Bestellung brauchen, der 15 Stck. in 4 Std. fertigt?

33. Ein Aufsatz braucht $16\frac{1}{2}$ Seiten Druck, wenn auf jeder Seite 35 Zeilen à 50 Buchstaben stehen; wieviel Seiten braucht er, wenn auf jeder Seite nur 24 Zeilen à 32 Buchstaben stehen?

34. 10 Arbeiter, von denen jeder in 6 Stunden 1 Stck. fertigt, brauchen zu einer Bestellung 15 Tg. Wie lange werden 9 Arbeiter, von denen jeder in 7 Std. 1 Stck. fertigt, zu derselben Bestellung brauchen?

---

35. Von zwei Kapitalien hat das eine bei $3\frac{1}{2}$ % in 1 Jhr. 3 Mon. 567 *M* Zins, das andere bei $4\frac{1}{4}$ % in 9 Mon. 632 *M* Zins getragen; wie verhalten sich die Kapitalien?

36. Wenn 1330 *M* Kapital zu 4 % 114 *M* Zins, und 2730 *M* Kapital zu $3\frac{1}{2}$ % 390 *M* Zins tragen; wie verhalten sich dann die Zeiten?

37. Wenn 5 Arbeiter 16 Tg. à 8 Std. täglich arbeiten, und 9 Arbeiter 12 Tg. à 9 Std. arbeiten, wie verhalten sich dann die Löhne?

38. Wenn 3 Arbeiter in 18 Tg. à 10 Std. 26 Stück fertigen, und 4 Arbeiter in 20 Tg. à 9 Std. 30 Stck. fertigen, wie verhalten sich dann die Zeiten, in denen je ein Arbeiter jeder Abteilung ein Stück fertigt, und wie verhalten sich die Anzahlen der Stücke, welche ein Arbeiter von jeder Abteilung in einer bestimmten Zeit fertigt?

39. Wenn 19 Pferde mit 76 *hl* 11 Wochen reichen und 7 Pferde mit 28 *hl* 9 Wochen reichen, wie verhalten sich dann die täglichen Rationen?

40. Zur Wegschaffung eines Schutthaufens von 432 *cbm* hat man mit 3 Wägen 24 Tage lang fahren müssen; zur Wegschaffung eines Schutthaufens von 560 *cbm* haben 4 andere Wägen 35 Tg. lang gebraucht; wie verhalten sich die Ladungen der Wägen beider Sorten?

41. Von zwei Arbeitern arbeitet der eine täglich 9 Stunden, während der zweite 8 Stunden arbeitet; dafür braucht der erste zu jedem Stück $3\frac{1}{2}$ Stunden, während der zweite nur 3 Std. dazu braucht. Wie verhalten sich ihre Wochenlöhne?

42. Mit einer gewissen Menge Gas werden 12 Flammen 20 Tage täglich 5 Std. lang gespeist. Dieselbe Gasmenge reicht für 10 Lampen anderer Art bei täglich 6 Std. Brennzeit 37 Tg. lang; wie verhalten sich die Gasmengen, welche je eine Lampe jeder Art per Stunde verbraucht?

43. Von zwei Arbeitern, welche gleichartige Arbeit verrichten, verdient der erste in 5 Tg. à 8 Std. 16 ℳ 80 ₰, der zweite in 9 Tg. à 9 Std. 25 ℳ 20 ₰; wie verhalten sich die Zeiten, in denen jeder 1 ℳ verdient, oder die Stücke, welche jeder in 1 Std. macht?

---

44. 15 Arbeiter, von denen jeder in 3 Std. 7 Stck. fertigt, brauchen zu einer Bestellung 12 Tg.; wie lange brauchen dann zu einer gleichen Bestellung 10 Arbeiter, von denen jeder in 4 Std. 9 Stck. fertigt?

45. Fährt man mit Wägen à $\frac{3}{4}$ *cbm* Ladung, täglich je 5 mal, so brauchen 15 Wägen zur Fortschaffung einer gewissen Menge Sandes 16 Tage; wieviel Wägen à 1 *cbm* Ladung, mit denen man täglich 4 mal fahren kann, braucht man um denselben Sand in 19 Tagen fortzuschaffen?

46. Von zwei Arbeitern, deren Fleiß im Verhältnis 6 : 7 steht, und deren Geschicklichkeit sich wie 5 : 4 verhält, verdient der eine in 8 Tagen 30 ℳ; wieviel verdient der andere in 6 Tagen?

47. Von zwei Pumpen, bei denen sich die Mengen des durch je einen Pumpenstoß geförderten Wassers wie 5 : 8, die Anzahlen der Pumpenstöße in gleichen Zeiten aber wie 7 : 11 verhalten, fördert die erste in 19 Std. 581 *hl* Wasser; wie lange wird die zweite zu 1000 *hl* brauchen?

7. Abschnitt. Darstellung einfacher und zusammengesetzter abhängiger Größen.

45.

Man sagt, eine Größe a ist von einer Größe b abhängig, wenn, sobald b sich der Größe nach ändert, auch a sich der Größe nach ändert, so daß, wenn b der Reihe nach beliebige verschiedene Werte annimmt, zu jedem Wert von b auch je ein ganz bestimmter Wert von a gehört.

Insofern b alle möglichen Werte annehmen darf, man sich sogar vorstellt, daß es alle beliebigen Werte durchläuft, nennt man b eine veränderliche Größe, und zwar, da ihre Veränderlichkeit zunächst an gar keine Rücksicht gebunden ist, eine absolut Veränderliche, oder eine absolut Variable. Insofern die Werte von a dann nicht auch beliebig sind, sondern in einer bestimmt vorgeschriebenen Weise von den Werten des b abhängen, nennt man a

wohl auch eine Veränderliche, aber eine abhängig Veränderliche, eine abhängig Variable. Man nennt auch a eine Funktion von b.

Viele solche abhängige Größen, und zwar sind es gerade die am häufigsten in der Anwendung vorkommenden, sind nun leicht durch die Größe, von der sie abhängen, darstellbar.

Ist die Größe a blos von einer Veränderlichen b abhängig, so nennt man sie auch eine einfach abhängige Größe; ist sie dagegen von mehreren Veränderlichen, b, c, d.... abhängig, so nennt man sie eine zusammengesetzt Veränderliche.

Ist die gesuchte, darzustellende Größe a von der Größe b derart abhängig, daß sie derselben direkt proportional ist, so ist stets

$a = c \cdot b$, wobei c eine konstante Zahl ist, das ist eine solche, welche an den Änderungen des b und a nicht teilnimmt, welche also für beliebige Werte des b stets denselben Wert hat.

Denn nimmt b zwei beliebige Werte b_1 und b_2 an, und berechnet man aus obiger Gleichung die zugehörigen Werte von a, nämlich $a_1 = c b_1$, $a_2 = c b_2$, so genügen diese Werte von a der Forderung, daß sie den Werten von b proportional sein sollen; denn durch Division ist

$$a_1 : a_2 = c b_1 : c b_2 = b_1 : b_2.$$

Will man die Größe des c bestimmen, so braucht man dazu nur zwei zusammengehörige Werte von a und b zu kennen; gehört nämlich etwa zu b_0 der Wert a_0, so muß $a_0 = c b_0$ sein, also durch Division mit b_0 ist

$$c = \frac{a_0}{b_0};\ \text{dies eingesetzt gibt}\ a = \frac{a_0}{b_0} \cdot b.$$

Beispiel. Ein Körper, der sich mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt und der sonst keine Hindernisse seiner Bewegung findet, wird im Laufe der Zeit verschiedene Wegstrecken durchlaufen; die zurückgelegten Wege sind ihrer Größe nach nur von der Zeitdauer der Bewegung und sonst von nichts abhängig. Der Weg ist also eine einfach abhängige Größe. Zudem ist der Weg der Zeit proportional; bezeichnet man also den Weg mit s, und die Zeit mit t, so ist $s = c \cdot t$.

Weiß man nun noch, daß der Körper in je 3″ 8 *m* zurücklegt, so ist

$$8 = c \cdot 3,\ \text{also}\ c = \tfrac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3};\ \text{dies eingesetzt:}$$
$$s = 2\tfrac{2}{3}\, t.$$

Für jede beliebige Zeit t gibt diese Formel den zugehörigen Wert von s. Z. B. für $t = 6''$ wird $s = 2\frac{2}{3} \cdot 6 = 16\ m$; $t = 7''$ gibt $s = 2\frac{2}{3} \cdot 7 = 18\frac{2}{3}\ m$; $t = 21''$ gibt $s = 56\ m$. $t = 1$ gibt $s = 2\frac{2}{3}\ m$. Aus letzterem sieht man auch, daß die konstante Zahl denjenigen Wert der darzustellenden Größe angibt, den sie hat, wenn

die veränderliche Größe $= 1$ ist, ferner, daß die konstante Zahl eine benannte Zahl und gleichartig mit der Darzustellenden ist, und daß die veränderliche nicht als benannte, sondern nur als unbenannte Maßzahl eintritt.

Beispiel. Die Anzahl der von einer bestimmten Anzahl Arbeiter gelieferten Stücke hängt, wenn sonst sich nichts ändert, bloß von der Zeit ab und ist derselben direkt proportional; also ist, wenn n die Stückzahl, s die Stundenzahl bedeutet:

$$n = c s.$$

Wenn man nun weiß, daß die Arbeiter in 5 Stunden 18 Stück fertigen, so ist

$18 = c \cdot 5$, also durch Division $c = \frac{18}{5}$; daher

$$n = \frac{18}{5} \cdot s.$$

Beispiel. Der Zins, den man in einem Jahre bei 4% bekommt, ist blos abhängig vom Kapital und demselben direkt proportional. Bezeichnet man den Zins mit z, das Kapital mit k, so ist

$$z = c \cdot k.$$

Da man nun bei 100 ℳ Kapital 4 ℳ jährlichen Zins bekommt, so ist

$4 = c \cdot 100$, also dividiert $c = 0{,}04$, somit

$$z = 0{,}04 \cdot k.$$

Ist die darzustellende Größe a derjenigen Größe b, von welcher sie abhängt, umgekehrt proportional, so ist

$a = c \cdot \frac{1}{b}$. Beweis wie früher; Bestimmung des c wie früher.

Beispiel: Die Zeit s, in welcher eine Arbeit verrichtet wird, ist bei sonst gleichen Umständen, der Arbeiterzahl n umgekehrt proportional. Also

$$s = c \cdot \frac{1}{n}.$$

Wenn nun 7 Arbeiter 20 Stunden brauchen, so ist

$20 = c \cdot \frac{1}{7}$; multipliziert man mit 7, so ist $c = 140$.

Also $s = 140 \cdot \frac{1}{n}$.

46.

Eine zusammengesetzte Größe nennt man eine solche, deren Wert von mehreren anderen Größen abhängt.

Ist die Abhängigkeit derart, daß die zusammengesetzte Größe jeder Größe einzeln proportional ist, wenn dabei immer die anderen Größen sich nicht ändern, so daß also die zusammengesetzte Größe z proportional ist der Größe a, wenn die

Größen b, c, d ... sich nicht ändern, und proportional der Größe b, wenn die Größen a, c, d ... sich nicht ändern, und solches für jede Größe gilt, so ist die zusammengesetzte Größe stets leicht darzustellen, denn sie ist

$$z = \gamma \cdot a \cdot b \cdot c \ldots.$$

wobei γ eine konstante Zahl ist. Dabei ist noch vorausgesetzt, daß z von weiter keinen Größen mehr abhänge, d. h. daß es sich nicht ändere, wenn die Größen a, b, c ... sich nicht ändern.

Beweis: Denn nimmt a verschiedene Werte a_1, a_2 an, während die anderen Größen unverändert bleiben, und berechnet man aus obiger Formel die zugehörigen Werte von z, nämlich $z_1 = \gamma a_1 bc \ldots$, $z_2 = \gamma a_2 bc \ldots$, so hat man durch Division

$z_1 : z_2 = \gamma a_1 bc \ldots : \gamma a_2 bc \ldots = a_1 : a_2$; also ist z der Größe a proportional, und dasselbe kann für die anderen Größen b, c, ... bewiesen werden.

Zur Bestimmung von γ braucht man nur für ein Wertsystem a_0, b_0, c_0 .... den zugehörigen Wert von z_0 zu kennen; denn dann ist $z_0 = \gamma a_0 b_0 c_0 \ldots$, also durch Division $\gamma = \frac{z_0}{a_0 b_0 c_0}$, wodurch γ bestimmt ist.

Sehr einfach wird die Bestimmung von γ, wenn man denjenigen Wert z_1 kennt, den z dann hat, wenn von den Größen a, b, c .... jede $= 1$ ist; dann ist nämlich $z_1 = \gamma \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots$, $\gamma = z_1$.

Beispiel. Der Weg s, den ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegender Körper zurücklegt, ist abhängig 1. von der Zeit t, 2. von der Geschwindigkeit v, und sonst von nichts; er ist jeder dieser Größen direkt proportional, also ist

$$s = \gamma \cdot vt.$$

Da ein mit der Geschwindigkeit $v = 1\,m$ sich bewegender Körper in der Zeit $t = 1''$ einen Weg von $s = 1\,m$ zurücklegt, so ist $1 = \gamma \cdot 1 \cdot 1$, also $\gamma = 1$; dies eingesetzt gibt:

$$s = v \cdot t.$$

Das Futter, das mehrere Pferde verzehren, ist abhängig 1. von der Anzahl der Pferde, 2. von der Anzahl der Tage, 3. von der Größe der täglichen Ration, und sonst von nichts; zudem ist es jeder dieser Größen proportional. Bezeichnet man also das Futterquantum mit q, und die angegebenen Größen der Reihe nach mit n, t, r, so ist

$$q = \gamma \cdot n \cdot t \cdot r.$$

Da ein Pferd bei täglich 1 Liter Hafer in einem Tag auch nur 1 *l* Hafer verzehrt, so ist

$1 = \gamma \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, also $\gamma = 1$; dies eingesetzt

$$q = n \cdot t \cdot r.$$

Der Zins z, den ein Kapital k einbringt, ist abhängig 1. von der Größe des Kapitals k, 2. der Anzahl der Jahre n, 3. den Prozenten p, und sonst von nichts; zudem ist er jeder dieser Größen proportional, also ist $z = \gamma \cdot k \cdot p \cdot n$.

Da nun 100 ℳ Kapital ($k = 100$) in einem Jahre ($n = 1$) bei 1 % ($p = 1$) eine Mark Zins tragen ($z = 1$), so ist

$1 = \gamma \cdot 100 \cdot 1 \cdot 1$, durch Division $\gamma = \frac{1}{100}$; eingesetzt gibt:

$$z = \frac{k \cdot p \cdot n}{100}.$$

Auch hier gilt die ähnliche Bemerkung, daß die Konstante die der darzustellenden Größe gleiche Benennung hat, und daß die Größen, durch welche sie dargestellt wird, als unbenannte Zahlen, Maßzahlen, eintreten.

Ist eine zusammengesetzte Größe einer der Größen, von welchen sie abhängt, indirekt proportional, so tritt von dieser Größe der reziproke Wert in die Formel als Faktor ein (die Größe kommt in den Nenner).

Ist z. B. z den Größen a, b, c .... direkt, den Größen i, k, m, ... indirekt proportional, so ist

$$z = \gamma \cdot \frac{a \cdot b \cdot c \ldots}{i \cdot k \cdot m \ldots}. \quad \text{(Beweis wie früher).}$$

Beispiel. Die Zeit (Tage $= t$), in welcher eine Anzahl Arbeiter eine Anzahl Stücke fertigen, ist proportional der Anzahl der Stücke N, indirekt proportional der Anzahl der Arbeiter (a), der Anzahl der täglichen Arbeitsstunden (s) und der Anzahl Stücke (n), welche ein Arbeiter in einer Stunde macht. Also ist

$$t = \gamma \frac{N}{a \cdot s \cdot n}.$$

Wenn nun 1 Arbeiter ($a = 1$) in 1 Stunde 7 Stücke fertigt ($n = 7$), so fertigt er in einem Tage ($t = 1$) bei einstündiger Arbeitszeit ($s = 1$) gerade 7 Stücke ($N = 7$); also ist

$$1 = \gamma \cdot \frac{7}{1 \cdot 1 \cdot 7}; \text{ also } \gamma = 1; \text{ demnach}$$

$$t = \frac{N}{a \cdot s \cdot n}.$$

Hiezu ergeben sich noch folgende wichtige Zusätze. Ist eine zusammengesetzte Größe von zwei Größen abhängig und jeder derselben direkt proportional, also durch das Produkt derselben dargestellt, und soll sich die zusammengesetzte Größe nicht ändern, obwohl die zwei Größen sich ändern, so müssen die zwei Größen unter sich indirekt proportional sein.

Denn ist $z = a \cdot b$, und soll z stets denselben Wert z_1 haben für die Werte a_1, b_1 und für die Werte a_2, b_2, so muß $z_1 = a_1 b_1$

und $z_1 = a_2 b_2$ sein, also muß durch Vergleichung $a_1 b_1 = a_2 b_2$ sein; hieraus folgt aber die Proportion

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_1.$$

Ist die zusammengesetzte Größe von mehreren Größen a, b, c .... abhängig, so daß sie durch das Produkt derselben dargestellt ist, und soll sie sich nicht ändern, wenn oder obgleich diese Größen sich ändern, so kann man das Produkt dieser Größen auf beliebige Weise in zwei Produkte zerlegen, und es muß dann das Produkt der einen Größen indirekt proportional sein dem Produkt der anderen Größen.

Denn ist $z = \gamma \cdot a b c d \ldots$, und soll z stets denselben Wert z_1 haben für die Werte $a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots$ und für die Werte $a_2\ b_2\ c_2\ d_2 \ldots$, so muß $z_1 = \gamma\ a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots$ und $z_1 = \gamma\ a_2\ b_2\ c_2\ d_2 \ldots$ sein, also muß durch Vergleichung

$$\gamma \cdot a_1\ b_1\ c_1\ d_1 \ldots = \gamma \cdot a_2\ b_2\ c_2\ d_2 \ldots \text{ sein.}$$

Hiebei fällt γ durch Division weg, und je nach Zusammenfassung bildet man die Proportionen

$$a_1\ b_1 : a_2\ b_2 = c_2\ d_2 \ldots : c_1\ d_1 \ldots, \text{ oder}$$
$$a_1\ c_1 \ldots : a_2\ c_2 \ldots = b_2\ d_2 \ldots : b_1\ d_1 \ldots \text{ und ähnliche.}$$

Der Satz findet dieselbe Anwendung, wenn einige der Größen $a_1\ b_1\ c \ldots$ im Nenner stehen.

Aus $z = \gamma \cdot \dfrac{a \cdot b \cdot c \ldots}{i \cdot k \cdot m \ldots}$ folgt, wenn z denselben Wert behalten soll: $\dfrac{a_1\ b_1\ c_1 \ldots}{i_1\ k_1\ m_1 \ldots} = \dfrac{a_2\ b_2\ c_2 \ldots}{i_2\ k_2\ m_2 \ldots}$ und hieraus

$$\frac{a_1\ b_1}{i_1} : \frac{a_2\ b_2}{i_2} = \frac{c_2 \ldots}{k_2\ m_2 \ldots} : \frac{c_1 \ldots}{k_1\ m_1 \ldots},$$

oder ähnliches, oder insbesondere:

$$a_1\ b_1\ c_1 \ldots : a_2\ b_2\ c_2 \ldots = \frac{1}{i_2\ k_2\ m_2 \ldots} : \frac{1}{i_1\ k_1\ m_1 \ldots}$$

oder $a_1 b_1 c_1 \ldots : a_2 b_2 c_2 \ldots = i_1 k_1 m_1 \ldots : i_2 k_2 m_2 \ldots$ (Das heißt?)

Umgekehrt: Ist eine Größe dargestellt durch ein Produkt oder einen Quotienten mehrerer Größen, so folgt, daß sie bei sonst gleichen Verhältnissen jeder Größe des Zählers direkt und jeder Größe des Nenners indirekt proportional sei, sowie daß sie gleich der Konstanten ist, wenn jede der Größen $= 1$ ist.

Ist also etwa $z = \gamma \cdot \dfrac{a b}{c}$, wobei γ wieder die Konstante bezeichnet, so ist, wenn b und c sich nicht ändern, z proportional a, wenn a und c sich nicht ändern, z proportional b, und wenn a und b sich nicht ändern, z indirekt proportional c, und für $a = b = c = 1$ ist $z = \gamma$.

47.

Aufgaben.

1. Man drücke die durch eine Röhre gelieferte Wassermenge durch die Zeit t aus, wenn in 1″ 12,4 *l* durchfließen.

2. Wie wird die Anzahl der Pendelschwingungen einer Uhr durch die Zeit t ausgedrückt, wenn in 5″ 7 Schwingungen geschehen?

3. Der Weg eines Wanderers soll durch die Zeit t dargestellt werden, wenn er in 4′ 300 *m* zurücklegt.

4. Welches ist das Gewicht eines Drahtes von der Länge *l*, wenn 562 *cm* auf 1 *Pfd* gehen?

5. Wie kann man die Anzahl der Schrotkörner durch ihr Gewicht ausdrücken, wenn 28 Schrotkörner 5 *g* wiegen?

6. Man drücke das Gewicht eines Körpers durch sein Volumen aus, wenn 1 *ccm* desselben 7,5 *g* wiegt.

7. Man drücke das Volumen eines Körpers durch sein Gewicht aus, wenn 1 *ccm* 8,7 *kg* wiegt.

8. Wie wird die Menge des zum Besäen eines Ackers nötigen Samens durch die Ackerfläche ausgedrückt, wenn 1 *l* Samen für 6,2 a reicht?

9. Aus der Menge des verbrauchten Malzes berechne man die Menge des erzeugten Bieres, wenn 2 *hl* Malz 5 *hl* Bier geben.

10. Man drücke die zur Fertigstellung einer Arbeit nötige Zeit durch die Anzahl der täglichen Arbeitsstunden aus, wenn man bei 9stündiger Arbeit 15 Tage braucht.

11. Wie findet sich die zur Zurücklegung eines Weges notwendige Zeit aus der Geschwindigkeit, wenn bei 2,7 *m* Geschwindigkeit 3 Std. 18 Min. notwendig sind?

12. Man drücke die Größe eines Kapitals, das notwendig ist, um einen gewissen Zins zu tragen, durch die Zeit aus, wenn bei 9 Monaten 1200 *M* Kapital notwendig sind.

13. Wie groß ist die durch Pumpen geförderte Wassermenge, ausgedrückt durch die Anzahl der in der Minute gemachten Pumpenhübe, wenn bei 50 Kolbenhüben 4 *hl* 20 *l* gefördert werden?

14. Aus der Menge Wassers, welche eine Zuflußröhre in einer Minute liefert, berechne man die Zeit, welche zur Füllung eines Behälters notwendig ist, wenn der Behälter in 1 Std. 17 Min. gefüllt wird durch einen Zufluß von 30 *l* in der Minute.

15. Wie findet man die Größe der täglichen Ration aus der Zeit, welche ein Vorrat reichen soll, wenn bei $2\frac{3}{4}$ *Pfd* täglicher Ration der Vorrat 18 Tg. reicht?

16. Man drücke die Anzahl der Schwingungen, welche ein Pendel in einer Minute macht, aus durch die Zeit, welche das Pendel zu einer Schwingung braucht.

17. Man drücke die Menge des durch eine Röhre gelieferten Wassers aus durch die Zeit und die in 1″ gelieferte Menge.

18. Welchen Zins tragen k ℳ Kapital bei p $^0/_0$?

19. Man berechne den Wert des Spiritus aus der Menge und dem Gehalt, wenn 100 *l* bei 100 $^0/_0$ Gehalt 73 ℳ kosten.

20. Welcher Ausdruck gibt die Fläche eines Rechteckes, da die Geometrie lehrt, daß die Fläche eines Rechteckes sowohl der Länge (bei gleicher Breite) als auch der Breite (bei gleicher Länge) proportional ist?

21. Die Mechanik lehrt, daß die Arbeit der angewandten Kraft proportional ist, und daß sie (bei gleicher Kraft) auch dem Weg proportional ist, längs dessen die Kraft wirkt. Wie ist demgemäß die Arbeit durch Kraft und Weg auszudrücken?

22. Die Anzahl der in einer gewissen Zeit gefertigten Stücke soll ausgedrückt werden durch die Anzahl der Arbeiter und die Zeit, welche ein Arbeiter zu einem Stück braucht, wenn ein Arbeiter, der zu einem Stück 4 Std. braucht, in dieser gewissen Zeit 7 Stck. fertigt.

23. Man drücke die Zeit, welche zur Herstellung einer Arbeit erforderlich ist, aus durch die Anzahl der Arbeiter und die tägliche Arbeitszeit, wenn 5 Arbeiter bei täglich $8\frac{1}{2}$ Std. 19 Tg. brauchen.

24. Wie kann man die Menge des zur Bestellung eines Ackers erforderlichen Samens ausdrücken durch die Anzahl Quadratmeter, für welche 1 *kg* Samen reicht, und die Fläche des Ackers?

25. Man drücke die Menge des durch eine Pumpe gelieferten Wassers aus durch die Zeit, die Anzahl der Pumpenzüge in der Minute, und die Menge des durch einen Pumpenzug gelieferten Wassers.

26. Wie kann man aus der Größe eines Futtervorrats, der täglichen Ration und der Anzahl der Tage, für welche er reichen soll, auf die Anzahl der Pferde schließen?

27. Man drücke die Anzahl der Tage, welche man braucht, um einen Haufen Erde fortzuschaffen, aus durch das Volumen des Haufens, die Anzahl der Wagen, die Ladung eines Wagens und die Anzahl der täglichen Fuhren eines Wagens.

28. Man drücke den Weg eines Eisenbahnzuges aus durch die Zeit seiner Bewegung und die Zeit, welche er zum Durchlaufen eines Kilometers braucht.

29. Wie kann man die Länge einer Straße, welche mit Kies überdeckt werden soll, ausdrücken durch die Anzahl der Fuhren, die Ladung einer Fuhre, die Menge Kies, welche auf 1 *qm* kommt und die Breite der Straße?

30. Man drücke die Anzahl der Fuhren Ziegelsteine, welche man zu einer Mauer braucht, aus durch die Länge, Breite und Höhe der Mauer, Länge, Breite und Höhe eines Ziegelsteines, und die Anzahl der Ziegelsteine, welche eine Fuhre geben.

II. Teil.

Die drei höheren Rechnungsarten.

---

1. Abschnitt. Potenzieren.

48.

Potenzieren heißt eine Zahl so oft als Faktor setzen als eine andere Zahl Einheiten enthält. Die Zahl, welche als Faktor gesetzt werden soll, heißt Dignand, Basis oder Grundzahl, die Zahl, welche die Anzahl der Faktoren angibt, heißt Exponent.

$a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots\ldots$ (n mal).

Eine Potenz ist also ein Produkt aus so vielen dem Dignand gleichen Faktoren, als der Exponent Einheiten enthält. Umgekehrt. Ein Produkt von lauter gleichen Faktoren kann geschrieben werden als Potenz, deren Dignand einer der gleichen Faktoren, und deren Exponent die Anzahl der Faktoren ist.

Man liest a^5 als „a hoch 5" „a auf oder in der 5. Potenz" „a der oder zur fünften (Potenz)" „a mit dem Exponent 5."

Die zweite Potenz einer Zahl wird auch deren Quadrat, die dritte deren Kubus genannt.

Der Definition gemäß ist $a^1 = a$.

Gleiches mit Gleichem potenziert gibt Gleiches (Bew. wie in **3**).

Das Potenzieren ist zunächst nur definiert, wenn der Exponent eine positive ganze Zahl ist.

1. Berechne 5^2, 7^3, 3^4, 10^5, 2^6, 2^{10}.

2. Was bedeutet $(a-b)^3$; $(1+x)^2$; 3^x; 4^{x-1}; 5^{n+1}.

3. Welche Potenz gibt $a \cdot a \cdot a \cdot a$; $(x-2)(x-2)(x-2)$; 128; 125; 1 000 000;

4. Schreibe in Form von Produkten von Potenzen:
$a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a$; $2x \cdot 4x \cdot 8x$; $3a \cdot 4b \cdot 6a \cdot 27b$;
$7(a-b) \cdot 14a \cdot 8(a-b) \cdot 56a \cdot a$; $55ax \cdot 121a \cdot 125ax$;

5. Schreibe als Produkte von Potenzen ihrer Primfaktoren:
72; 10 000; 392; 108; 9216; 5324; 648; 8281;

6. Ebenso $21 \cdot 12$; $54 \cdot 150$; $98 \cdot 56$; $363 \cdot 99$; $50 \cdot 1250$;

7. Was bedeutet 3^4 und 4^3; sind Dignand und Exponent vertauschbar? 2^4, 4^2?

49.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Zwei Potenzen mit gleichen Dignanden werden multipliziert, indem man den gleichen Dignanden mit der Summe der Exponenten potenziert. Umgekehrt. Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man die Zahl mit jedem Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen mit einander multipliziert.

Beweis: $a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \ldots (\text{m mal}) \cdot a \cdot a \cdot a \ldots (\text{n mal})$
$= a \cdot a \cdot a \ldots\ldots ((m+n) \text{ mal}) = a^{m+n}$.

1. $a^4 \cdot a^5$; $a^{27} \cdot a^2$; $x^5 \cdot x$; $a^{35} \cdot a^{14}$; $a^4 \cdot a^3 \cdot a^5$; $3x^2y^6 \cdot 4xy^7$;

2. $a^n \cdot a$; $a^{1-n} \cdot a^n$; $a \cdot a^{n+1}$; $a^{x-3} \cdot a^2$; $y^{4-n} \cdot y^n$;

3. $a^{n-1} \cdot a$; $a^2 \cdot a^{n-3} \cdot a^2$; $a^{2x+1} \cdot a^{x+4}$; $b^4 \cdot b^{3-x} \cdot b^{2+x}$;

4. $m^{4+x} \cdot m^{5-2x} \cdot m^{3x-9}$; $a \cdot a^{2r-1} \cdot a$;

5. $a^4b^7 \cdot a^{11}b^{14} \cdot a^2b^{13} \cdot b^6$; $a^4b \cdot a^3b \cdot a^2b \cdot a$;

6. $a^xb^x \cdot a^yb^{1-y} \cdot a^{x-y}b^2$; $a^{r+o}b^{o+x} \cdot a^{x-r}b^{r-o}$;

7. $(x^8 + x^6 - x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$;

8. $(ab^n - a^2b^{n-1} - a^3b^{n-2} + a^4b^{n-3})(ab^{6-n} - a^2b^{5-n} + a^3b^{4-n})$;

9. $a^{3y-4} \cdot a^{7-5y} \cdot a^{4y-4}$; $a^2b^{5-3x} \cdot a^{x-4}b^{4x-7}$;

10. $a^{3x+2}b^2 \cdot a^{x+1}b^{x-3} \cdot x^{2r-3}y^{3r-1} \cdot x^{4-r}y^{3-2r}$;

---

11. $(a^7b^2 + 3a^4b^6 - 2ab^{10})(a^8b + 4a^5b^5 - 3a^2b^9)$;

12. $(x^3y^7 - 5x^5y^4 - 6x^7y)(xy^9 + 4x^3y^6 - 6x^5y^3)$;

13. $(11a^4bx^2 + 15a^3b^3x^3 - 17a^2b^5x^4 - 13ab^7x^5) \cdot (9a^3b^2x - 8a^2b^4x^2 - 7ab^6x^3)$;

14. $(18a^9x^6 - 15a^6bx^4y^2 + 16a^3b^2x^2y^4 - 19b^3y^6) \cdot (7a^7bx^4 - 8a^4b^2x^2y^2 - 8ab^3y^4)$;

15. $(5a^7b^2x^9 - 8a^5b^6x^6y^4 - 7a^3b^{10}x^3y^8 + 6ab^{14}y^{12}) \cdot (4a^6x^8y^3 - 5a^4b^4x^5y^7 - 6a^2b^8x^2y^{11})$;

16. $(256a^4x^8 + 320a^3x^6b^3 + 400a^2x^4b^6 + 500ax^2b^9 + 625b^{12}) \cdot (48a^3x^6b - 120a^2x^4b^4 + 75ax^2b^7)$;

17. $3a^2xy^2(5ax^3y^3 + 7a^3x^3y) - 4ax^2y(3a^2x^2y^4 - 5a^4x^2y^2)$;

18. $7a^3b^5(12a^7b^2 - 13a^4b^9 + 14a^6b^7) - 6a^5b^4(15a^4b^8 + 11a^5b^3 - 14a^2b^{10})$;

19. $(32a^5b^2x^6 - 27a^4b^6x^8 - 56a^7b^8x^7) \cdot 3a^5b^6x^4 + (21a^2b^7x^4 - 24a^3b^3x^2 + 42a^5b^9x^3) \cdot 4a^7b^5x^8$;

20. $6a^4b^8c^{12}(4a^3bc^6 - 7a^7c^4 + 9a^6b^4c^8) - 7a^6b^3c^{14}(9a^2b^8c^3 + 13a^4b^9c^6 - 9a^5b^5c^2) + 8a^5b^6c^{15}(5a^5b^6c^5 - 7a^3b^5c^2 - 7a^3b^5c^2 - 11a^2b^3c^3) - 9a^2b^7c^5(3a^9bc^{11} - 14a^6b^4c^{12} - 8a^5b^2c^{13})$;

21. $\frac{a^{2x-4y} b^{3n+5}}{c^{3x-y} d^{4n-8}} \cdot \frac{a^{3x+5y} b^{n-3}}{c^{2x-5y} d^{4-3n}}$;

22. $(x^4 - x^3 y^{2n+1} + x^2 y^{4n+2} - x y^{6n+3} + y^{8n+4}) \cdot (x^2 - x y^{2n+1} - y^{4n+2})$;

23. $(x^{3a-5n} y^{n+3} + 2 x^{4a-3n} y^{2n} - 2 x^{5a-n} y^{3n-3} + x^{6a+n} y^{4n-6}) \cdot (x^{a-n} y^{4-3n} - 2 x^{2a+n} y^{1-2n} + 3 x^{3a+3n} y^{-n-2})$;

24. $\left(\frac{x^{n-1}}{y^{4-3n}} - 1\tfrac{1}{2} \frac{x^{2-n}}{y^{2-n}} + 1\tfrac{3}{4} \frac{x^{5-3n}}{y^n} - 2 \frac{x^{8-5n}}{y^{3n-2}}\right) \cdot \left(\frac{x^{2n-2}}{y^{3-2n}} + 2 \frac{x}{y} - \frac{x^{4-2n}}{y^{2n-1}}\right)$;

25. $(5 a^{3x-4} b^{5x+2} - 7 a^{x-1} b^{3x+4} - 4 a^{2-x} b^{x+6}) \cdot (4 a^{2x} b^{3x-3} + 5 a^3 b^{x-1} - 7 a^{6-2x} b^{1-x})$;

26. $(6 a^n + 7 a^{n-1} b^2 - 5 a^{n-2} b^4 - 9 a^{n-3} b^6) \cdot (7 a^4 b^{n-3} - 5 a^3 b^{n-1} + 6 a^2 b^{n+1} - 8 a b^{n+3})$;

27. $(a^{n-1} b^x + a^n b^{2x-1} + a^{n+1} b^{3x-2}) \cdot (a b^{1-x} - a^2 + a^3 b^{x-1})$.

---

28. $\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}}$; $\frac{a^{x-2}}{(a+b)^{m-2}} - \frac{a^{x-1}}{(a+b)^{m-1}}$;

29. $\frac{a^x + b^x}{a^x - b^x} - \frac{a^x - b^x}{a^x + b^x}$; $\frac{a^3 - x^3}{a^4 + x^4} - \frac{a^3 + x^3}{a^4 - x^4}$;

30. $\frac{a^{3x} + a^{2x} b^2 + a^x b^4}{a^{5x} - a^{4x} b^2 + a^{3x} b^4 - a^{2x} b^6 + a^x b^8} - \frac{1}{a^{2x} - a^x b^2 + b^4}$;

31. $\left(\frac{1}{a^8} - \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^4}\right) : (a^6 - a^4 + a^2)$;

32. $\frac{a - (n+1) a^{x+1}}{1 - a} + \frac{a^2 (1 - a^x)}{(1 - a)^2}$.

50.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Zwei Potenzen mit gleichen Dignanden werden durch einander dividiert, indem man den gleichen Dignanden mit der Differenz der Exponenten potenziert. Zusatz: Subtrahiert man hiebei den Exponenten des Zählers von dem des Nenners, so muß man von der erhaltenen Potenz den reziproken Wert nehmen.

Umgekehrt: Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, indem man die Zahl sowohl mit dem Minuenden als auch mit dem Subtrahenden potenziert und die erste Potenz durch die zweite dividiert.

Beweis. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (m \text{ mal})}{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (n \text{ mal})}$

$= a \cdot a \cdot a \ldots\ldots ((m-n) \text{ mal}) = a^{m-n}$.

Ist hiebei $m < n$, so kann man alle m Faktoren des Zählers gegen eben so viele des Nenners weglassen, und hat

$$= \frac{1}{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots ((n-m) \text{ mal})} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Zusatz $a^0 = 1$; denn $a^0 = a^{x-x} = \frac{a^x}{a^x} = 1$.

1. $a^7 : a^3$; $a^8 : a^4$; $a^6 : a^9$; $a^x : a$; $a^{17} b^{25} : a^{20} b^{20}$.

2. $b : b^{x-1}$; $c^{x+y} : c^y$; $x^{n+1} : x$; $x^{n-1} : x^n$;

3. $a^n : a^{n+2}$; $b^x : b^{x-y}$; $b^x : b^{y-x}$; $b^{y-x} : b^y$; $b^{y-x} : b^x$.

4. $\frac{a^{17} b^{35} c^{11}}{a^{12} b^{40} c^{16}}$; $\frac{a^{4x} b^{7y} c^{3z-4}}{a^x b^{8y} c^{3z-5}}$; $\frac{a^{3-4x} b^{5+x}}{a^{5-6x} b^{3+2x}}$;

5. $\frac{x^{2n} y^{3n+1}}{z^{4n+2}} : \frac{x^{n-2} y^{4n-7}}{z^{4n+6}}$; $\frac{a^{r+n-1} b^{x-n+2}}{a^{r-n-2} b^{n+x-5}}$;

6. $\frac{a}{x^3} - \frac{1}{x^2}$; $\frac{a^2}{x^n} - \frac{4a}{x^{n-1}} + \frac{4}{x^{n-2}}$;

7. $\frac{(a+b)^{x+2}}{(a-b)^{2y-1}} \cdot \frac{(a-b)^{2-2y}}{(a+b)^{x+1}}$; $\frac{a^{x+y} b^{x-y}}{a^{x-y} b^{y-x}}$;

8. $\frac{m^{3a-x}}{m^{5a-5x}} \frac{m^{7a-2x}}{m^{2a+3x}} \cdot \frac{m^{4x-6a}}{m^{6x-4a}}$.

9. $\left(\frac{5 a^5 b^3 x^5}{3 a^2 b^9 x} - \frac{3 a^5 b^3 x^4}{4 a^4 b^5 x^5} + \frac{7 a^4 b^7 x^2}{5 a^5 b^5 x^8}\right) \cdot \left(\frac{4 a^2 b^2 x^2}{3 a b^3} + \frac{3 a^3 b^3 x^3}{5 a^4 x^6}\right)$;

10. $\left(\frac{a^5 b^2 x}{a^3 b^3 x} - \frac{a^7 x^4 y^3}{a^6 x^5 y} + \frac{b^7 x y^5}{b^5 x^3 y}\right) : \frac{a^4 b^4 x^4 y^4}{a^5 b^3 y^6 x^2}$;

11. $\frac{15 a^{2x-y} b^{3x-z}}{16 a^{4x+2y} b^{5z-3x}} : \frac{5 a^{3x-5y} b^{x+3z}}{8 a^{6x-3y} b^{7x-3z}}$;

12. $(a^{n+5} b^{7-n} - a^{3n-5} b^{3n+4} + a^{4-2n} b^{n+4}) : a^{2n-3} b^{3n-2}$;

13. $\left(\frac{a^5 b^3}{4 c^8} - \frac{3 a^2 b}{2 c^4} + \frac{4}{5 a b c} - \frac{9 c^3}{8 a^4 b^3}\right) : \frac{9 a^2 c^8}{20 b^5}$;

14. $\left(\frac{3 a y^2}{b x} - \frac{49 b^2 y}{15 a x^5}\right) : \frac{21 b y^3}{5 a^2 x^2} - \left(\frac{36 x^5}{49 a b^4} - \frac{2 x}{a^3 b y}\right) : \frac{18 y x^4}{7 a^4 b^2}$;

---

15. $(42 a^{12} x^{11} - 101 a^9 x^9 + 133 a^6 x^7 - 65 a^3 x^5) : (6 a^4 x^5 - 5 a x^3)$;

16. $\left(\frac{9 a^{20}}{b^{21}} - \frac{1}{a^2 b^3} + \frac{2 b^6}{a^{13}} - \frac{24 b^{15}}{a^{24}}\right) : \left(\frac{3 a^6}{b^6} + \frac{4 b^3}{a^5}\right)$;

17. $\left(\frac{9 a^3 x}{5 b^3} + \frac{7 a^2}{8 b} - \frac{393 a b}{100 x} - \frac{11 b^3}{180 x^2} + \frac{14 b^5}{15 a x^3}\right)$

$: \left(\frac{6 a x^2}{5 b^2} - \frac{3 x}{4} - \frac{2 b^2}{3 a}\right)$;

18. $\left(\frac{x^3 y^8}{z^7} - \frac{1}{6}\frac{x^2 y^5}{z^5} - \frac{x y^2}{z^3} + 2\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y z} - 11\frac{7}{9}\cdot\frac{z}{x y^4} + 8\frac{2}{3}\frac{z^3}{x^2 y^7}\right)$
$: \left(\frac{x y^4}{z^3} + 1\frac{1}{3}\frac{y}{z} - 2\frac{z}{x y^2}\right);$

19. $(a^{n+x} b^x - 4 a^{n+x-1} b^{2x} - 27 a^{n+x-2} b^{3x} + 24 a^{n+x-3} b^{4x})$
$: (a^x b^x - 7 a^{x-1} b^{2x});$

20. $(99 a^{6x-1} - 194 a^{5x} - 99 a^{4x+1} + 170 a^{3x+2} + 75 a^{2x+3})$
$: (9 a^{2x+1} - 7 a^{x+2} - 5 a^3);$

21. $(\frac{16}{3} a^{8m-12} b^{20-4m} - 24 a^{6m+2} b^{4m} + 27 a^{4m+16} b^{12m-20})$
$: (\frac{4}{3} a^{4m-6} b^{10-2m} - 4 a^{3m+1} b^{2m} + 3 a^{2m+8} b^{6m-10});$

22. $(a^{7x+9} y^{11x-14} - a^{x+3} y^{4-x}) : (a^{3x+6} y^{5x-8} - a^{x+4} y^{x-2});$

23. $\left(\frac{27 a^{4m-5} x^{10}}{125 b^{5-4m} y^{10}} + \frac{8 b^{4m+1} x y^5}{27 a^{5m-7}}\right) : \left(\frac{3 a^{2m-2} x^2}{5 b^{3+m}} + \frac{2 y^5}{3 a^{m-2} b^{m+1} x}\right).$

51.

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x.$$

Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Dignand mit dem Produkt aus Exponent und Zahl potenziert. Umgekehrt. Eine Zahl wird mit einem Produkt potenziert, indem man die Zahl mit dem einen Faktor potenziert und die erhaltene Potenz mit dem andern Faktor potenziert. Zusatz. Soll eine Größe nach einander mit zwei Zahlen potenziert werden, so ist die Ordnung der Zahlen beliebig.

Beweis: $(a^x)^y = a^x \cdot a^x \cdot a^x \ldots$ (y mal)
$= a^{x+x+x+} \ldots$ (y mal) $= a^{yx}$.

1. $(a^2)^3;\quad (a^2)^2;\quad (b^{x-1})^4;\quad (a^3)^2 \cdot (a^4)^3;\quad (a^2)^4 \cdot (a^3)^3;$

2. $\frac{(a^3)^5 (b^4)^3}{(a^4)^4 (b^5)^2};\quad \frac{32^3 \cdot (a^2)^4}{27^4 (a^3)^2} : \frac{4^7 (a^3)^5}{81^2 (a^5)^2};$

3. $(a^2)^4 (b^3)^2 + 3 (a^3)^4 (b^2)^4 - 2 (a^6)^2 (b^4)^2 - (a^4)^2 (b^2)^3;$

4. $\frac{(a^3)^4}{(a^3)^3} - 2\frac{(a^5)^3}{(a^3)^4} - 3\frac{(a^6)^4}{(a^3)^7} + 5\frac{(a^2)^9}{(a^3)^5};$

5. $a^2 \cdot \frac{(a^5)^4}{(a^3)^7 \cdot x} - 2x^2 \cdot \frac{(a^3)^8 (x^2)^4}{(a^5)^5 (x^3)^3} + 3x\frac{(a^2)^{11} (x^7)^4}{(a^7)^3 (x^6)^5} + 2a^2\frac{(a^6)^4 (x^{11})^3}{(a^3)^9 \cdot (x^2)^{16}};$

6. $(3^2)^2 ((a^2)^3)^2 - (2^3)^2 (a^3)^2)^2 - (2^2)^2 ((a^2)^2)^3;$

7. $\frac{27^3 (a^{2x-1})^2 (b^{3-4x})^3}{8^4 (a^{5-x})^3 (b^{3-5x})^4} \cdot \frac{16^3 (a^{4-x})^4 (b^{x-6})^2}{9^4 (a^{2x-3})^2 (b^{3x-5})^3};$

8. $\frac{25^3 (a^{2x+7})^4}{8^7 (a^{3-4x})^5} \cdot \frac{243^4 (a^{3x-1})^2}{125^2 (b^{3-5x})^3} : \frac{27^6 (a^{12x+4})^3}{16^5 (b^{2-3x})^2};$

9. $(a^{2x})^{2x-1} \cdot (a^{3x+4})^{2x} \cdot (a^{x+1})^{2-4x};$

10. $\frac{(a^{2x-y})^{3y+x}}{(a^{3x+y})^{2y-x}};\quad \frac{9^5 ((a^2)^3)^{x-1}}{4^6 ((b^2)^{2x-2})^3} \cdot \frac{8^3 ((a^3)^{2-x})^2}{81^2 (b^3)^{4-2x}};$

11. $\frac{(a^2)^{x-1}}{(b^{2-x})^3} : \left[\frac{(a^{x-1})^{x-2}}{(b^{x-2})^{x-3}} : \frac{(a^{x-2})^{x-2}}{(b^{x+1})^{x-2}}\right].$

Aufl.: **4.** a^3; **5.** $\frac{4a}{x}$; **6.** $9a^{12}$; **7.** $3a^{5-x}b^x$; **8.** $\frac{9b^{9x-5}}{2a^{2x+1}}$;
9. a^{6x^2+4x+2}; **10.** $a^{5x^2-5y^2}$; $\frac{9a^6}{8b^{6x}}$; **11.** $\frac{a^x}{b^{x-2}}$.

---

12. Beweise die Gültigkeit folgender Formeln:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$;
u. s. w. gültig für Differenzen gleich hoher Potenzen.
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;
$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$;
u. s. w. gültig für Summen gleich hoher ungerader Potenzen;
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$;
$a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
u. s. w. gültig für Differenzen gleich hoher gerader Potenzen.

13. Zerlege $a^{2x} - b^{2y}$, $a^{4x-2} - b^{6x-4}$;

14. Zerlege $a^{3x} - b^{3y}$, $x^6 + 27$, $x^8 - 81$, $x^6 - 216$;

15. Zerlege $a^{12} - b^{12}$, indem man es als Differenz zweier Quadrate, oder zweier Kuben, oder zweier vierten oder sechsten Potenzen ansieht.

16. Zerlege ebenso auf mehrere Arten: $a^4 - b^4$, $a^6 - b^6$, $a^8 - b^8$, $a^9 + b^9$, $a^9 - b^9$, $a^{15} + b^{15}$, $a^{18} - b^{18}$;

17. $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^4 - a^2b^2 + b^4} : \frac{a^3 - b^3}{a^6 + b^6}$.

52.

$(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Ein Produkt wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden Faktor mit der Zahl potenziert, und die erhaltenen Potenzen mit einander multipliziert. Umgekehrt: Potenzen mit gleichen Exponenten werden mit einander multipliziert, indem man die Dignanden mit einander multipliziert und das erhaltene Produkt mit dem gleichen Exponenten potenziert.

Beweis: $(ab)^m = ab \cdot ab \cdot ab \ldots$ (m mal)
$= a \cdot a \cdot a \ldots$ (m mal) $\cdot b \cdot b \cdot b \ldots$ (m mal)
$= a^m \cdot b^m$.

1. $(3ab)^2$; $(4ab^2)^3$; $(10a^2b^3)^4 \cdot (6a^2b)^2$; $(a^{x-1}b^{x+1})^2$;

2. $(2a-2b)^2 = 4(a-b)^2$; $(3a^4b-12a^3b^3)^2$; $(5ab^2-10a^2b)^2$;

3. $\frac{(3ab^2)^2(12a^2b^3)^3}{(9a^2b)^3(16ab^4)^2}$; $\frac{(35a^4x^3)^4(77a^2x^4)^6}{(11a^4x^2)^7(245ax^4)^5}$;

4. $\frac{(25a^2b)^3(4a-4b)^2}{(10a^2b)^4(6a+6b)^3} \cdot \frac{(48a^3b^3)^2(15ab+15b^2)^4}{(15ab^2)^4(10a-10b)^3}$; $\left[= \frac{4b(a+b)}{15(a-b)}\right]$

5. $\frac{(12a-18b)^5}{(27a+45b)^2} \cdot \frac{(12a+20b)^3}{(8a-12b)^6}$; $\left[= \frac{3(3a+5b)}{2(2a-3b)}\right]$

6. $\frac{(2a^2-4ab)^4}{(3ab^2-6a^2b)^6} : \frac{(8a^2b-16ab^2)^3}{(6ab^3-12a^2b^2)^5}$; $\left[= \frac{b(a-2b)}{3(b-2a)}\right]$

7. $\frac{(18a^3x+18a^2x^2)^5}{(21a^4x^3-21a^2x^5)^3} \cdot \frac{(14a^2x^3-14ax^4)^4}{(36a^4x^2+36a^3x^3)^3}$; $\left[= \frac{168x^2(a-x)}{a(a+x)}\right]$

8. $\frac{(x+x^2)^5}{(x^2-x^3)^2} : \frac{(x^2+2x^3+x^4)^4}{(x^3-x^5)^3}$; $[= x^2(1-x)]$

9. $\frac{(x^2+x^5)^4}{(x-x^3)^6} \cdot \frac{(x^2-2x^3+x^4)^3}{(x^2-x^3+x^4)^4}$; $\left[= \frac{1}{(1+x)^2}\right]$

10. $\frac{(x^2(x-x^2)^4)^3}{(x^3(x^2+x^3)^4)^2} : \frac{\left(x^2((1-x)(x-x^2)^3)^2\right)^3}{x\left(x^2(x^3-x^5)^3\right)^3}$; $\left[= \frac{x^6(1+x)}{(1-x)^3}\right]$

11. $\frac{(4(1-x)^4)^2}{(6(2-x)^2)^3} \cdot \frac{(54(4-x^2)^3)^2}{(12(3-3x^2)^2)^4} : \frac{(24(6+3x)^3)^2}{(18(6+6x)^3)^3}$; $[= \tfrac{2}{9}(1+x)]$

12. $\frac{4a(2a^2+ab)^2(5(ab-b^2)^8)^3}{(7a(3a^3-3ab^2)^3(8ab^2+4b^3)^5)^2}$

$\cdot \frac{\left[7ab\left(3(2a^2+ab)^2(4(a+b))^3\right)^2\right]^2}{125a\left(b(2a(a-b)^3)^2\right)^3}$; $\left[= \frac{b^3(a+b)^6}{9a^2}\right]$

13. $\frac{(25a^2b^5)^2(72a^7b^2x^4)^4}{(324a^{13}b^8x^5)^3} : \frac{(108a^2(10ax^4)^3)^2}{(75b^3(3a^2x^3)^4)^2}$; $\left[= \frac{25x}{8a}\right]$

14. $\frac{(15a^{m-3})^3(34a^{2-m})^4}{(51a^{5-3m})^2(10a^{m-3})^5}$; $\frac{(a^{5x-2}(a^{3y}b^{2-3y})^x)^2}{(a^{3x-1}(a^{2x}b^{3-2x})^y)^3}$;

15. $\frac{(2a(2b)^2)^2}{4b} - \frac{3ab(15a^2b)^2}{(3a)^3} + \frac{(3b(2a)^2)^3}{(3(2a)^2)^2}$; $[= 3a^2b^3]$

16. $\frac{(2(a^2)^2)^6}{(8(a^3)^4)^2} + \frac{(3(3a^2)^4)^5}{4\left(3(3(3a^2)^5)^2\right)^2} - \frac{(9a(6a^4)^2(9a^3)^3)^2}{(2(9a^3)^2(3a^2)^3)^3}$; $\left[= \frac{5}{12}\right]$

17. Zerlege $27a^{6x-3} - 8y^3b^{3x+9}$; $10000 - 81a^8$;
$16a^{4x+4} - 625a^{8-4x}$; $32x^5y^{10} - 243a^{20}$;

18. $\frac{a\left(a(a(a^2)^2)^3\right)^2}{((a^2)^3a)^2 \cdot (a^2 \cdot a^3)^3} + \frac{a^2\left[a^2\left(a^2(a^2(a^2)^2)^2\right)^2\right]^2}{\left[\left(((a^2)^2)^2\right)^4\right]^2}$; $\left[= a^4 + \frac{1}{a^2}\right]$

53.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Ein Quotient wird mit einer Zahl potenziert, indem man sowohl den Dividend als auch den Divisor mit der Zahl potenziert, und die erste Potenz durch die zweite dividiert. Umgekehrt. Zwei Potenzen mit gleichen Exponenten werden durch einander dividiert, indem man die Dignanden durch einander dividiert, und den erhaltenen Quotienten mit dem gleichen Exponenten potenziert.

Beweis: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots$ (m mal)

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots \text{(m mal)}}{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots \text{(m mal)}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Zusatz: $1^x = 1$; denn $1^x = \left(\frac{a}{a}\right)^x = \frac{a^x}{a^x} = 1$.

1. $(\frac{1}{2})^2$; $(\frac{2}{3})^3$; $(\frac{3}{4})^2$; $(1\frac{1}{2})^3$; $(2\frac{1}{4})^3$; $(1\frac{1}{5})^2$; $(1\frac{1}{4})^4$;

2. $\left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3 \left(\frac{1}{a b^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{b^5}{a}\right)^2$;

3. $(\frac{5}{3})^7 \cdot (\frac{7}{5})^3 \cdot (\frac{3}{2})^2 \cdot (\frac{6}{7})^2$; $(\frac{9}{16})^3 \cdot (\frac{8}{25})^2 \cdot (\frac{10}{3})^5$;

4. $\left(\frac{12\,a\,x}{25\,b\,c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5\,a\,c^2}{2\,b\,x}\right)^3$; $\left(\frac{a^{3x-5}}{b^{8-11x}}\right)^5 \cdot \left(\frac{b^{6-8x}}{a^{2x-3}}\right)^7$;

5. $\left(\frac{9\,a^3 b}{20\,c^2 d}\right)^4 \cdot \left(\frac{35\,c^3}{18\,a^2 b^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{16\,b^2}{21\,a^2 c\,d}\right)^2$;

6. Was wird aus $x^3 - 2y^2$ und aus $x^4 - 3xy^3 + 4y^4$, wenn $x = 1\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$?

7. Was wird aus $5x^2y + 2xy^2 - 3y^3$ und aus $x^2 + y^2 - x + y$, wenn $x = \frac{4}{5}$, $y = 2\frac{1}{3}$?

8. $\frac{(\frac{20}{9})^4 (\frac{6}{25})^6}{(\frac{16}{15})^3 (\frac{6}{75})^2}$; $\frac{(\frac{15}{16})^3 \cdot (13\frac{1}{2})^2}{(7\frac{1}{2})^6 \cdot (\frac{9}{20})^4}$; $\frac{(4\frac{1}{5})^4 : 7^2}{(\frac{9}{10})^3 : (1\frac{1}{14})^2}$;

9. $\frac{13^2 : (1\frac{4}{11})^3}{(11 \cdot 13)^2 : (2 \cdot 15)^3}$; $\frac{(\frac{3}{5})^3}{(\frac{9}{20})^2} - \left(\frac{7^2 : 225}{49 : 15}\right)^2$;

10. Zerlege $\frac{x^3}{y^3} - \frac{y^6}{x^6}$; $8\,a^3 - \frac{b^3}{8\,a^3}$; $\frac{a^4}{x^8} - \frac{x^8}{a^4}$; $\frac{1}{32} - \frac{1024}{x^5}$;

---

11. $\left[\left(\frac{a^3 b}{c^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2}{a}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{b^3}{c x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{a x^2}{b c^2}\right)^6\right]$; $\left[= \frac{c^3 x^2}{a}\right]$

12. $\left[\left(\frac{3\,a^4 b}{10\,c^4}\right)^5 \left(\frac{20\,x^2}{21\,a}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{64\,b^4}{25\,c\,x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{15\,a^3 x^2}{28\,b\,c^3}\right)^5\right]$; $\left[= \frac{14ab^2x^2}{2025c^3}\right]$

13. $\left[\left(\frac{2{,}5\,a^2 c}{2\frac{1}{3}\,b^2 x}\right)^3 : \left(\frac{11\frac{1}{9}\,c^3 x}{12\,b^4}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{3\,a^2 b^2}{1\frac{5}{9}\,c^3 x^2}\right)^5 : \left(\frac{6{,}25\,a^2}{1\frac{1}{6}\,c^3 x}\right)^2\right]$; $= 9x$

14. $\left(\frac{5\frac{4}{9}\,a^3 y^4}{2\,x^2}\right)^3 : \left[\left(\frac{5\frac{1}{3}\,a^4 x^3}{200\,y^4}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{100\,a^2}{3{,}5x^4 y^2}\right)^2 : \left(\frac{2\frac{2}{7}\,a\,x}{4\frac{2}{3}y^6}\right)^4\right)\right]$; $= 2a$

15. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{3}{x}\left(\frac{x}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{(3x^2)^2}{(2x)^3}\right)^2$; $\left[= -20\tfrac{1}{9}x^2\right]$

16. $\left(\frac{x^3}{0{,}2\,(3x)^2}\right)^2 + \left(\frac{1\frac{2}{3}x^2}{\left(x^2\left[\frac{1}{x}\right]^3\right)^2}\right)^3 \cdot \frac{1}{10\,x^{10}} - \left(\frac{1{,}5\,x^3}{(0{,}3x)^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{0{,}002}{x}\right)^2$;

17. $\frac{a^2 b}{3}\left(\frac{ab\,(4a)^2}{(2ab)^3}\right)^2 - \frac{8a^2\,(10\,(ab)^3)^2}{b(10b\,(2ab)^3)^2} + \frac{14}{81}\left(\frac{3}{b^3}\right)^3\left(\frac{(2a^2b^3)^2}{(2ab)^3}\right)^2$;

18. $\left(\frac{(x+x^2)^4}{(x^2-x^3)^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{(x^2-x^4)^4}{(x+x^2)^6}\right)^3$; $\left[=\frac{(1-x^2)^2}{x^6}\right]$

19. $\left[\left(\frac{(1-x)^2}{(1-x^2)^4} : \left(\frac{(1+2x+x^2)^3}{(1-x^3)^2}\right)^2\right)^3 : \left(\left(\frac{(1+x+x^2)^3}{(1-x^2)^4}\right)^2 : \left(\frac{(1+x)^5}{(1-x)^3}\right)^3\right)^2\right]^2$;

20. $\left(\frac{5\,(3a\,(20ax^4-30a^2x^3)^2)^2}{3\,(6x\,(21a^2x^2-28ax^3)^3)^2}\right)^4 : \left[\left(\frac{15\,(44ax^3-99a^3x)^3}{a^2x^3(24x(63a^3-112ax^2)^2)^2}\right)^3 : \frac{24\,(3a(44x^2+66ax)^3)^3}{25(30x(24a^2+32ax)^2)^5}\right]^2$;

Aufl.: **16.** $\frac{25x^2}{54}$; **17.** $\frac{5a^2}{4b^3}$; **19.** $\frac{(1-x)^8}{(1+x)^4}$; **20.** $\frac{a^4(3a+4x)^4}{4\,(2x-3a)^2}$.

---

21. $\frac{\left(\frac{a}{2b}-\frac{2}{3a}\right)^3}{\left(\frac{1}{3ab}-\frac{2b}{5a^2}\right)^4} \cdot \frac{\left(\frac{5a}{9b^3}-\frac{4b}{5a}\right)^3}{\left(\frac{3}{8b}-\frac{1}{2a^2}\right)^2}$; $\left[\frac{40a^6\,(3a^2-4b)\,(5a+6b^2)^4}{243b^6\,(5a-6b^2)}\right]$

22. $\frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^3}{\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}\right)^4} : \frac{\left(\frac{a}{b^3}-\frac{1}{a^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2}\right)^2}$; $\left[=\frac{ab^7\,(a-b)}{(a+b)^4}\right]$

23. $\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^3}{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)^3} : \frac{\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\frac{1}{x}+1+x\right)^4}$; $\left[=\frac{x^5(1+x)(1+x+x^2)}{(1-x)^2}\right]$

24. $\frac{\left(\frac{1}{4x^3}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{4x}\right)^3}{\left(\frac{3a^2}{8x^2}-\frac{a}{4x}\right)^4} : \frac{\left(\frac{2}{3x}-\frac{4}{3}+\frac{2x}{3}\right)^2}{\left(\frac{3}{4x}-\frac{4x}{3a^2}\right)^3}$;

25. $\frac{\left(\frac{3a}{20b^2}-\frac{b}{5a}\right)^4}{\left(\frac{3a}{25bc}+\frac{b}{10a^2}\right)^3} : \frac{\left(\frac{3a^4}{8b^4c^2}-\frac{2b^2}{3c^2}\right)^2}{\left(\frac{a}{10b^2c^2}+\frac{1}{12a^2c}\right)^4}$;

26. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)^5}{\left(\dfrac{1}{a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)^2} : \dfrac{\left(\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{1}{(a+b)^2}\right)^3}{\left(1+\dfrac{b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^4}{a^4-b^4}\right)^2}$;

27. $\left(\dfrac{\left(1+\dfrac{b}{a-b}\right)^3}{\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right)^4}\right)^2 : \left(\dfrac{\left(1+\dfrac{b^2}{a^2-b^2}\right)^2}{\left(\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-1\right)^3}\right)^3$;

28. $\left[\dfrac{1}{a^3}\left(\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{a^3}(a^2)^2\right)^3\right)^4\right]^2 + 2a^7\left[a^2\left(a^4\left(\dfrac{1}{a^3}\right)^2\right)^2\right]^3$
$+ a^3\left[\dfrac{1}{a^3}\left(a^3\left(\dfrac{1}{a}\right)^2\right)^2\right]^3$.

Aufl.: 26. $\frac{1}{8}a^2b(a^2-b^2)$; 27. $\dfrac{b^{10}(a+b)^5}{a^6(a-b)^9}$; 28. $(a+1)^2$.

54.

I. $a^0 = 1$; (50. Zus.) **II.** $1^x = 1$; (53. Zus.)

III. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$.

Eine Zahl wird mit einem negativen Ausdruck potenziert, indem man die Zahl mit dem Glied des negativen Ausdrucks potenziert und von der erhaltenen Potenz den reziproken Wert nimmt.

Umgekehrt (und verallgemeinert). Jede Potenz darf man als Faktor vom Zähler in den Nenner, oder vom Nenner in den Zähler setzen, wenn man das Vorzeichen ihres Exponenten ändert.

Zusatz: Ein Quotient wird mit einem negativen Ausdruck potenziert, indem man den reziproken Wert des Quotienten mit dem Glied des negativen Ausdruckes potenziert.

Beweis: $a^{-x} = a^{0-x} = \dfrac{a^0}{a^x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Zusatz: Es ist auch $\dfrac{1}{a^{-x}} = a^x$; $a^{x-y} = \dfrac{1}{a^{y-x}}$.

Damit ist auch definiert, was eine Potenz mit negativem Exponenten bedeutet.

---

1. $a^{2-x} \cdot a^{x-2}$; $a^{n+4} \cdot a^{3n-7} \cdot a^{3-4n}$;

2. $\left(\dfrac{a}{b}-1\right)^3\left(\dfrac{a}{a-b}\right)^3\left(\dfrac{b}{a}\right)^3$; $\left(\dfrac{y^{2n-1}x^3}{y^{5n-6}x^{2n-5}} \cdot y^{3n-5}x^{2n-8}\right)^6$;

3. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^5\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^5\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^5$;

4. $(a^{2x})^{2x-4} \cdot (a^{3x-1})^4 \cdot (a^{1-2x})^{2x+3} \cdot a$;

5. $(b^n)^n \cdot (b^n)^{n-1} \cdot (b^{1-2n})^n$;

6. $\left(\dfrac{x+y}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}\right)^4 \left(\dfrac{y-x}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)^4 \left(\dfrac{x+y}{x^3y^3}\right)^4$; [= 1]

7. $\left[\left(\left[\dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\right]^2 \cdot \dfrac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}\right)^4 \left(\dfrac{\left(\frac{a}{b}-1\right)^3}{\frac{a^3}{b}+a^2}\right)^4\right]^5$; [= 1]

8. $\dfrac{a^4x^{-3}}{a^{-2}x^2} \cdot \dfrac{a^{-1}x}{a^3x^{-2}}$; $\dfrac{a^3x^{2n-1}}{a^{-r-1}x^3} \cdot \dfrac{a^{-2r}x^{-3n}}{a^{3-r}x^{-4}}$;

9. $\dfrac{2a}{a^{-1}} + \dfrac{2a^{-1}}{3a^{-3}} - \dfrac{7a^6}{6(a^{-2})^{-2}}$; $\left(\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{c^{-1}d^5}\right)^{-2}\right)^{-5}$;

10. $5\tfrac{1}{2}ab^{-2} - \dfrac{4\frac{1}{4}b}{a^{-1}b^3} + \dfrac{3ab^{-2}}{4} - \dfrac{5b^{-2}}{2a^{-1}}$;

11. $\dfrac{7ax}{6a^4x^{-1}} - \tfrac{2}{3}x^2a^{-3} + \left(\dfrac{6a^3}{5x^2}\right)^{-1} - \dfrac{11a^{-2}}{12ax^{-2}}$;

12. $5a^2x^{-1} - 4a^{-1}x^2 + \left(\dfrac{3x}{4a^2}\right)^{-1} - \dfrac{5(ax)^{-2}}{3(ax^4)^{-1}} - \dfrac{5(a^2x(x^{-1})^2)^{-1}}{4(a^{-2})^2(x^{-1})^{-2}}$;

13. $\dfrac{2b^{-1}}{5a^{-1}b} + \dfrac{5(ab^2)^{-1}}{6a^{-2}} + \dfrac{7a(a^{-1}b^2)^{-2}}{15(a^{-2}b^2)^{-1}}$
$+ \dfrac{b^{-1}(a(a^{-2}b)^{-2})^{-1}}{3\frac{1}{3}(b^{-1}(b^{-2}(a^3b^{-3})^{-1})^{-2})^{-1}}$; $\left[= \dfrac{2a}{b^2}\right]$

14. $a(2x(b(2a)^{-1})^2)^{-1} - ((a^{-3}(bx^{-1})^2)^4(b^2(ax)^{-3})^{-3})^{-1}$;

15. $\dfrac{7a^xb^{-2}}{a} + \dfrac{5b^{-4}a^{2x+5}}{a^{x+6}b^{-2}} - \dfrac{11b^5a^{-3x}}{a^{1-4x}b^7} + \dfrac{a^{3-x}b^{-1}}{a^{4-2x}b}$;

16. $(5a^2b^{-3} - 4a^{-2}b^3)(5a^2b^{-3} + 4a^{-2}b^3)$;

17. $(1\tfrac{1}{2}a^{m+1/2}b^{1/2x-1} + 1\tfrac{2}{3}a^{2m+3}b^{x-1,5})$
$\cdot (1\tfrac{1}{2}a^{m+1/2}b^{1/2x-1} - 1\tfrac{2}{3}a^{2m+3}b^{x-1,5})$;

18. $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}} \cdot \dfrac{1-ab^{-1}}{1+a^2b^{-2}}$; $\dfrac{x^{-1}-1}{x^{-2}-1} : \dfrac{x^{-1}+1}{x^{-1}-x}$; $\left[= \dfrac{1}{a};\ = \dfrac{x(1-x)}{1+x}\right]$

19. $\dfrac{x^{-1}-1-x}{x-x^{-2}} : \left(\dfrac{x-1}{x^{-2}+x^{-1}+1} : \dfrac{x-x^{-1}}{x^{-2}-x^{-1}-1}\right)$; $\left[= \dfrac{x+1}{x-1}\right]$

20. $\dfrac{3x^{-1}-y^{-1}}{2^{-1}x^{-1}+y^{-2}} : \left(\dfrac{2y^{-2}+x^{-1}}{1-3^{-1}xy^{-1}}\right)^{-1}$; $\left[= \dfrac{6}{x}\right]$

21. $\left(\dfrac{(2a^{-1}-3b^{-1})^{-2}}{(2^{-1}a+3^{-1}b)^3}\right)^{-1} : \dfrac{(b^{-1}+1{,}5^{-1}a^{-1})^2}{(2a^{-1}b-3)^{-3}}$; $\left[= \dfrac{a^3(3a+2b)}{24(2b-3a)}\right]$

22. $\left(1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{-2} + \left(1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1}\right)^{-2} + 2ab^{-1}\left(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}\right)^{-1}$;

23. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^{-1}-\frac{1}{y}(x^{-1}+y^{-1})^{-2}+y(xy^{-1}-yx^{-1})^{-1}$;

24. $\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$;

25. $\frac{a+b}{\left(1-\frac{1}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-1}}-\frac{a-b}{\left(1+\frac{1}{a^{-1}-b^{-1}}\right)^{-2}}$;

Aufl.: 22. $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2$; 23. $\frac{2x^3y}{(y-x)(y+x)^2}$; 24. $2b$; 25. $2b(1+a)$.

IV. $(-1)^{2n}=1$; $(-1)^{2n+1}=-1$.

Eine negative Größe gibt auf gerade Potenz erhoben etwas positives, auf ungerade Potenz erhoben etwas negatives.

Beweis. $(-1)^{2n}=((-1)^2)^n=((-1)(-1))^n=1^n=1$;
$(-1)^{2n+1}=(-1)^{2n}\cdot(-1)=1\cdot(-1)=-1$.

Sind in einem Produkte einige Faktoren negativ, so betrachtet man die negativen Zeichen als negative Faktoren, -1, zählt ihre Anzahl und bestimmt nach derselben mittels obigen Gesetzes das Vorzeichen des Produktes.

---

26. $(-a^2)^5$; $(-b^{-3})^4$; $(((-a)^3)^4)^5$; $((-a)^{-3})^{-5}$;
$(((-a)^{-4})^{-6})^{-1}$; $\left(\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right)^{-4}$; $-(-(-(-a)^2)^3)^{-1}$;

27. $3(-a)^2-4(-a)^3\cdot a^{-1}-5a^{-2}:(-a)^{-4}$; $[=2a^2]$

28. $(2(-a)^3)^2-(4(-\frac{1}{2}a)^2)^3+(-2)^{13}(-(4a^{-1})^{-2})^3$; $[=5a^6]$

29. $(-2(a^{-2})^{-2})^3+(-a^{-2})^3+(-a^{-3})^2+(-8(-\frac{1}{4}a^{-3})^2)^{-2}$;

30. $\frac{(-3a^2)^{-2}b^3}{(-3a^2b^{-1})^{-3}}+\frac{2}{3}\left(\frac{a}{(1-4)^{-1}}\right)^2-\frac{b^2}{(2ab^{-1})^{-2}}-\frac{4a^2}{(1-2)^{-1}}$;

31. $\frac{(-4ab^0)^2}{-(-0{,}5a)^{-1}}-\frac{a^5(-\frac{1}{2}(-a)^2)^{-1}}{(0{,}5-2)^{-3}}$
$+\frac{4(-0{,}4a)^0((-a^{-2})^2)^{-2}}{(-(-1)^3(-a)^{-1})^{-5}}$; $[=-2\frac{3}{4}a^3]$

32. $\frac{(a^2+ab)^{-2}(-a^2+ab)^3(-ab^2-b^3)^{-6}}{b^2-ab)^4(-b^2+ab)^{-3}(b^3+ab^2)^{-7}}$; $\left[=-\frac{ab(a-b)^2}{a+b}\right]$

33. $\frac{(a^{-1}-x^{-1})^4(-a^{-2}+x^{-2})^{-3}(a^2x^2+ax^3)^{-3}}{(ax^{-1}-1)^4(a-a^{-1}x^2)^{-5}}$; $\left[=\frac{(a-x)^2}{a^6(a+x)}\right]$

34. $\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4\left(-x+\left(\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-1}\right)^{-3}\left(-x^{-1}+\frac{1}{x^{-4}}\right)^4}{\left(\frac{x^{-2}}{x^{-1}-x^{-2}}\right)^{-3}\left(-\left(x-\frac{1}{x}\right)^{-1}\right)^{-2}(-(x-(x^{-1}+x))^2)^{-3}}$;

35. $\dfrac{\left(\frac{1}{x-1}-(-x-1)^{-1}\right)^2\left((x-1)^2+(-x+1)^2\right)^{-1}}{\left(\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{-1}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^2x^2\right)^3(x^2+x^3)^{-1}}$.

Aufl.: **29.** $-4a^{12}$; **30.** $3a^2$; **34.** $1:x^9(x+1)$; **35.** $-x^4:4(1-x^2)^4$.

55.

Die zweiten und dritten Potenzen mehrgliedriger Ausdrücke.

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; (**17.**)

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2;$$
$$(a+b+c+d)^2 = ((a+b+c)+d)^2$$
$$= (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$$
$$= a^2+2ab+b^2$$
$$+2ab+2ac+c^2$$
$$+2ad+2bd+2cd+d^2$$
$$(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c+d)^2$$
$$+2ae+2be+2ce+2de+e^2 \text{ u. s. w.}$$

Man faßt diese Entwickelungen in folgende Regel zusammen: Wenn man das Quadrat eines mehrgliedrigen Ausdruckes bilden soll, so bildet man das Quadrat des ersten Gliedes und fügt für jedes folgende neue Glied hiezu die doppelten Produkte aus dem neuen Gliede und jedem der vorhergehenden Glieder und das Quadrat des neuen Gliedes. Oder: Das Quadrat eines mehrgliedrigen Ausdruckes ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder plus der Summe der doppelten Produkte je zweier Glieder.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Beweis. Man bilde $(a^2+2ab+b^2)(a+b)$.

Der Kubus eines Binomes ist gleich dem Kubus des ersten Gliedes, plus dem dreifachen Produkt aus dem Quadrat des ersten Gliedes mal dem zweiten, plus dem dreifachen Produkt aus dem ersten Gliede mal dem Quadrat des zweiten, plus dem Kubus des dritten Gliedes.

Setzt man statt $+b$ $-b$, so ist

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$
$$(a+b+c)^3 = ((a+b)+c)^3$$
$$= (a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c$$
$$+3ac^2+3bc^2+c^3$$
$$= a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2$$
$$+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3;$$
$$(a+b+c+d)^3 = (a+b+c)^3+3(a+b+c)^2d+3(a+b+c)d^2+d^3$$
$$= (a+b+c)^3$$
$$+3a^2d+6abd+3b^2d+6acd+6bcd+3c^2d$$
$$+3ad^2+3bd^2+3cd^2+d^3.$$

So kann man weiterfahren und findet die Regel: Der Kubus eines mehrgliedrigen Ausdruckes besteht

1) aus den Kuben der einzelnen Glieder,
2) aus den dreifachen Produkten von je einem Gliede mal dem Quadrate jedes anderen,
3) aus den sechsfachen Produkten von je drei Gliedern.

Allgemein:

$$(a+b+c+d+\ldots)^3$$
$$= a^3+b^3+c^3+d^3+\ldots\ldots$$
$$+3a^2b+3a^2c+3a^2d+\ldots\;+3b^2a+3b^2c+3b^2d+\ldots$$
$$+3c^2a+3c^2b+3c^2d+\ldots\ldots\ldots$$
$$+6abc+6abd+\ldots\;+6bcd+\ldots\ldots$$

Man zieht es oft vor, den Kubus eines mehrgliedrigen Ausdruckes durch Zusammenfassung der Glieder aus dem Kubus des zwei= (oder drei=) gliedrigen Ausdruckes zu entwickeln.

56.

1. $(3a^2-4b^2)^2$; $(5ax+3bx^2)^2$; $(0{,}4-0{,}5x^2y^2)^2$;

2. $(\frac{3}{4}a^2b+0{,}2ab^2)^2$; $(\frac{7}{12}ax^3-\frac{4}{5}a^2x)^2$;

3. $\left(-x^2+\frac{2}{x^2}\right)^2$; $\left(\frac{2a}{b^2}-\frac{3b}{a^2}\right)^2$; $\left(\frac{-5a^3}{4x^2}-\frac{7a^2}{10x^3}\right)^2$;

4. $\left(\frac{9ax^2}{14y^3}-\frac{7ay^2}{6x^2}\right)^2$; $(a^x+b^x)^2$; $(a^x-b^y)^2$;

5. $(x^{n-1}-x^{n+1})^2$; $\left(\frac{2x^n}{y}-3x^{1-n}y^2\right)^2$;

6. $(a^{m+1}b^{m-1}-a^{m-1}b^{m+2})^2$; $\left(\frac{a^{x+1}}{b^{y-1}}+\frac{b^{y+1}}{a^{x-1}}\right)^2$;

7. $(x-x^{-1})^2$; $(-x^{-2}+x^2)^2$; $(-x^{-1}-x)^2$.

8. $(a^2+ab+b^2)^2$; $(x^2-x-1)^2$; $(2y^2+1\frac{1}{2}y-1)^2$;

9. $(2\frac{1}{2}x^3-1\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x)^2$; $(6x^3y^3+7x^2y^5-8xy^7)^2$;

10. $(0{,}2-0{,}1xy+0{,}4x^2y^2)^2$; $(0{,}8x^4-0{,}2x^3+0{,}05x^2)$;

11. $\left(\frac{4a}{9}-\frac{3b}{4}+\frac{2b^2}{3a}\right)^2$; $\left(\frac{3c^3}{4a}-\frac{7c}{2b}-\frac{5a}{3b^2c}\right)^2$;

12. $\left(\frac{2}{x}+1-\frac{x}{2}\right)^2$; $\left(\frac{6a^7}{5b^2c^6}+\frac{10ab^2}{3c}+\frac{5b^6c^4}{6a^5}\right)^2$;

13. $\left(\frac{7b^8x^2}{12a^7y^5}-\frac{8b^3y}{9a^2x^4}-\frac{3a^3y^7}{4b^2x^{10}}\right)^2$; $(a^x+1+a^{-x})^2$;

14. $(a^{2x}+a^{x+y}+a^{2y})^2$; $(a^{x-1}b^y-a^xb^{y+1}+a^{x+1}b^{y+2})^2$;

15. $(x^{n-1}+2x+x^{3-n})^2$;

16. $(x^{n+r}y^{2r+1}-x^{n-r+1}y^{2+r}-x^{n-3r+2}y^3)^2$;

17. $(5x-3x^2+6x^3-2x^4)^2$; $\left(x^2+x-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2$;

18. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^2$; $(\frac{2}{3}y^4 - 0{,}4y^3 + 1\frac{1}{2}y^2 - 1\frac{3}{4}y)^2$;

19. $\left(1\frac{1}{3}\frac{a^4}{b^5y^3} - 0{,}5\frac{a}{b^4y} + 2\frac{1}{2}\frac{y}{a^2b^3} - \frac{5y^3}{6a^5b^2}\right)^2$;

20. $(3\frac{1}{2}x^3 - 2\frac{2}{3}x^2y - 1\frac{4}{5}xy^2 + 4\frac{1}{2}y^3)^2$;

21. $\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{x^5}\right)^2$;

22. $\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6}\right)^2$;

23. $(a^{2n-3} - a^{n-1} + a - a^{3-n})^2$;

24. $(a^{3x} - 3a^{2x+y} + a^{x+2y} - a^{3y})^2$;

25. $(a^{3n-3r}b^7 + a^{n-2r}b^3 + a^{-n-r}b^{-1} - a^{-3n}b^{-5})^2$;

26. $\left(\frac{a^{5x-3}}{y^{4-4x}} - \frac{a^{x+1}}{y^{2-x}} - \frac{y^{-2x}}{a^{3x-5}} + \frac{y^{2-5x}}{a^{7x-9}}\right)^2$;

27. $(a^{n+2} + a^{n-1} + a^n + a^{n+1} + a^{n-2})^2$.

Zeige in **28.** bis **32.** die Gleichheit.

28. $(aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 = (a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2)$;

29. $(aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 + a_1^2c^2 + b_1^2c^2$
$= (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2)$;

30. $(aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 + (ac_1 - ca_1)^2 + (bc_1 - cb_1)^2$
$= (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$;

31. $(aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1)^2$
$+ (ac_1 - bd_1 - ca_1 + db_1)^2 + (ad_1 + bc_1 - cb_1 - da_1)^2$
$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)$;

32. $(a^2 + b^2x)(a_1^2 + b_1^2x) = (aa_1 + bb_1x)^2 + x(ab_1 - ba_1)^2$;

33. $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$;

34. $\frac{a^2 - 3ab + ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}$;

35. $\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$; $\left[= \frac{a+b}{(c+a-b)(c-a+b)}\right]$

---

36. $(a^2b + 2ab^2)^3$; $(5x^3y^2 + 3xy^5)^3$; $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2x}\right)^3$;

37. $(0{,}2a^2x^2 - 0{,}3)^3$; $(0{,}9 - 0{,}4a^2x)^3$; $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3x^2y}{4}\right)^3$;

38. $\left(\frac{9a^2x}{2b} + \frac{2ab^2}{3x^3}\right)^3$; $\left(\frac{8a^4b^5}{9x^3y^6} - \frac{7a^3y^7}{12x^4b^{12}}\right)^3$;

39. $(a^n + b^n)^3$; $(a^{x+1} - a^{2-x})^3$; $(x - x^{-1})^3$;

40. $(x^{-1} - x)^3$; $(-x^{-2} - x^2)^3$; $(x + x^2 - x^3)^3$;

41. $\left(ab - a^2 + \frac{a^3}{b}\right)^3$; $\left(5a - 4x + \frac{6x^2}{a}\right)^3$;

42. $(1 - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a^2 - a^3)^3$; $\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x}\right)^3$;

43. $(\frac{1}{4}a^2 - 3a + 9)^3$; $(1 - x + x^2 - x^3)^3$;

44. $\left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 + 5x\right)^3$; $(a^3 + 4a^2x^2 - 5ax^4 - 2x^6)^3$;

45. $\left(\frac{a}{x^2} - 2 + \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{a^2}\right)^3$;

46. $\left(\frac{3a^5y}{2b^3x^2} + \frac{4a^4x^2}{3by^3} - \frac{5a^3bx^6}{4y^7}\right)^3$; $\left(\frac{a^2x^3}{2by^3} - \frac{x}{b^2} + \frac{2y^3}{a^2b^3x}\right)^3$;

47. $(a^{2x-5} - a^{x-1} + a^3)^3$; $(a^{6-4n} - 2a^{2+n} + a^{6n-2})^3$;

48. $(b^{x+2y} - b^{y+1} - b^{2-x})^3$; $(a^{n-1}b^{3-n} + a^{2-n}b - a^{5-3n}b^{n-1})^3$.

---

49. $(a+b)^4$; $(1-2x)^4$; $(0{,}5x - 3)^4$; $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^4$;

50. $(a+b)^6$; $\left(\frac{2}{a} - 3a\right)^6$; $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$; $\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b}{2a^2}\right)^6$;

51. $(a+b)^9$; $\left(x - \frac{y}{x}\right)^9$; $\left(\frac{b}{a} + 1\right)^9$.

57.

Die zweiten und dritten Potenzen von Zahlen.

Jede zweiziffrige Zahl, z. B. 34, kann angesehen werden als ein Binom, $3 \cdot 10 + 4$. Entwickelt man also das Quadrat der Zahl als Quadrat des Binoms, so bekommt man

$$\begin{array}{rl} 34^2 = 3^2 \cdot 100 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 + 4^2 = & 9\cdot\cdot \\ & 24\cdot \\ & 16 \\ \hline 34^2 = & 1156 \end{array}$$

Für die dreiziffrige Zahl, z. B. 345, kann man eine ähnliche Zerlegung machen, z. B. $34 \cdot 10 + 5$, und hat:

$$\begin{array}{rl} 345^2 = 34^2 \cdot 100 + 2 \cdot 34 \cdot 5 \cdot 10 + 5^2 = & 1156\cdot\cdot \\ & 340\cdot \\ & 25 \\ \hline 345^2 = & 119025 \end{array}$$

Verfährt man ebenso bei der vier- und fünfziffrigen Zahl und fährt so fort, so ersieht man die Regel: **Um das Quadrat einer mehrziffrigen Zahl zu bilden, bildet man das Quadrat der ersten Ziffer und fügt für jede folgende neue Ziffer bei das doppelte Pro-**

dukt der neuen Ziffer mal der links von ihr stehenden Zahl, und das Quadrat der neuen Ziffer, schreibt die so erhaltenen Zahlen so unter einander, daß man stets um eine Stelle nach rechts rückt, und addiert schließlich.

$$\begin{array}{rrl}
34567^2 = & 9\cdots\cdots\cdots & = 3^2 \\
& 24\cdots\cdots\cdots & = 2.3.4 \\
& 16\cdots\cdots & = 4^2 \\
& 340\cdots\cdots & = 2.34.5 \\
& 25\cdots\cdot & = 5^2 \\
& 4140\cdots & = 2.345.6 \\
& 36\cdot\cdot & = 6^2 \\
& 48384\cdot & = 2.3456.7 \\
& 49 & = 7^2 \\
\hline
& 1194877489 &
\end{array}$$

Hat die Zahl Nullen, so sind statt jeder Null in der Entwickelung zwei Nullen zu setzen, eine für das doppelte Produkt, eine für das Quadrat.

$$\begin{array}{rr}
708006^2 = & 4900 \\
& 1120 \\
& 640000 \\
& 849600 \\
& 36 \\
\hline
& 501272496036
\end{array}$$

Dezimalbrüche werden quadriert, indem man ihre bedeutenden Ziffern ohne Rücksicht auf das Komma quadriert, und im Resultat doppelt so viele Stellen abschneidet, als der Dezimalbruch hatte.

Beispiele. $15{,}6^2 = 243{,}36$; $1{,}038^2 = 1{,}077444$; $948{,}53^2 = 899709{,}1609$; $0{,}030075022^2 = 0{,}000\,904\,506\,828\,000\,4$;

Quadriere: 748; 5,03; 0,02007; 47,31; 51184; 0,99834; 1,0045; 20,0409 u. s. w.

Kubus einer Zahl.

Um den Kubus einer zweiziffrigen Zahl zu finden, z. B. 54^3, betrachtet man sie auch als Binom, $5 \cdot 10 + 4$, und entwickelt ihren Kubus.

$$\begin{array}{rl}
(5 \cdot 10 + 4)^3 & = 5^3 \cdot 1000 + 3 \cdot 5^2 \cdot 100 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 4^2 + 4^3 \\
& = 125\cdots \\
& 300\cdot\cdot \\
& 240\cdot \\
& 64 \\
\hline
& 157464
\end{array}$$

Beim Untereinanderschreiben der einzelnen Teile der Ent-

wickelung hat man also, um dem Stellenwert der Teile zu genügen, jeden folgenden Teil um eine Stelle weiter nach rechts zu setzen.

Eine dreiziffrige Zahl z. B. 547 zerlegt man in ein Binom z. B. $54 \cdot 10 + 7$, behandelt sie ebenso und hat:

$$\begin{array}{rl}
547^3 = & 54^3 \cdot 1000 + 3 \cdot 54^2 \cdot 100 \cdot 7 + 3 \cdot 54 \cdot 10 \cdot 7^2 + 7^3 \\
= & 157464 \\
 & 61236 \\
 & 7938 \\
 & 343 \\
\hline
547^3 = & 163667323
\end{array}$$

Indem man ebenso für die vier= fünfziffrige Zahl verfährt, findet man die Regel:

Um den Kubus einer mehrziffrigen Zahl zu finden, bildet man den Kubus der ersten Ziffer und fügt für jede folgende, neue Ziffer bei: das dreifache Produkt aus der neuen Ziffer mal den Quadrat der vor ihr stehenden Zahl, und das dreifache Produkt aus dem Quadrat der neuen Ziffer, mal der vor ihr stehenden Zahl und den Kubus der neuen Ziffer; dabei schreibt man jedes folgende Glied der Entwickelung um eine Stelle weiter nach rechts und addiert schließlich. Beispiel:

$$\begin{array}{rll}
4975^3 = & 64\cdots\cdots\cdots & = 4^3 \\
 & 432\cdots\cdots\cdots & = 3 . 4^2 . 9 \\
 & 972\cdots\cdots & = 3 . 4 . 9^2 \\
 & 729\cdots\cdots & = 9^3 \\
 & 50421\cdots\cdots & = 3 . 49^2 . 7 \\
 & 7203\cdots & = 3 . 49 . 7^2 \\
 & 343\cdots & = 7^3 \\
 & 3705135\cdots & = 3 . 497^2 . 5^2 \\
 & 37275\cdot & = 3 . 497 . 5^2 \\
 & 125 & = 5^3 \\
\hline
 & 123134359375 &
\end{array}$$

Für jede Null der Zahl schreibt man drei Nullen in der Entwickelung. Bei Dezimalbrüchen verfährt man ohne Rücksicht auf das Komma und streicht im Resultat dreimal so viel Stellen ab, als der Dezimalbruch hatte.

$14{,}2^3 = 2863{,}288$; $8{,}07^3 = 525{,}557943$;
$35{,}17^3 = 43502{,}789413$.

Anhang.

Vermischte Übungsbeispiele.

1. $[(36a^4 - 16a^2b^2) : (40abx^3 - 50b^4x^2)]$
$: [(48a^2b^4 - 162a^5b) : (25b^5x - 20ab^2x^2)]$;

2. $\frac{ax - bx}{ab - ac + bc} - \frac{x}{c} + \frac{abx}{ac^2 - abc - bc^2}$; $\left[= -\frac{2x}{c}\right]$

3. $\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a^3 - a^2b} + \frac{a^3 - 2a^2b + ab^2}{a^3 - b^3} - \frac{a^3 + b^3}{a^3 + a^2b} + 2$;

4. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} - \frac{8 - 12x + 6x^2 - x^3}{2x^3 - 8x^2 + 8x} - \frac{x^3 - 8}{x^3 - 4x}$;

5. $\left[\frac{a}{2a + 3} - \frac{2a^2 - 10a + 12}{8a^2 - 12a} : \frac{3a - 9}{4a - 6}\right] : \frac{2a - 4}{6a + 9}$;

6. $(25a^7x^3 - 80a^6x^5 + 68a^5x^7 + 8a^4x^9 - 42a^3x^{11} + 143a^2x^3$
$- 326ax^{15} + 204x^{17}) : (5a^3x^2 - 7a^2x^4 - 10ax^6 + 12x^8)$;

7. $\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right) : \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$;

8. $\left(\frac{x^{n+1}}{y^{1-n}} + x^n y^{n+1} + \frac{y^{n+3}}{x^{1-n}}\right)\left(\frac{x^n}{y^{2+n}} - \frac{1}{x^{1-n}y^n} - \frac{y^{2-n}}{x^{2-n}}\right)$;

9. $\frac{3b^2c + 2ax^2}{6abc^2x} - \frac{8b^2c^3 - 7ac^2x^2 + 7bx}{14acx^2} - \frac{7ax^3 - 12b^3c^4}{21abc^2x^2}$;

10. $\frac{14ac^2 + 15a^2bx^3}{35bc^4x^2} - \frac{14c^5x^2 - 14a^2b^3c^3x + 9a^4b^3x}{21a^2b^3c^4}$;
$- \frac{6a^3b^2 - 10c^3x^4}{15a^2b^3c^2x^2}$;

11. $\left[\left(\frac{b^2}{2a^2} + \left(\frac{3}{10c} + \frac{b}{2a}\right)\left(\frac{2}{3c} - \frac{b}{a}\right)\right)\right.$
$\left. : \frac{4ab^2}{9c^4} + \frac{c^2}{5ab}\left(\frac{c}{8a} - \frac{7}{4b}\right)\right] : \left(\frac{c}{10a} - \frac{1}{10b}\right)$;

12. $\left(\frac{x^{-2}}{-x(x^{-1})^2}\right)^2 - (x - x^{-1})^2 - \frac{-\left(-x\left(-x^{-1}(-x^{-5})^{-1}\right)^{-1}\right)^{-2}}{\left(x^{-2}\left(x^{-1}(x^{-1})^{-2}\right)^{-2}\right)^{-1}}$;

13. $\left[\frac{32a\left(\frac{5}{2}a^2\left(\frac{2}{3}b^2\right)^3\right)^{-2}}{3\left(\frac{1}{3}b^{-2}\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^2\right)^{-1}}\right]^2 : \left[\frac{\frac{5}{4}a^8\left(\frac{2}{3}b\left(\frac{5}{4}ab^{-2}\right)^{-1}\right)^2}{\frac{4}{5}a^2\left(\frac{5}{3}b^2\left(\frac{3}{2}a^2b^{-1}\right)^{-1}\right)^{-2}}\right]^{-2}$;

14. $\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} - \frac{1}{b^3}\right) : \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right)$; $\left[= \frac{ab}{a+b}\right]$

15. $\frac{a - b}{a^{-1} - b^{-1}} - \left(\frac{1}{a^{-1} + b^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a + b}\right)^{-1} + (a^{-1} - b^{-1})^{-2}$;

16. $\left(\frac{21a^6}{b^5xy^2} - \frac{8a^4}{b^2y} - 97a^2bx + 46b^4x^2y + \frac{86b^7x^3y^2}{a^2} - \frac{48b^{10}x^4y^3}{a^4}\right)$
$: \left[\frac{7ay^3}{b^3x^2} + \frac{9y^4}{ax} - \frac{8b^3y^5}{a^3}\right]$;

17. $(20a^{-5}b^6 - 47a^{-3}b^3 + 75a^{-1} - 58ab^{-3} + 12a^3b^{-6} + 8a^5b^{-9})$
$: (5a^{-2}b^2 - 8b^{-1} + 4a^2b^{-4})$;

18. $\left[\frac{2a+b}{a-4b} - \left(\frac{4a^3}{5b^2} + \frac{6a^2}{5b}\right) : \frac{4a^2}{5b}\right]^2 : \frac{b^2}{a^2-16b^2}$
$- \frac{a^2-5ab-36b^2}{ab-4b^2} \cdot \frac{a^3}{b^3}$;

19. $\left[\left(\left(\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b}\right)^2\right)^2 - 2 + b\right]^2 : (4 - b^2)$;

20. $\frac{1+a}{1-\frac{1}{1-a}} + \frac{1-a^2}{a+\frac{1}{a-\frac{1}{a}}}$; $\left[= \frac{a^2-1}{a^3}\right]$

21. $\frac{1+a^{-1}}{a^{-1}-1} - \frac{1-a^{-1}}{a^{-1}+1} + \frac{a+a^{-1}}{a-a^{-1}}$; $\left[= \frac{1+a^2}{1-a^2}\right]$

22. $\frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 - 1} - \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + 1}$;

23. $\left[\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{b^4}\right]^2 : \left[\left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{1}{b^2}\right)^2 - \frac{1}{a^4}\right]^2$
$- \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 : \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$;

24. $\left[\left(\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right)^2 - 2\right]^2 : \left[\left(2 - \left(2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2\right)^2 - 2\right]$;

25. $\frac{(a^4 - 2a^2b)(a^2b + b^3) - (a^3 + ab^2)(2a^3b - ab^2)}{a^6b^2 + 2a^4b^4 + a^2b^6}$;

26. $x^3 : \left(\frac{x-x^2}{x-1}\right)^4 + \frac{(x^2-x^3)^3}{(x^3+x^4)^2} \cdot \frac{x^2+x^3}{x^4-x^2}$
$+ \left(\frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2}{\frac{1}{x}+1} : \frac{x^4-x^2}{x^5+x^6}\right)^2$;

27. $\left(a^4 - a + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^4}\right)$
$- \left(a^5 - a^2 - \frac{3}{a} + \frac{5}{a^4} - \frac{2}{a^7}\right) : \left(a^2 + \frac{1}{a} - \frac{2}{a^4}\right)$;

28. $$\left[\left(\frac{a^4 b^4}{(a+b)^7} : \left(\left(\frac{ab}{a^2-b^2}\right)^2 \frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)^2 : \frac{ab}{a+b}\right]^2 - \left[\frac{a^2 b^4}{(a+b)^5} : \left(\frac{(a-b)^4}{a^2 b^2} : \left(\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2 \frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)^2\right]^2;$$

Aufl.: 1. $\frac{(3a+2b)}{3x(9a^2+6ab+4b^2)}$; 3. $\frac{3a^3+ab^2-b^3}{a(a^2+ab+b^2)}$; 4. $\frac{x^3+6x^2+4x+24}{2x(x^2-4)}$; 5. $\frac{a^2+a+6}{2a(a-2)}$; 6. $5a^4x-9a^3x^3+11a^2x^5-13ax^7+17x^9$; 8. $x^{2n+1}y^{-3}-x^{2n-1}y^{-1}-2x^{2n-2}y^3-x^{2n-3}y^5$; 9. $\frac{1}{2}c$; 10. $\frac{2x}{3c}$; 11. $\frac{c^2(bc+a)}{ab(bc-a)}$; 12. 2; 13. $4a^2$; 15. $\frac{4a^3b^3}{(a^2-b^2)^2}$; 16. $\frac{3a^5x}{b^2y^5}-\frac{5a^3bx^2}{y^4}-\frac{4ab^4x^3}{y^3}+\frac{6b^7x^4}{ay^2}$; 17. $4a^{-3}b^4-3a^{-1}b+7ab^{-2}+2a^3b^{-5}$; 18. $\frac{(a+4b)(25a^2+252ab+196b^2)}{4b^2(a-4b)}$; 19. $\frac{2-b}{2+b}$; 22. $-\frac{4(1+x)^2(1+x^2)}{x(2+x)(1-x)^2(2+2x+x^2)}$; 23. $\frac{(a+b)^2(a^4-b^4)}{(a-b)^2a^2b^2}$; 24. $\frac{x^{16}+2x^8+1}{x^{16}+1}$; 25. $\frac{-a^2-b}{b(a^2+b^2)}$; 26. $\frac{1}{x}$; 27. $\frac{a^3-1}{a^6}$; 28. $\frac{(a-b)^9}{a^4b^2(a+b)}$.

2. Abschnitt. Radizieren.

58.

Radizieren heißt, aus einer gegebenen Potenz und dem gegebenen Exponent den Dignand suchen. (Das Zeichen des Radizierens ist $\sqrt{}$, unter welches die Potenz, über welches der Exponent geschrieben wird).

I. $\sqrt[x]{a^x} = a.$

Dies enthält die *Rechnungsregel*: Wenn man eine Potenz mit ihrem Exponenten radiziert, so erhält man den Dignanden.

Die gegebene Potenz heißt *Radikand*, der gegebene Exponent heißt *Radikator* oder *Wurzelexponent*,*) der gesuchte Dignand heißt *Wurzel*. *Eine Wurzel ist also eine Zahl, welche mit dem Radikator potenziert den Radikanden gibt.*

II. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Dies enthält die *Rechnungsregel*: Wenn man eine Wurzel mit ihrem Radikator potenziert, so erhält man den Radikanden.

Umgekehrt: I. Eine Zahl kann man als Wurzel schreiben, indem man sie mit einer beliebigen Zahl potenziert und die erhaltene Potenz mit derselben Zahl wieder radiziert. II. Eine Zahl kann man als Potenz schreiben, indem man die Zahl mit einer beliebigen

*) Auch Wurzelzeiger oder Index; veraltet).

Zahl radiziert und die erhaltene Wurzel mit derselben Zahl wieder potenziert. Zusammengefaßt: Die Operationen des Potenzierens und Radizierens heben sich auf.

Der Definition gemäß erscheint das Radizieren als eine Umkehrung des Potenzierens und löst die Aufgabe, eine Zahl in eine gegebene Anzahl gleicher Faktoren zu zerlegen.

Eine zweite Wurzel heißt auch Quadratwurzel; bei ihr wird der Wurzelexponent nicht geschrieben; eine dritte Wurzel heißt auch Kubikwurzel.

Eine erste Wurzel aus einer Zahl ist die Zahl selbst. $\sqrt[1]{a} = a$.

Will man untersuchen, ob eine Wurzel die richtige sei, so hat man nach II zu untersuchen, ob sie mit dem Wurzelexponent potenziert den Radikanden gibt. Z. B. $\sqrt[3]{64} = 4$ ist richtig, dann $4^3 = 64$.

Daraus folgt, daß jede Quadratwurzel zweierlei Werte hat; denn $\sqrt{9} = 3$, da $3^2 = 9$, und $\sqrt{9} = -3$, da $(-3)^2 = 9$. Jede Quadratwurzel hat zwei nur dem Vorzeichen nach verschiedene Werte, welche beide gleich berechtigt sind. Wir werden später sehen, daß jede 3. Wurzel drei Werte hat, jede 4. Wurzel deren vier u. s. w. Meist ist unter den verschiedenen Werten, welche eine Wurzel haben kann, schon durch die Natur der Aufgabe eine Auswahl getroffen, und es wird daher bis auf Weiteres angenommen, daß in den folgenden Aufgaben über das Vorzeichen einer Quadratwurzel schon verfügt sei, so daß jede Quadratwurzel aus einer Zahl eindeutig mit dem Zeichen zu nehmen ist, welches vor ihr steht. Es bedeutet also $6 + \sqrt{25} = 6 + 5 = 11$ und $6 - \sqrt{25} = 6 - 5 = 1$; ist über das Vorzeichen noch nicht verfügt, so setzt man der Quadratwurzel ein $\pm$ Zeichen vor, schreibt also $6 \pm \sqrt{5}$ und diesem Ausdruck kommen dann zwei Werte zu nämlich 11 und 1. Bei höheren Wurzeln sei immer nur derjenige Wert gemeint, der als der nächstliegende und einfachste sich ergibt; z. B. $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[4]{625} = 5$, $\sqrt[6]{64} = 2$.

Wegen der Vieldeutigkeit jeder Wurzel ist die Umkehrung von I nur eingeschränkt gültig.

III. Wenn $a = b$ und $m = n$, so ist $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b}$. Beweis wie in **3** (doch nur eingeschränkt gültig, wegen der Vieldeutigkeit der Wurzeln). D. h. Gleiches mit Gleichem radiziert gibt gleiches.

IV. Ist $a^x = b^x$ und radiziert man beiderseits mit x, so hat man (nach I) $a = b$. D. h. Sind in gleichen Potenzen die Exponenten gleich, so sind auch die Dignanden gleich. (Eingeschränkt gültig).

V. Ist $\sqrt[x]{a} = \sqrt[x]{b}$ und potenziert man beiderseits mit x, so erhält man (nach II) a = b. D. h. Sind in gleichen Wurzeln die Exponenten gleich, so sind auch die Radikanden gleich.

Zusatz. $\sqrt[1]{a} = a$, da $a^1 = a$.

---

1. $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{484}$; $\sqrt{10000}$;

2. $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{0{,}008}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{625}$;

3. $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[7]{10000000}$; $\sqrt[4]{81}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt[5]{1024}$;

4. $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{r^2}{4}}$;

5. $\sqrt[x]{b^{2x}}$; $\sqrt[m]{a^{3m}}$; $\sqrt[4]{a^{4a-8}}$; $\sqrt[7]{a^{21x-14}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12x-18}}}$;

6. $\sqrt{(a+b)^2}$; $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$; $\sqrt[4]{(a+b)^8}$; $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)^3}$;

7. $\sqrt[3]{1-3x+3x^2-x^3}$; $\sqrt[2x]{a^{4x+6x^2}}$;

8. $(\sqrt{3})^2$; $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$; $(\sqrt[4]{7a})^4$; $(\sqrt[3]{a+b})^3$; $(\sqrt[4]{1+x})^8$;

9. $\sqrt[4]{(1-x)^4} + 2\sqrt{(1-x)^2} - 3\sqrt[3]{(1-x)^3}$;

10. $2a\sqrt[3]{(a+b)^3} - 2b\sqrt{a^2-2ab+b^2} + 3a^2\sqrt[5]{\left(1+\frac{b}{a}\right)^5}$;

11. $(\sqrt{a}-\sqrt{2b})(\sqrt{a}+\sqrt{2b}) = \mathbf{a-2b}$; $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$;

12. Zerlege ebenso $x-y$; $2-x$; $4a-b$ in Faktoren;

13. $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$; $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$;

14. $\sqrt{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$; $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$;

15. $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2)$; [= x − y]

16. $(\sqrt{a+b})^4 = \mathbf{(a+b)^2}$; $(\sqrt[3]{x^2})^6$; $(\sqrt[4]{\frac{7}{2}})^{12}$; $(\frac{1}{2}r\sqrt{2r-x})^2$;

17. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$;

18. $(\sqrt{0{,}04})^3$; $(\sqrt[3]{27a^6})^2$;

19. $\frac{1}{4}(\sqrt{a+b})^2 - \frac{3}{2}(\sqrt[3]{a-b})^3 + \frac{5}{6}(\sqrt[4]{a-b})^4$;

20. $2a(\sqrt{\frac{2}{3}b})^2 + 3b^2\left(\sqrt[4]{\frac{3a}{2b}}\right)^4 + \frac{9a^3}{4b}\left(\sqrt[3]{\frac{4b}{3a}}\right)^6$; [= $9\frac{5}{6}ab$]

21. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^2}{b}}\right)^2 - \frac{4a}{5b^2}(\sqrt[3]{ab})^3 + \frac{a}{2}\left(\frac{5a^2}{b^2}\left(\sqrt[4]{\frac{2b}{5a}}\right)^6\right)^2$

$- \left(\sqrt{\frac{(a-b\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})}{2b}}\right)^2$; [= b]

22. $x\sqrt{(1-x)^2} - \frac{x}{2}\sqrt[3]{(1+x)^3} - \left(x\sqrt[4]{\frac{x-1}{x^3}}\right)^4$; $[=\frac{1}{2}x(3-5x)]$

23. $a(\sqrt{a-b})^2 - b^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}}\right)^3 + \sqrt[4]{(a-b)^8}$
$- \left(b\sqrt{2-\frac{2a}{b}}\right)^2$; $[=a^2-2ab-2b^2]$

24. $(\sqrt[7]{12})^4(\sqrt[7]{12})^3 - (\sqrt[9]{9})^8\cdot(\sqrt[9]{9})^{-5}\cdot(\sqrt[9]{9})^6$; $[=3]$

25. $\sqrt[15]{(3^{-3})^{-5}} + ((\sqrt[6]{5})^{-4})^{-3} - (\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})^2 + [(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})]^3$;

26. $\left(2x\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)^2 - \frac{x}{2}\sqrt[3]{(1+x)^3} - \left(x\sqrt[4]{\frac{1+x}{x^3}}\right)^4$; $[=2\frac{1}{2}x(1+x)]$

27. $(2a^2\sqrt{2a})^2 + \left(4\sqrt{\frac{a^5}{2}}\right)^2 + (a\sqrt[3]{8a^2})^3 + \left(\frac{a}{2}\sqrt[5]{256}\right)^5$. $[=32a^5]$

59.

$$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[mx]{a^{my}} = \sqrt[\frac{x}{n}]{a^{\frac{y}{n}}}.$$

Eine Wurzel bleibt ungeändert, wenn man sowohl den Wurzelexponenten als auch den Exponenten des Radikanden mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert.

Beweis: Potenziert man jede der beiden ersten Größen mit mx, so erhält man gleiche Resultate, und schließt daraus auf die Gleichheit der Größen. Die Gleichheit der dritten Größe ergibt sich durch Umkehrung und hat zunächst Bedeutung, solange n in x und y ohne Rest enthalten ist.

---

1. $\sqrt[12]{a^6} = \sqrt{a}$; $\sqrt[15]{a^{10}}$; $\sqrt[16]{a^4b^8c^{12}}$; $\sqrt[4]{\frac{9}{4}a^6}$;

2. $\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}$; $\sqrt[6]{(a+b)^2}$; $\sqrt[4]{1-2x+x^2}$; $\sqrt[6]{(1-x)^3}$;

3. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[9]{8}$; $\sqrt[12]{27^4}$; $\sqrt[2x+4]{a^{3x+6}}$; $\sqrt[9r]{(27a^6b^{3x})^3}$;

4. Man soll $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{4a}$, $\sqrt[6]{5b^2}$ in 12. Wurzeln verwandeln.

5. Man soll $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[9]{2a^2b}$, $\sqrt[12]{6a^3b^2}$, $\sqrt[18]{12ax^3}$ in 36. Wurzeln verwandeln.

6. Man soll $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{a-x}}$, $\sqrt[4]{x^{2r-1}}$, $\sqrt[12]{\frac{4}{3}a^4b}$ in 24. Wurzeln verwandeln.

7. $5\sqrt[15]{a^{20}} + 3\sqrt[21]{a^{28}} - 4\sqrt[6]{a^8} + 2\sqrt[36]{a^{48}}$;

8. $17\sqrt[45]{a^{27}} - 12\sqrt[25]{a^{15}} + 3\sqrt[35]{a^{28}} - 5\sqrt[60]{a^{36}} + 7\sqrt[60]{a^{48}}$; $[=10\sqrt[5]{a^4}]$

9. $3\sqrt[12]{4}-4\sqrt[15]{27}+8\sqrt[24]{16}+5\sqrt[20]{81}-11\sqrt[30]{32}$; [$=\sqrt{3}$]

10. $8\sqrt[20]{32}-9\sqrt[6]{9}-4\sqrt[16]{16}+4\sqrt[9]{27}+12\sqrt[12]{8}+5\sqrt[12]{81}$; [$=16\sqrt[4]{2}$]

11. $7\sqrt[4]{36}+3\sqrt[4]{16}-4\sqrt[12]{16}-10\sqrt[6]{216}+9\sqrt[6]{4}-3\sqrt[3]{8}$
$+8\sqrt{6}-3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[12]{36^3}$. [$=2\sqrt[3]{2}$]

60.

$$\sqrt[x]{ab}=\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}.$$

Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden Faktor radiziert und die erhaltenen Wurzeln mit einander multipliziert. Umgekehrt. Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten (gleichnamige Wurzeln) werden mit einander multipliziert, indem man die Radikanden mit einander multipliziert und das erhaltene Produkt mit dem gemeinsamen Wurzelexponenten radiziert.

Beweis. Potenziert man beiderseits mit x, so erhält man gleiche Resultate.

Sind ungleichnamige Wurzeln mit einander zu multiplizieren, so müssen sie zuerst gleichnamig gemacht werden. Da man nach **59** den Wurzelexponenten verändern kann, indem man ihn mit einer beliebigen Zahl multipliziert, so muß, wenn mehrere Wurzeln auf gleichen Wurzelexponenten gebracht werden sollen, dieser gleiche Wurzelexponent ein gemeinschaftliches Vielfaches der gegebenen Wurzelexponenten sein. Man benützt gewöhnlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Wurzelexponenten als gemeinschaftlichen Wurzelexponenten.

---

1. $\sqrt{36a^3}=\mathbf{6a\sqrt{a}}$; $\sqrt[3]{8a^2b^4}$; $\sqrt{18a^2b^3}$; $\sqrt[3]{54a^6b^8x^{11}}$;

2. $\sqrt[5]{64a^7b^{12}}$; $\sqrt[4]{81a^5b^6c^7}$; $\sqrt[6]{a^7b^9c^{13}}$; $\sqrt[8]{a^{24}b^{28}c^{32}}$;

3. $\sqrt{16}-\sqrt{18}+\sqrt{32}$; $\sqrt[5]{a^{12}b^{14}x^{20}}$; $\sqrt[6]{a^4b^{10}y^{18}}$;

4. $\sqrt{45}+\sqrt{12}-\sqrt{125}-\sqrt{48}+\sqrt{20}+\sqrt{108}$; [$=4\sqrt{3}$]

5. $\sqrt{75}+\sqrt{343}+\sqrt{147}-\sqrt{432}-\sqrt{28}$; [$=5\sqrt{7}$]

6. $4\sqrt{18}-3\sqrt{27}+7\sqrt{243}-6\sqrt{162}+3\sqrt{288}-4\sqrt{363}$;

7. $2\sqrt{96}+3\sqrt{486}-6\sqrt{60}+3\sqrt{1500}-5\sqrt{294}+\sqrt{2535}$;

8. $\sqrt[3]{108}+2\sqrt[3]{500}-5\sqrt[3]{384}-\sqrt[3]{256}+8\sqrt[3]{6}+4\sqrt[3]{162}$; [$=9\sqrt[3]{4}$]

9. $3\sqrt[3]{1080}+4\sqrt{343}-4\sqrt{1575}-11\sqrt[3]{135}+3\sqrt{847}+3\sqrt[3]{625}$;

10. $6\sqrt[3]{686}+3\sqrt[4]{576}-\sqrt[3]{16000}-2\sqrt{16000}-2\sqrt[3]{2662}$
$-6\sqrt[6]{216}+9\sqrt{810}$; [$=\sqrt{10}$]

Aufl.: **6.** $=10\sqrt{3}-6\sqrt{2}$; **7.** $=31\sqrt{15}$; **9.** $=\sqrt{7}$.

11. $2\frac{1}{3}\sqrt{8}+2\frac{1}{4}\sqrt{12}+1\frac{1}{3}\sqrt{54}-3\frac{1}{5}\sqrt{20}+5\frac{2}{5}\sqrt{80}-2\frac{1}{2}\sqrt{81}$
$+1\frac{7}{9}\sqrt{18}-2\sqrt{24}-5\frac{1}{15}\sqrt{45}+4\frac{1}{2}\sqrt{25}$; $[=10\sqrt{2}+4\frac{1}{2}\sqrt{3}]$

12. $36\sqrt{a^3b^2c}+\frac{2}{c}\sqrt{a^5c^3}-\frac{c}{b}\sqrt{ac^7}$;

13. $\sqrt[3]{54a^{m+6}b^3}-\sqrt[3]{16a^{m-3}b^6}+\sqrt[3]{2a^{4m+9}}+\sqrt[3]{2c^3a^m}$;

14. $\sqrt[m]{2^m a^{mp+3}b^{mn+5}}+\sqrt[m]{3^m a^{2m-mn+3}b^{m+5}}-\sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}}$.

---

15. $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{b}$; $\sqrt[4]{27a^2b}\cdot\sqrt[4]{6a^3b^3}$; $\sqrt{6a}\cdot\sqrt{15ab}$;

16. $\sqrt[5]{2000a^4b^8}\cdot\sqrt[5]{300ab}$; $\sqrt{3a}\cdot\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt{6a}\cdot\sqrt[3]{2a^2}$;

17. $(\sqrt{a}+2\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; $(\sqrt{3a}-\sqrt{6b})(\sqrt{9a}-\sqrt{18b})$;

18. $(\sqrt{15a}+\sqrt{18b})(\sqrt{10a}-\sqrt{12b})$;

19. $(6\sqrt{10a}+30\sqrt{3b})(6\sqrt{15a}-15\sqrt{2b})$;

20. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})$;

21. $(1+\sqrt{x}-\sqrt{y})(1+\sqrt{x}+\sqrt{y})$;

22. $(\sqrt{12a}-\sqrt{30b}+\sqrt{75c})(2\sqrt{5a}+5\sqrt{2b}-5\sqrt{5c})$;

23. $(2\sqrt{5a}+2\sqrt{7b}-\sqrt{66c})(\sqrt{30a}-\sqrt{42b}+3\sqrt{11c})$;

24. $(5\sqrt[3]{36x^2}-6\sqrt[3]{25bx}+6\sqrt[3]{30b^2})(\sqrt[3]{60x}+2\sqrt[3]{9b})$;

25. $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$;

26. $5a\sqrt{a}\cdot 2\frac{1}{2}b\sqrt{ab}\cdot 0{,}16\sqrt{ab^3}$;

27. $4\sqrt[3]{4a^2}\cdot 1\frac{1}{2}a\sqrt[3]{6a^5b^4}\cdot 7b\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^4b^3}\cdot 2\sqrt[3]{18ab^2}$;

28. $\sqrt[x]{a^{2x+1}b^4}\cdot\sqrt[x]{a^{5x-4}b^{3-4x}}\cdot\sqrt[x]{a^{3-2x}b^{1+6x}}$; $[=a^5b^2\sqrt[x]{b^8}]$

29. $a\sqrt{ab}\sqrt[x]{a^{2x+3}}\cdot b\sqrt{2a}\sqrt[x]{a^{x-4}}\cdot c\sqrt{6b}\sqrt[x]{a^{1-x}}$; $[=2a^4b^2c\sqrt{3}]$

30. $4\sqrt{3a}\sqrt[12]{16a^4b^7}\cdot\sqrt{6b}\sqrt[12]{4a^2b^5}$;

31. $\frac{3}{2}a^2\sqrt[3]{12a^2b}\sqrt[30]{a^{17}b^2x^3}\cdot\frac{1}{2}ab\sqrt[3]{18ab^5}\sqrt[30]{a^{28}b^{13}x^{12}}$;

32. $\frac{1}{2}a\sqrt{a}\sqrt[6]{25a^4b}\cdot\frac{1}{3}b\sqrt{ab}\sqrt[6]{6a^5b^4}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{ab}\sqrt[6]{24ab^3}$;

33. $\sqrt[20]{a^{14}b^{8x-25}}\cdot\sqrt[21]{a^{11x-3}b^{20}}\cdot\sqrt[20]{a^{18}b^{9x+14}}\cdot\sqrt[21]{a^{13x+6}b^{22}}\cdot\sqrt[20]{a^8b^{3x+11}}$;

34. $12\sqrt{ab^3}\cdot\sqrt[m]{a^{4m-5}b^2}\cdot 3\sqrt{a^2b^2}\cdot\sqrt[m]{a^{3m+1}b^{-m}}\cdot 2\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt[m]{a^{4-2m}b^{2m-2}}$;

35. $(6a\sqrt[3]{2a^2b}+2b\sqrt[3]{15a})(2a^2\sqrt[3]{45ab^2}-ab\sqrt[3]{100b})$;

36. $(30x\sqrt[3]{5a^2}-10\sqrt[3]{18abx^2y}+2\sqrt[3]{300b^2xy^2})$
$\cdot(5\sqrt[3]{36axy}+2\sqrt[3]{75by^2})$;

37. $(3a^2\sqrt{6ab}+6ab\sqrt{5a}-10b\sqrt{6ab})$
$\cdot(6a^3b\sqrt{15a}-30a^2b\sqrt{2ab}+20ab^2\sqrt{15a})$;

38. $(5a^3\sqrt[3]{9b^2x} - 3ab\sqrt[3]{100a^2bx^2} + 6b^2x\sqrt[3]{30a})$
$\cdot(a^3\sqrt[3]{150abx} + 6bx\sqrt[3]{4a^2b^2} + 2a^2b\sqrt[3]{45x^2})$;

39. $(5\sqrt{6} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6})$;

40. $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} + \sqrt{3})(4\sqrt{3} - \sqrt{5})$;

41. $(\sqrt{14} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{30})(\sqrt{21} - 3\sqrt{30} + 6\sqrt{5})$;

42. $(6\sqrt{77} + 21\sqrt{5} + 2\sqrt{70})(6\sqrt{66} - 2\sqrt{210} - 4\sqrt{15})$;

43. $(5\sqrt{105} - 15\sqrt{7} + 10\sqrt{6})(15\sqrt{7} - 3\sqrt{105} - 6\sqrt{10})$;

44. $(10\sqrt{3} - \sqrt{10} + \sqrt{6} - 6\sqrt{5})(15\sqrt{10} - 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 15\sqrt{6})$;

45. $(2\sqrt{30} - 2\sqrt{105} - 10\sqrt{2} + 15\sqrt{7})$
$(3\sqrt{42} - 21\sqrt{3} + 3\sqrt{42} - 21\sqrt{5})$;

46. $(\sqrt{330} + 2\sqrt{55} - \sqrt{210} - 2\sqrt{35})$
$(11\sqrt{21} + 7\sqrt{33} + 11\sqrt{14} + 7\sqrt{22})$;

---

47. $\sqrt{ab}\cdot\sqrt[4]{ab^3}$; $\sqrt{9ab}\cdot\sqrt[3]{18a^2b}$; $\sqrt[5]{a^3b^2}\cdot\sqrt[10]{a^7b^3}\cdot\sqrt[15]{a^{14}b^{25}}$;

48. $\sqrt{2a}\cdot\sqrt[4]{2a^3}\cdot\sqrt{3a}\cdot\sqrt[4]{6a}$; $\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}a^2}\cdot\sqrt[6]{12a^5}\cdot\sqrt[4]{1\tfrac{1}{2}a^3}\cdot\sqrt{1\tfrac{1}{3}a}$;

49. $a^2\sqrt[m]{a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^2}\cdot b\sqrt[2m]{a^5b^4}\cdot\sqrt[3]{a^2b}$;

50. $ab\sqrt[x]{a^{x+1}b^{2+x}}\cdot\sqrt{a\sqrt[2x]{a^{3x-5}b^{1-3x}}}\cdot\sqrt{ab}$;

51. $\sqrt[n-1]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt{ab}\cdot\sqrt[9]{a^4b^3}$;

52. $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{ab^2}}\cdot\sqrt[8]{ab^3}\cdot\sqrt[24]{a^7b^5}$;

53. $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2} + \sqrt[8]{2})(\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - 3\sqrt[8]{2})$;

54. $(\tfrac{16}{27}\sqrt{2} - 2\sqrt[4]{6} + \sqrt{3} - \tfrac{1}{8}\sqrt[4]{216})(\tfrac{8}{9} - \tfrac{2}{3}\sqrt[4]{24} + \tfrac{1}{6}\sqrt{6})$;

55. $(2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[4]{8})(4\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{4})$;

56. $(2\sqrt{2} - 3\sqrt[4]{6})(2\sqrt[4]{6} + 3\sqrt{3})$;

57. $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{24} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[6]{54} + \sqrt[3]{9})(\sqrt[6]{2} - \sqrt[6]{3})$;

58. $(12\sqrt{3} + 3\sqrt[4]{96} + 3\sqrt{2})(2\sqrt[4]{54} - \sqrt{6})$;

59. $(2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{36} + 2\sqrt[6]{6})(2\sqrt[3]{18} + 6 - 2\sqrt{6})$;

60. $(\sqrt[6]{48} - \sqrt{6} + \sqrt[4]{24})(\sqrt[4]{6} - \sqrt{3} - \sqrt[6]{6})$;

61. $(5\sqrt{2} - \sqrt[12]{1250000} + \sqrt[6]{2500})(\sqrt[4]{20} + \sqrt[3]{100} - \sqrt[6]{200})$;

62. $(a\sqrt{xy} + ay - \sqrt{abxy} - y\sqrt{ab})(b\sqrt{xy} + bx + \sqrt{abxy} - x\sqrt{ab})$;

63. $(\sqrt[12]{a^{11}} + \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[12]{a^7})(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a})$;

64. $(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[12]{a^7} + \sqrt{a})(\sqrt[9]{a^4} + \sqrt[3]{a} - \sqrt[9]{a^2})$;

65. $(\sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a^2})(\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[15]{a^{11}})$;

66. $(\sqrt[6]{a} + \sqrt[12]{a^5} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[12]{a^{11}})(\sqrt[16]{a^3} + \sqrt[16]{a^7} + \sqrt[16]{a^{11}})$.

---

67. $(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2(10-2\sqrt{5})}$
$= \sqrt{(6+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})} = \sqrt{60+20\sqrt{5}-12\sqrt{5}-20}$
$= \sqrt{40+8\sqrt{5}} = 2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

68. $(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$;

69. $(2\sqrt{6}+3)\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $(\sqrt{3}+2)\sqrt{2-\sqrt{3}}$;
$(5\sqrt{2}+7)\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

70. $\sqrt{\sqrt{41}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{41}+4}$; $(\sqrt{8}+\sqrt{6})\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{9}}$;

71. $\sqrt{12+2\sqrt{11}}\cdot\sqrt{12-2\sqrt{11}}$;

72. $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $\sqrt{a+2\sqrt{ab}+b}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

73. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$; $\sqrt{1+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{a}}$;

74. $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$;

---

75. $\sqrt{a^3+a^2b} - \sqrt{a^3-a^2b} + \sqrt{ab^2+b^3} - \sqrt{ab^2-b^3}$;

76. $\sqrt{8a^3-12a^2x^2} + \sqrt{18ax^2-27x^4}$;

77. $\sqrt{18a^3+27a^2b^2} + \sqrt{48a^2b^2-64b^3} - \sqrt{48b^4+32ab^2}$
$- \sqrt{27a^4-36a^2b}$;

61.

$$\sqrt[x]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}.$$

Ein Quotient wird radiziert, indem man sowohl Dividend als Divisor radiziert und die erhaltenen Wurzeln durch einander dividiert.

Umgekehrt. Wurzeln mit gleichen Radikatoren werden durch einander dividiert, indem man die Radikanden durch einander dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem gemeinsamen Radikator radiziert. (Sind die Wurzeln ungleichnamig, so werden sie wie in **60** zuerst auf gemeinschaftlichen Wurzelexponenten gebracht). Beweis wie bei **60**.

---

1. $\sqrt{\frac{a^4}{b^2}}$; $\sqrt{\frac{4x^2}{y^2}}$; $\sqrt{\frac{25a^2b^4}{36x^{10}}}$; $\sqrt{\frac{49(a-2b)^2}{121(a+2b)^2}}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{\frac{196}{169}}$;

2. $\sqrt[3]{\frac{27a^3}{8b^6}}$; $\sqrt[3]{\frac{y^9x^{15}}{b^{18}}}$; $\sqrt{\frac{0,04a^{2r}}{256x^{6r}}}$; $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{100\,000x^{15}}}$;

3. $\sqrt{6\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{13\frac{4}{9}}$; $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; $\sqrt{6\frac{19}{25}}$; $\sqrt{4\frac{76}{81}}$; $\sqrt{1\frac{1}{4}}$; $\sqrt{5\frac{5}{9}}$;

4. $\sqrt[3]{49\frac{8}{27}}$; $\sqrt[4]{0,0001}$; $\sqrt[3]{0,027}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,16}$; $\sqrt{1,21}$;

5. $\sqrt{5\frac{4}{9}}+\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}-\sqrt[3]{91\frac{1}{8}}-\sqrt{3\frac{1}{16}}-\sqrt{1\frac{17}{64}}-\sqrt{2\frac{41}{64}}+\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; $=-4\frac{3}{4}$

6. $\sqrt{1,69}-\sqrt{5\frac{71}{121}}-\sqrt{1,44}+\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}-\sqrt{2\frac{82}{121}}$; $[=-1,4]$

7. $\sqrt{\frac{9a^4}{64}}-\sqrt[3]{\frac{8b^3}{729x^6}}+\sqrt{\frac{25b^2}{144x^4}}-\sqrt[4]{\frac{a^8}{256}}$;

8. $\frac{a^3b}{x}\sqrt[3]{\frac{27a^3b^3}{8x^6}}-\frac{2ax^2}{y^2}\sqrt{\frac{a^2x^6}{16b^8y^2}}+\frac{a^3x}{3b^6}\sqrt{\frac{2,25b^4x^8}{a^2y^6}}$
$-\frac{2a^2b^6}{3x^2}\sqrt[3]{\frac{8a^6}{x^3b^6}}$; $\left[=\frac{a^4b^4}{6x^3}\right]$

9. $\frac{5x^2}{2}\sqrt{\frac{36a^2}{25x^4}}+\frac{6b}{x}\sqrt[3]{\frac{8x^3}{27b^6}}-\frac{6x}{7a}\sqrt[3]{\frac{343a^6}{64x^3}}-\frac{5b^3}{ax^3}\sqrt[5]{\frac{a^5x^{15}}{32b^{20}}}$
$-\frac{18}{19b^2}\sqrt{2\frac{73}{144}b^2}$; $\left[=\frac{3a}{2}\right]$

10. $\sqrt[4]{\frac{9a^5}{8b^6y^3x^2}\sqrt{\frac{27x^7y^2}{2ab^5}\sqrt[3]{\frac{27a^{21}x^{15}}{8b^{21}y^{12}}}}}$; $\left[=\frac{3a^2x}{2b^3y}\right]$

11. $\sqrt{\frac{3}{2a}\sqrt{\frac{2a^3}{3}\sqrt{\frac{ax}{6}\sqrt[3]{\frac{a^3}{216x^3}}}}}$; $\left[=\sqrt{\frac{a}{2}}\right]$

12. $\sqrt{3\frac{1}{2}a^2\sqrt{\frac{0,5a}{7x^3}\sqrt{\frac{1,5a^5}{49}\sqrt{\frac{0,5a^2}{9x^5}\sqrt{\frac{x^2}{4}}}}}}$; $\left[=\frac{a^2}{2x^2}\right]$

13. $\frac{7x}{9}\sqrt{\frac{9a^2}{16x^4}}+\frac{10b^2}{21x}\sqrt{\frac{7}{5ab^2}\sqrt[3]{\frac{343a^9}{125b^6}}}$
$-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{0,5}{x}\sqrt{\frac{0,5}{x}\sqrt{\frac{0,5}{x}\sqrt{\frac{0,25}{x^2}}}}}$; $=\frac{a}{x}$

14. $\sqrt{\dfrac{0{,}4\,a\sqrt[3]{\dfrac{125\,a^6}{27\,x^3}}}{\dfrac{5\,a\,x}{6\,b}\sqrt{\dfrac{8\,b^2}{5\,a\,x^4}}\sqrt{0{,}16\,a^2}}}$; [= a]

$\left[15. = \dfrac{6\,(a+b)}{(a-b)\sqrt{5}}\right]$

15. $\sqrt{\dfrac{9\,a\,b^2\,(a+b)}{(a-b)^3}\sqrt{\dfrac{32\,(a^2-b^2)}{25\,a^2\,b}\sqrt{\dfrac{(a+b)^4}{4\,b^6}\sqrt{\left[\dfrac{a-b}{a+b}\right]^4}}}}$;

---

16. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$; $\dfrac{\sqrt{1008}}{\sqrt{1575}}$; $\dfrac{\sqrt[3]{135\,a}}{\sqrt[3]{40\,a^4}}$; $\dfrac{\sqrt{a^4-a^3\,b}}{\sqrt{a^2\,(a-b)}}$;

17. $\dfrac{\sqrt[5]{a^{12}\,b^{33}\,c^{27}}}{\sqrt[5]{a^7\,b^{18}\,c^{12}}}$; $\dfrac{\sqrt[4]{a^{11}\,b^{19}\,x^5}}{\sqrt[4]{a^3\,b^7\,x^{21}}}$; $\dfrac{\sqrt[3]{12\,a^4\,x^{14}\,y^5}}{\sqrt[3]{81\,a^{10}\,x^5\,y^4}}$;

18. $\sqrt[3]{\dfrac{25\,a^2\,x}{16\,b\,y^4}} : \sqrt[3]{\dfrac{4\,b^2\,y^2}{5\,a\,x^2}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{\dfrac{5\,a^5}{32\,b^2}} : \sqrt[3]{\dfrac{80\,b^7}{a^4}}}$;

19. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{3\,a^2}{2\,b}}}{\sqrt{\dfrac{2\,b}{3\,a}}} + \dfrac{\sqrt{\dfrac{5\,a^4}{2\,b^5}}}{\sqrt{\dfrac{8\,a}{5\,b^3}}} + a\sqrt{\dfrac{15\,a^3}{8\,b}} : \sqrt{\dfrac{5\,a^2\,b^2}{\sqrt{2{,}25\,b^2}}}$; $\left[= \dfrac{7\,a\sqrt{a}}{2\,b}\right]$

20. $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{80}} + \dfrac{\sqrt{294}}{\sqrt{864}} + \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}} + \dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{432}} + \dfrac{\sqrt{343}}{\sqrt{28}}$; [= 6]

21. $\frac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{54}} + 6\cdot\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{176}} - \frac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{1452}}{\sqrt{27}} + 2\cdot\dfrac{\sqrt{320}}{\sqrt{45}} - \frac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{189}}{\sqrt{84}}$; $[= 5\frac{35}{36}]$

22. $\sqrt{\dfrac{18\,a^3\,b^3}{25\,x^7}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{24\,a^4\,b^{17}}{343\,x^9\,y^{11}}}$; $\sqrt[4]{\dfrac{144\,a^8\,x^2}{10000\,y^6}}$; $\sqrt[12]{\dfrac{a^{15}\,b^{30}}{x^{21}\,y^{27}}}$.

62.

Rationalmachen des Nenners.

Bleibt im Nenner eine Wurzel stehen, deren Wert nicht durch eine ganze Zahl (oder einen endlichen Bruch) angegeben werden kann, z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{a}$, $1+\sqrt{x}$, so multipliziert man Zähler und Nenner mit so viel, daß im Nenner das Wurzelzeichen verschwindet.

Beispiel: $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$;
$\sqrt[3]{\frac{2}{9a}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 3\cdot a^2}{9\cdot 3\cdot a\cdot a^2}} = \frac{1}{3a}\sqrt[3]{6a^2}$.

Man sagt dann, man hat den Nenner rational gemacht; denn eine endliche Zahl nennt man eine rationale Zahl; eine Zahl aber, deren Wert nicht durch eine endliche Reihe von Zahlen angebbar ist, heißt eine irrationale Zahl, und wir werden später sehen, daß Wurzeln, welche nicht direkt sich ausziehen lassen, irrationale Zahlen sind.

---

1. $\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{4\tfrac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{0{,}5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$; $[= 4\tfrac{1}{4}\sqrt{2}]$

2. $\tfrac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}\sqrt{1\tfrac{1}{3}} + \frac{5}{\sqrt{8\frac{1}{3}}} + \frac{7}{\sqrt{3}} + \sqrt{\tfrac{1}{27}}$; $[= 4\tfrac{1}{3}\sqrt{3}]$

3. $\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{6}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{4\tfrac{1}{6}} + \sqrt{2\tfrac{2}{3}} - \sqrt{\tfrac{2}{27}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \sqrt{1{,}5}$; $= \tfrac{2}{9}\sqrt{6}$

4. $\sqrt{2\tfrac{1}{2}} + \sqrt{0{,}1} - \frac{2}{\sqrt{0{,}1}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1\tfrac{1}{9}} + \sqrt{1\tfrac{3}{5}} - \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{125}{32}}$; $[= -2\sqrt{10}]$

5. $\sqrt[3]{\tfrac{4}{9}} + \sqrt[3]{\tfrac{3}{16}} - \sqrt[3]{\tfrac{343}{144}} - \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{0{,}5}} + \sqrt[3]{\tfrac{81}{2}}$; $[= \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{12}]$

6. $\sqrt[3]{\tfrac{5}{9}} - \sqrt[3]{\tfrac{3}{25}} + \sqrt[3]{\tfrac{8}{3}}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{5}{3}} - \sqrt[3]{(\tfrac{9}{5})^2} + 8\,\frac{\sqrt[6]{81}}{\sqrt[3]{600}}$; $[= \sqrt[3]{15}]$

7. $3\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{20}{9}} - 1\tfrac{2}{5}\sqrt[3]{\tfrac{15}{2}} - 1\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{12}{25}} + \sqrt[3]{(\tfrac{128}{15})^2} - \frac{40}{\sqrt[3]{450}} - 2\tfrac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{16}}$;

8. $a\sqrt{\frac{a^3}{b}} + \frac{a^3}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a^3}{\sqrt{ab}}$; [7. $= -\tfrac{23}{30}\sqrt{30}$]

9. $5\sqrt{\frac{ax}{9}} - \frac{6}{x}\sqrt{\frac{ax^3}{4}} - \frac{5}{2a}\sqrt{a^3x} + 6x\sqrt{\frac{4a}{9x}}$; $[= \tfrac{1}{6}\sqrt{ax}]$

10. $\frac{a^2}{4c}\sqrt{\frac{4a}{bc}} + \frac{6a}{bc}\sqrt{\frac{a^3b}{9c}} + \frac{a}{3c^2}\sqrt{\frac{a^3c}{4b}}$; $\left[= \frac{8a^2}{3bc^2}\sqrt{abc}\right]$

11. $\frac{ax}{y^2}\sqrt[3]{\frac{a^8x^4}{y^4}} + \frac{a^2x^3}{y}\sqrt[3]{\frac{a^5}{x^2y^7}} + \frac{a^5x^4}{y^6}\sqrt[3]{\frac{y^8}{a^4x^5}} + \frac{a^7}{y^5}\sqrt[3]{\frac{x^7y^5}{a^{10}}}$;

12. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^3c^2}{b^3}} - \frac{a^3}{c}\sqrt{\frac{b^2}{ac}} + \frac{ab^2}{c^3}\sqrt{\frac{a^3c^3}{b^2}} - c^3b\sqrt{\frac{a^5}{c^4b^7}}$; $[= 0]$

13. $\frac{3a^4}{x^3y}\sqrt[3]{\frac{x^4}{ay^5}}+\frac{4x}{ay}\sqrt[3]{\frac{x^4}{a^4y}}-\frac{2ay}{x}\sqrt[3]{\frac{a^8}{x^2y^{11}}}-\frac{4y}{a^2x}\sqrt[3]{\frac{x^{10}}{ay^7}}$;

14. $\sqrt{\tfrac{1}{2}x+1}+2\tfrac{1}{2}\sqrt{16+8x}-\frac{6}{x}\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}}-\sqrt{\frac{2}{x}}\sqrt{4x^2+8x}$;

15. $2(a+x)^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}+(a\sqrt{ax}-\sqrt{ax^3})\sqrt{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}$
$-\frac{3(ax-x^2)}{a+x}\sqrt{\frac{a^2(a+x)^3}{ax^2-x^3}}$; $[=x\sqrt{a^2-x^2}]$

16. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8a-16b}{4b+2a}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{ab^2+2b^3}{a^3-2a^2b}}-\sqrt{\frac{a^2-a+{}^1/_4}{(a/_2)^2-b^2}}$;

17. $(2a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}+\sqrt{\frac{4a^2-4ab+b^2}{a-b}}-\sqrt{\frac{1}{\frac{b}{a^2}+\frac{1}{a}}}$
$+\frac{b-2a}{a+b}\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}}$;

18. $a^{2-m}b\sqrt[3]{\frac{8}{b}a^{6m-1}}-\frac{1}{a}\sqrt[3]{27a^{3m+8}b^2+12b^{m+2}\sqrt[3]{\frac{a^{3m+5}}{8b^{3m+4}}}}$.

Aufl.: 16. $\frac{\sqrt{a^2-4b^2}}{a^2-4b^2}$; 17. $\sqrt{a+b}$; 18. $5a^{m+1}\sqrt[3]{a^2b^2}$.

---

19. $(2\sqrt{\tfrac{2}{3}}+3\sqrt{1\tfrac{1}{2}})(3\sqrt{6}-2\sqrt{\tfrac{1}{6}})$; $[=34\tfrac{2}{3}]$

20. $(\sqrt[3]{\tfrac{2}{9}}-\sqrt[3]{\tfrac{1}{3}}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}})(\sqrt[3]{\tfrac{4}{3}}-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})$; $\left[=\tfrac{2}{3}-\tfrac{7}{6}\sqrt[3]{12}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{18}\right]$

21. $(\sqrt{1\tfrac{7}{8}}-\sqrt{6\tfrac{1}{4}}+5\sqrt{\tfrac{5}{6}})(\sqrt{\tfrac{5}{12}}-5\sqrt{\tfrac{1}{18}})$;

22. $(\sqrt{\tfrac{1}{5}}+\sqrt{0{,}3}+2\sqrt{0{,}1})(\tfrac{1}{5}\sqrt{5}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{6}{5}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1\tfrac{3}{5}})$;

23. $(6\sqrt[3]{7\tfrac{1}{2}}+4\sqrt[3]{2\tfrac{1}{12}})(18\sqrt[3]{\tfrac{5}{18}}-2\sqrt[3]{16\tfrac{2}{3}})$;

24. $(\sqrt{1\tfrac{1}{2}}+\sqrt[3]{1\tfrac{1}{2}}+\sqrt[6]{1\tfrac{1}{2}})(\sqrt[3]{2\tfrac{1}{4}}-\sqrt{1\tfrac{1}{2}})$; $\left[=\tfrac{3}{4}\sqrt[6]{96}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{486}\right]$

25. $(\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\tfrac{3}{5}}-\tfrac{2}{3}\sqrt[6]{\tfrac{15}{16}}+\tfrac{4}{9}\sqrt[3]{\tfrac{25}{16}})(1\tfrac{1}{2}\sqrt[6]{\tfrac{3}{5}}-\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{\tfrac{5}{4}})$;

26. $(\tfrac{40}{3}\sqrt{\tfrac{5}{3}}+\tfrac{15}{2}\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}}+\tfrac{27}{4}\sqrt[6]{\tfrac{375}{4}}+\tfrac{81}{264})\cdot(\tfrac{20}{3}+3\sqrt[6]{\tfrac{125}{48}}+\tfrac{9}{32}\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}})$;

27. $(\tfrac{49}{16}\sqrt[3]{\tfrac{25}{36}}-\tfrac{28}{3}\sqrt[12]{\tfrac{5}{6}}+\tfrac{64}{9}\sqrt{\tfrac{6}{5}})(\tfrac{7}{4}\sqrt[3]{\tfrac{5}{6}}-\tfrac{8}{3}\sqrt[4]{\tfrac{6}{5}})$;

28. $(\tfrac{25}{16}\sqrt[4]{\tfrac{2}{25}}-\tfrac{45}{8}\sqrt[6]{\tfrac{16}{125}}+\tfrac{27}{10}\sqrt[12]{31520}-\tfrac{108}{25}\sqrt{\tfrac{5}{2}})$
$\cdot(\tfrac{5}{2}\sqrt{2}-3\sqrt[12]{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{18}{5}\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}})$;

---

29. $\frac{a}{\sqrt{x}+1} = \frac{a(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$;

30. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$; $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$; $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$;

31. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $\frac{12}{5-\sqrt{21}}$; $\frac{7}{\sqrt{8}-2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$;

32. $\frac{6}{2\sqrt{7}-\sqrt{11}}$; $\frac{44-6\sqrt{6}}{8\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$; $\frac{1}{6\sqrt{5}+8\sqrt{3}}$;

33. $\frac{1\frac{1}{25}}{4\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}}$; $\frac{1+5\frac{1}{6}\sqrt{3\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{4}\sqrt{8}-\frac{2}{3}\sqrt{7}}$; $\frac{278-2\sqrt{195}}{7\sqrt{13}+5\sqrt{15}}$;

34. $\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-3}}{\sqrt{5}-1}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$;

35. $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{6}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{2}}$; $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; $\frac{4\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\sqrt{6}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{6}}$;

36. $\frac{30}{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}}$; $\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{\frac{17}{3}}}$;

37. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; [= 4]

38. $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}$; $\frac{8}{3-\sqrt{5}} - \frac{9}{4+\sqrt{5}}$;

39. $\frac{2\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; $\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$;

40. $\frac{52}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; $\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{11}}$;

41. $\frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\frac{10}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$;

42. $\frac{70}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{7}}$; $\frac{8\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}-\sqrt{15}}$;

43. $\frac{7-4\sqrt{21}}{\sqrt{12}-\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$;

44. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$; $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$; $\frac{6}{\sqrt{4+\sqrt{7}}}$;

45. $\frac{6}{\sqrt{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}}$; $\frac{34}{\sqrt{8\sqrt{3}-5\sqrt{7}}}$; $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{5}\sqrt{5}}}$;

46. $\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{3}}}}$; $\left[=\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{30}-\sqrt{6}}\right]$

47. $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-1}$; $\frac{4}{\sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{8}}$;

48. $\sqrt{ax}+\frac{ax}{a-\sqrt{ax}}$;

49. $\frac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\frac{a\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$; $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$; $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}$;

50. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}$;

51. $\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}-\frac{1+x}{\sqrt{x}}$; $\left[=\frac{-x^2\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}}{x(1-x)}\right]$

52. $\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}$; $\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$; $\frac{1-x}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$;

53. $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$;

54. $\frac{1}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$; $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$; $\frac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}$;

55. $\frac{ax}{a+x+\sqrt{a^2+x^2}}$; $\frac{ab}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

56. $\frac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$;

---

57. $\frac{3x\sqrt{3a}}{4a\sqrt[3]{x}}-\frac{5a\sqrt[6]{a^5x}}{x\sqrt[3]{ax^2}}-\frac{9x\sqrt[6]{x}}{4\sqrt{3ax}}+\frac{6a\sqrt[6]{a^5x^4}\sqrt[4]{a^3x^3}}{x^2\sqrt[12]{a^{13}x^{11}}}$;

58. $\frac{3a^2\sqrt[10]{a^{11}b^9}}{4b\sqrt{ab}}-\frac{5b^2\sqrt[3]{2ab^2}}{a\sqrt{8ab}}+\frac{9b\sqrt{2ab^3}}{2a\sqrt[3]{4a^2b}}-\frac{3a^3\sqrt[15]{b:a}}{2\sqrt[3]{8ab^2}}$;

59. $\frac{4ax^2b\sqrt[4]{8a^3x}}{3\sqrt[5]{256a^3b^7x^4}}+\frac{3ax^2\sqrt[5]{4a^2xb^3}}{6b\sqrt[4]{2ax^3}}-\frac{5a^2x^2\sqrt[4]{32a^3b^2x}}{12\sqrt[10]{2a^{16}b^9x^8}}$;

---

60. $\left[\frac{5a^2}{x}\sqrt{a} - 2a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}} - x\sqrt[6]{\frac{a^5}{x^4}}\right] \cdot \left[ax\sqrt{\frac{1}{a}} - 3x\sqrt[3]{\frac{x^2}{a}} + \frac{4x^2}{a}\sqrt[6]{\frac{x^2}{a}}\right];$

61. $\left[\frac{ax}{b^3}\sqrt[4]{\frac{a^3}{bx}} + \frac{a^2}{bx}\sqrt{\frac{a}{x}} - \frac{a^3b}{x^3}\sqrt[4]{\frac{ab}{x^3}}\right] \cdot \left[\frac{x^2}{a^2b}\sqrt[6]{a^4bx} - \frac{b}{a}\sqrt[12]{\frac{a^5b^5}{x}} + \frac{b^3}{x^2}\sqrt[6]{\frac{ab^4}{x^2}}\right];$

62. $\left[\frac{z^3y}{a^2}\sqrt[3]{\frac{a}{x^2}} - \frac{x^2}{a}\sqrt[6]{\frac{a^3y^2}{xz^2}} + \frac{x^4}{z^3}\sqrt[3]{\frac{a^2x}{yz^2}}\right] \cdot \left[\frac{z}{ax}\sqrt[9]{\frac{ax^2}{yz^2}} + \frac{x}{z^2}\sqrt[18]{\frac{a^5x^{13}}{y^{14}z^{14}}} - \frac{ax^4}{yz^6}\sqrt[9]{\frac{a^4x^2}{y^4z}}\right];$

---

63. $(15a^2\sqrt{a} + 17a^2 - 39a\sqrt{a} + 7a) : (5a - \sqrt{a});$

64. $(34x^3 - 123x^2\sqrt[3]{x^2} - 92x^2\sqrt[3]{x} + 209x^2) : (17x\sqrt[3]{x^2} - 19x\sqrt[3]{x};$

65. $(42a^2b\sqrt{ab} - 2a^2b^2 + ab^2\sqrt{ab} + 16ab^3) : (6a\sqrt{b} + 4b\sqrt{a});$

66. $(\frac{1}{6}a^3b\sqrt[3]{a^2} - \frac{13}{36}a^3b\sqrt[3]{ab^2} + \frac{1}{12}a^3b^2\sqrt[3]{b} + \frac{1}{8}a^2b^3\sqrt[3]{a^2})$
$: (\frac{1}{3}a\sqrt[3]{a^2b} - \frac{1}{2}ab\sqrt[3]{a});$

67. $(x^3 - 4x^2 + 12x\sqrt{x} - 9x) : (x\sqrt{x} - 2x + 3\sqrt{x});$

68. $(4a^8b^3 - 16a^6b^4\sqrt{ab} + 16a^5b^6 - a^2b^9)$
$: (2a^4b\sqrt{b} - 4a^2b^3\sqrt{a} + ab^4\sqrt{b});$

69. $(30a^4\sqrt[3]{b} - 59a^3b\sqrt[3]{ab^2} + 21a^2b^3\sqrt[3]{a^2} + 10a^2b^4\sqrt[3]{b} - 2ab^5\sqrt[3]{ab^2})$
$: (6a\sqrt[3]{a^2b} - 7ab\sqrt[3]{b^2} + b^3\sqrt[3]{a});$

70. $(4a\sqrt{15} - 10b\sqrt{15} + 50\sqrt{6bc} - 25c\sqrt{6})$
$: (2\sqrt{3a} - \sqrt{30b} + 5\sqrt{3c});$

71. $(10a\sqrt{6} - 14b\sqrt{6} + 12\sqrt{77bc} - 33c\sqrt{6})$
$: (\sqrt{30a} - \sqrt{42b} + 3\sqrt{11c});$

72. $(30x\sqrt[3]{10} + 36b\sqrt[3]{10}) : (\sqrt[3]{60x} + 2\sqrt[3]{9b});$

73. $(12a^4b\sqrt[3]{90} - 10ab^2\sqrt[3]{12ab}) : (2a^2\sqrt[3]{45ab^2} - ab\sqrt[3]{100b});$

74. $(150ax\sqrt[3]{180xy} + 20by\sqrt[3]{180xy}) : (5\sqrt[3]{60axy} + 2\sqrt[3]{75by^2});$

75. $(54a^6b\sqrt{10b} - 180a^4b^2\sqrt{10b} - 600a^2b^3\sqrt{10b} + 1200a^3b^3\sqrt{3})$
$: (6a^3b\sqrt{15a} - 30a^2b\sqrt{2ab} + 20ab^2\sqrt{15a});$

76. $(15a^6b\sqrt[3]{50ax^2}+30a^3b^2x\sqrt[3]{36a^2bx}+72ab^3x^2\sqrt[3]{15b^2})$
$:(a^3\sqrt[3]{150abx}+2a^2b\sqrt[3]{45x^2}+6bx\sqrt[3]{4a^2b^2})$.

63.

Wurzeln mit negativen Exponenten. Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

I. $\sqrt[-x]{a^y}=\sqrt[x]{a^{-y}}=\sqrt[x]{\frac{1}{a^y}}=\frac{1}{\sqrt[x]{a^y}}$; $\sqrt[-x]{a^{-y}}=\sqrt[x]{a^y}$;

$$\sqrt[-x]{\frac{a}{b}}=\sqrt[x]{\frac{b}{a}}.$$

Eine Zahl wird mit einem negativem Ausdruck radiziert, indem man die Zahl mit dem Glied des negativen Ausdrucks radiziert, und von der erhaltenen Wurzel den reziproken Wert nimmt.

Beweis. Man multipliziert in jedem der 3 Fälle nach **59** den Radikator und den Exponent des Radikanden mit -1 und wendet dann weitere Entwickelung an.

Zusatz 1. Die Formel enthält die Bedeutung einer Wurzel mit negativem Exponenten.

Zusatz 2. Jede Wurzel kann man als Faktor vom Zähler in den Nenner oder umgekehrt setzen, wenn man das Vorzeichen des Wurzelexponenten oder das Vorzeichen des Exponenten des Radikanden ändert.

Zusatz 3. Eine Wurzel bleibt ungeändert, wenn man die Vorzeichen des Wurzelexponenten und des (der) Exponenten des Radikanden zugleich ändert.

Zusatz 4. Ein Quotient wird mit einem negativem Ausdruck radiziert, indem man den reziproken Wert des Quotienten mit dem Glied des negativen Ausdrucks radiziert.

II. $a^{\frac{y}{x}}=\sqrt[x]{a^y}$.

Eine Zahl wird mit einem Bruch potenziert, indem man die Zahl mit dem Zähler potenziert und die erhaltene Potenz mit dem Nenner radiziert.

Beweis. Potenziert man beiderseits mit x, so erhält man gleiche Resultate.

Zusatz. Der Satz enthält die Bedeutung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten (Bruchpotenz).

Umgekehrt. Anstatt mit einer Zahl zu radizieren, kann man mit dem reziproken Wert der Zahl potenzieren.

Zusatz. Diese Umkehrung erlaubt, jede Wurzel als Potenz mit gebrochenem Exponenten anzusehen.

III. $\sqrt[\frac{x}{y}]{a} = \sqrt[x]{a^y}$.

Eine Zahl wird mit einem Bruch radiziert, indem man die Zahl mit dem Nenner potenziert und die erhaltene Potenz mit dem Zähler radiziert.

Beweis nach **59**; man multipliziert mit y.

Zusatz. Der Satz enthält die Bedeutung einer Wurzel mit gebrochenem Exponenten.

---

1. $a\sqrt[-2]{a}$; $a^2x\sqrt[-3]{ax^2}$; $ab\sqrt[-2]{ab^{-1}}$; $ax^2y\sqrt[-4]{ax^2y^{-3}}$;

2. $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[-3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^{-1}}$; $a^2x\sqrt{ax^{-1}} \cdot \sqrt[-2]{a^{-1}x} \cdot \sqrt[-2]{\frac{x}{a}}$;

3. $\frac{ab^{-1}\sqrt{a}\ \sqrt[-2]{ab^{-1}}}{a^{-2}\sqrt{a^{-1}b}\ \sqrt[-2]{a^{-1}b^{-1}}}$; $\frac{\sqrt[3]{0,5} \cdot \sqrt[-3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(5-\frac{1}{2})^{-1}}}{\sqrt[3]{1,5^{-1}} \cdot \sqrt[-3]{15} \cdot \sqrt[3]{0,12}}$; $\left[\frac{a}{b\sqrt{b}}; 2\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right]$

4. $\frac{a^{-2}x\sqrt[3]{a^2x^{-1}} \cdot \sqrt[-2]{a^{-1}x}\ \sqrt[-6]{ax^5}}{ax^{-4}\sqrt{a^{-1}x}\ \sqrt[-3]{a^{-1}x^2}\ \sqrt[6]{a^{-3}x^2}}$; $\left[= \frac{x^3}{a^2}\sqrt[6]{a^4x};\right.$ **5.** $\left.\frac{a+x}{6a^3x^2}\sqrt[6]{2a^2x^3}\right]$

5. $\sqrt[3]{\frac{2(a^2-x^2)}{3ax}} \cdot \sqrt[-2]{24a^3(a-x)} \cdot \sqrt[6]{\frac{4a^{-3}(a+x)^4}{3x^3(a-x)}} \cdot \sqrt[-3]{\frac{x(a^{-1}+x^{-1})}{x^{-2}-a^{-2}}}$;

---

6. $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{5}{3}}$; $a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{1\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{5}}$; $a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{7}{8}}$;

7. $a^{-\frac{3}{4}}b^{-2} \cdot a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot c$;

8. $\sqrt[3]{a^{4\frac{1}{2}}}$; $\sqrt[\frac{4}{3}]{a^8}$; $\sqrt[\frac{3}{2}]{a^{0,5}}$; $\sqrt[\frac{2}{3}]{a} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a^{1\frac{1}{2}}}$;

9. $\sqrt[\frac{4}{5}]{a^{1\frac{1}{3}}}$; $\sqrt[\frac{6}{7}]{a^{1\frac{1}{2}}}$; $\sqrt[\frac{5}{8}]{a^{1\frac{3}{4}}}$; $\sqrt[1\frac{1}{2}]{a^{2\frac{2}{3}}}$;

10. $\sqrt[0,1]{x}$; $\sqrt[0,2]{x}$; $\sqrt[0,3]{x^6}$;

11. $\sqrt[3]{a^{2\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[6]{a^{3\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[1,2]{a^{0,8}}$; $[= a^2]$

12. $\sqrt[2\frac{1}{3}]{a^3} \cdot \sqrt[3\frac{1}{3}]{a^6} \cdot \sqrt[2\frac{1}{2}]{a^{3\frac{3}{4}}} \cdot \sqrt[1\frac{3}{4}]{a^{-0,5}}$; $[= a^4\sqrt[10]{a^3}]$

13. $\sqrt[-1\frac{3}{4}]{\frac{1\frac{1}{2}ab^{-2\frac{1}{2}}c^{x-\frac{2}{3}}}{2\frac{1}{4}a^{3\frac{1}{2}x-1}b^{-2\frac{2}{3}-x}c^{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}}}}$;

14. $\sqrt[-2\frac{1}{2}]{\frac{32a^{5x-2\frac{1}{2}}b^{2,5}c^{1\frac{2}{3}-25x}}{243a^{1\frac{1}{4}-10x}b^{5-1\frac{2}{3}x}c^{-\frac{5}{6}-30x}}}$;

15. $\sqrt[-2\frac{2}{3}]{\dfrac{16\,a^{12x-1\frac{1}{3}}\,b^{8}\,c^{20x-5\frac{1}{3}}}{81\,a^{8x+2\frac{2}{3}}\,b^{4-1\frac{1}{3}x}\,c^{16x+9\frac{1}{3}}}}$;

16. $\sqrt[1\frac{2}{3}]{\dfrac{3\frac{5}{9}\,a^{-3\frac{1}{3}+2{,}5x}\,b^{4\frac{1}{6}}}{27\,c^{7{,}5x+5}\,d^{\frac{5}{6}-13\frac{1}{3}x}}}$.

17. $a^{\frac{3}{2}}\sqrt[\frac{2}{3}]{4^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{1}{3}}\,a^{-\frac{1}{3}}} - \dfrac{4a^2}{b}\sqrt[\frac{3}{2}]{a^{-3}\,b^{4}} + \dfrac{a}{b^{1-0{,}3m}}\sqrt[\frac{2}{3}]{4\,b^{1-0{,}2m}}$

$+\, b^{\frac{1}{2}+2m}\sqrt[3]{216\,b^{3{,}5-6m}}$;

18. $\dfrac{a^3 - 2\,a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{3}{4}} - a^{2\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{3}} + 2\,b^{1\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}}$;

19. $(5\,a^{2\frac{1}{12}} - 41\,a^{1\frac{1}{12}}\,b + 42\,a^{\frac{1}{12}}\,b^2) : (a^{\frac{1}{3}} - 7\,a^{-\frac{2}{3}}\,b)$.

64.

$$\left(\sqrt[x]{a}\right)^y = \sqrt[x]{a^y} = \sqrt[\frac{x}{y}]{a}\,.$$

Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man entweder den Exponenten des Radikanden mit der Zahl multipliziert, oder den Wurzelexponenten mit der Zahl dividiert. (Abgekürzte Formulierung; formuliere vollständig; vergleiche den Wortlaut mit **26** und füge entsprechenden Zusatz bei).

Umgekehrt. Eine Potenz wird radiziert, indem man den Dignand radiziert und die erhaltene Wurzel mit dem Exponenten potenziert.

Zusatz. Sollen an einer Zahl die Operationen des Potenzierens und Radizierens nach einander vorgenommen werden, so ist die Ordnung der Operationen beliebig.

Beweis. Durch **63 II**, oder **48** und **60**, oder?

---

1. $(\sqrt[3]{2})^2$; $(\sqrt[4]{2})^2$; $(\sqrt[4]{a})^6$; $(\sqrt[9]{3})^6$; $(\sqrt[15]{a^2})^3$;

2. $(\sqrt[12]{a^2 b^3})^8$; $(\sqrt[10]{a y^2 z^4})^{15}$; $((\sqrt[3m]{a^4})^2)^m$;

3. $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5})^3$;

4. $\left[2a\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}}\right]^2 + \left[3\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\right]^3 + \left[\frac{2}{3}\sqrt{\dfrac{a}{2}\sqrt{a}}\right]^2$

$-\,(3a^{-1})\left[\sqrt{6a\sqrt[4]{\tfrac{3}{2}a}}\right]^4$;

5. $a\left[\sqrt{2x\sqrt[3]{a}}\right]^3-\left(a\sqrt[-4]{a(2x)^{-1}}\right)^2+\left(\sqrt{3a\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2x}{a}}}}\right)^4$;

6. $(\sqrt[4]{4x})^2+\left[\sqrt{4\sqrt[3]{x}}\right]^3+\left(\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}}}\right)^3+\left(\sqrt[4,8]{x^{\frac{3}{5}}}\right)^4$;

7. $\left[\sqrt[3]{\frac{b}{\sqrt{b}}}\right]^4+\frac{7\left((\sqrt[3]{b^{-2}})^{-1}\right)^2}{9(\sqrt[3]{27b^{-2}})^{-1}}-\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[3]{b^{25}})^{0,2}}{\sqrt[3]{b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}}}\left(\sqrt[12]{\frac{b^5}{\sqrt[\frac{5}{3}]{b^5}}}\right)^2$;

8. $\frac{(27a\sqrt[4]{a^3})^2\left(15a\sqrt[3]{a\sqrt{25a}}\right)^4}{18\left[45a\sqrt{5a\sqrt[3]{5a^2\sqrt{a}}}\right]^6}$; 9. $\frac{(22\frac{1}{2}\sqrt[4]{3a^3})^3\,(1\frac{1}{2}\sqrt[6]{45a^5})^9}{(2\frac{1}{4}\sqrt[12]{30a^7})^8\cdot(\sqrt[15]{270a^4})^{20}}$;

Aufl.: 5. $(x+1)2a\sqrt{2ax}$; 6. $12\sqrt{x}$; 7. $\frac{7}{3}\sqrt[3]{b^2}$; 8. $\frac{\sqrt[3]{5}}{2.3^4.5^4.a^2}$.

---

10. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$; $(2\sqrt{2a}+3\sqrt{2x})^2$; $(4\sqrt{30x}-3x\sqrt{6a})^2$;

11. $(3a^2b\sqrt{2ab}-5ab^2\sqrt{6b})^2$; $(\sqrt{a}+\sqrt{x}+\sqrt{ax})^2$;

12. $(2\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{4a^2x}+a\sqrt[3]{2x^2})^2$;

13. $\left[\frac{7}{5}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2x^2}}+2a\sqrt[3]{\frac{b}{x}}-\frac{10}{7}a^2b\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}\right]^2$;

14. $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5})^2$; $(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a}-3\sqrt{ab}-6b\sqrt[3]{a^2})^2$;

15. $(2b\sqrt[6]{a^2b^2x^3}-3bx\sqrt[3]{a^2}+5ax\sqrt[6]{b^4x^3}-7ax^2\sqrt[3]{ab})^2$;

16. $(15\sqrt[3]{3a^2}+3a\sqrt{5b}-ab\sqrt[3]{9a}-\frac{1}{5}ab\sqrt[6]{1125a^4b^3})^2$;

17. $(5b\sqrt[4]{a}-7\sqrt{ab}+11\sqrt[4]{a^3})^2$;

18. $(7\sqrt[6]{a^3b^3x^5}+10b\sqrt[12]{a^9x^8}-13ab\sqrt{bx})^2$;

19. $(1+\sqrt{x})^3$; $(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3$; $(7a\sqrt{x}-5x\sqrt{a})^3$;

20. $(\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{x^2})^3$; $(\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{a})^3$;

21. $\left[\sqrt{\frac{a}{2x}}+\sqrt{\frac{x}{2a}}\right]^3$; $\left[\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^3$;

22. $(\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{a^2b})^3$; $\left[\frac{a\sqrt{b}}{b}-\frac{b\sqrt{a}}{a}\right]^3$;

65.

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a^m}} = \sqrt[xy]{a^m} = \sqrt[y]{a^{\frac{m}{x}}} = \sqrt[y]{\sqrt[x]{a^m}}.$$

Eine Wurzel wird mit einer Zahl radiziert, indem man entweder den Wurzelexponent mit der Zahl multipliziert, oder den Exponent des Radikanden mit der Zahl dividiert. (Abgek. Form. Formuliere vollst. Vergleiche den Wortlaut mit **27.** und füge entsprechenden Zusatz bei).

Umgekehrt. Eine Zahl wird mit einem Produkt radiziert, indem man die Zahl mit dem einen Faktor radiziert und die erhaltene Wurzel mit dem andern Faktor radiziert.

Beweis. Durch **63** II oder **58** II und **64.**

Zusatz. Soll die Operation des Radizierens mit zwei Zahlen nach einander vorgenommen werden, so ist die Ordnung der Zahlen beliebig.

Zusatz. Es ist gleichgültig, in welcher Ordnung eine Zahl mit mehreren Zahlen nach einander potenziert oder radiziert wird, wenn nur die Art der Operation nicht geändert wird.

---

1. $\sqrt{\sqrt{a}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^9}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^4}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{10}}}$;

2. $\sqrt[5]{\sqrt{a^{15}}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[6]{a^{25}}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}}}$;

3. $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt{a^2 \cdot a}} = \sqrt[4]{a^3}$;

4. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$; $\sqrt{6\sqrt{2}}$; $\sqrt{2\sqrt[3]{4}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;

5. $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$; $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$; $\sqrt[3]{x^2y\sqrt{xy}}$; $\sqrt{2x\sqrt{3x}}$;

6. $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$; $\sqrt[5]{a^2\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$; $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$;

7. $\sqrt[3]{a^4\sqrt[4]{\frac{1}{a}}}$; $\sqrt[6]{a^4\sqrt[5]{\frac{1}{a^4}}}$; $\sqrt[9]{\frac{1}{a}\sqrt[7]{a^4}}$;

8. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}$; $\sqrt{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}}}$;

9. $\sqrt[3]{\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\sqrt{a^{13}}}}$; $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{ab}}}$;

10. $\sqrt[7]{\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{4}\sqrt{2a\sqrt[3]{\frac{1}{32}a}}}$;

---

11. $9\sqrt{6\sqrt{28}} + 3\sqrt{12\sqrt{7}} - 8\sqrt{4\sqrt{63}}$; $[= 8\sqrt[4]{63}]$

12. $3\sqrt{40\sqrt{12}} + 2\sqrt{5\sqrt{48}} - 4\sqrt{15\sqrt{27}}$; $[= 4\sqrt[4]{75}]$

13. $4\sqrt[3]{6\sqrt{32}} + \sqrt[3]{9\sqrt{162}} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}} - 10\sqrt{2\sqrt[3]{144}}$; $= \sqrt[6]{18}$

14. $2\sqrt{2a\sqrt{4a}} - 3\sqrt{\frac{12}{a}\sqrt{\frac{a^5}{9}}} + 5a\sqrt{\frac{5}{a}\sqrt{0{,}04a}}$; $[= 3\sqrt[4]{a^3}]$

15. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^{-2}}} - 2\sqrt[3]{\frac{16}{a}\sqrt{a^3}} + \frac{1}{a}\sqrt{a^5\sqrt[-3]{a^8}} + 4\sqrt[-2]{\frac{a}{2}\sqrt[-3]{\frac{a^4}{2}}}$; $= 2\sqrt[6]{a}$

16. $\sqrt{3a\sqrt{9a^2\sqrt{a^{-1}}}} + \sqrt[4]{1000a^5\sqrt[-2]{0{,}01a^3}} - \sqrt{a^{-1}\sqrt[-4]{1 : a^{11}}}$
$- a\sqrt[-2]{a\sqrt[-2]{a\sqrt[-2]{a^{-1}}}}$; $[= 11\sqrt[8]{a^7}]$

17. $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^4}} + \sqrt{a\sqrt[-3]{a\sqrt[-3]{a^8}}} + \sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^6\sqrt[3]{a^2}}}$; $[= 3\sqrt[9]{a^7}]$

18. $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{b^4\sqrt[3]{ab^4}}} + ab^{-1}\sqrt[-3]{a^2b^{-5}\sqrt[-4]{a^3b^2}}$
$+ \frac{b}{a}\sqrt[-2]{\frac{b}{a^4}\sqrt[3]{\left[\frac{b^2}{a}\sqrt{a^{-3}}\right]^{-1}}}$; $[= 3\sqrt[12]{a^7b^{10}}]$

19. $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2b^2}{a^3}\sqrt{\frac{a^3}{2b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{4a^2}}}}} - 4\sqrt{\frac{a}{2b^2}\sqrt{\frac{b^6}{2a}\sqrt[3]{\frac{1}{8a}\sqrt{a^8}}}}$
$+ \frac{2}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b}\sqrt[-4]{0{,}25a^{-5}b\sqrt[-2]{(ab^{-1}(2b^2)^{-5})^{-1}}}}$
$+ 2b\sqrt[4]{a\sqrt[-2]{b\sqrt[3]{(ab^{-1,5})^{-6}}}}$; $[= 3\sqrt[24]{2ab}]$

20. $\sqrt[6]{\frac{x^2 - x^3}{1 - \frac{1}{x}}} \cdot \sqrt[-4]{\frac{x + x^2}{\sqrt[-3]{(1 - x^3)^{-2}}}} \cdot \sqrt[-3]{\frac{\sqrt[-2]{x^{-4} - x^{-2}}}{(x^2 - x^5)\sqrt[-2]{1 - x^2}}}$
$\cdot \sqrt{\frac{x^2(1 - x^{-3})^{-1}}{\sqrt[-2]{1 + \frac{1}{x}}}}. = x^2\sqrt{x}$

Ausziehen von Wurzeln aus Zahlen und Polynomen.

66.

Nachdem die Wurzeln nach den vorhergehenden Regeln vereinfacht sind, muß man noch versuchen, die Wurzel auszuziehen. Dies geht nach einfachen Regeln nur bei der Quadrat- und Kubikwurzel und durch Wiederholung der Operation (nach **65**) bei den aus diesen abgeleiteten (der 4., 6., 8., 9. u. s. w.)

Quadratwurzel aus Polynomen.

Soll die Quadratwurzel aus einem Polynom gezogen werden, so muß das Polynom das Quadrat eines mehrgliedrigen Ausdruckes sein, muß also die allgemeine Form haben

$$\sqrt{a^2 \pm 2ab + b^2} = a \pm b.$$

Deshalb wendet man folgendes Verfahren an: Man ordnet den Radikanden nach Potenzen einer Größe; man nimmt die Wurzel aus dem 1. Glied; sie gibt das erste Glied des Resultates. Man bildet das Quadrat dieses Gliedes und zieht es vom Radikanden ab. Das nächste im Radikanden enthaltene Glied hat die Form $2ab$; man dividiert also das zweite Glied des Radikanden durch das Doppelte des 1. Gliedes des Resultates und findet so das zweite Glied des Resultates. Man bildet nun das doppelte Produkt aus dem 1. und 2. Glied des Resultates, und das Quadrat des 2. Gliedes und subtrahiert beide vom Radikanden. Der Rest des Radikanden hat die Form $2(a+b)c$; man dividiert ihn also mit dem Doppelten des vorhandenen Resultates $2a+2b$, und erhält so das dritte Glied des Resultates. Man bildet wieder das doppelte Produkt dieses dritten Gliedes mal jedem vorhergehenden und das Quadrat des dritten Gliedes und subtrahiert vom Radikanden. Man fährt so fort, bis bei der Subtraktion vom Radikanden 0 bleibt. Daß das so gefundene Resultat richtig sei, schließt man daraus, daß man im Verlauf der Rechnung das volle Quadrat des Resultates vom Radikanden subtrahiert hat, und daß es sich demselben als gleich erwiesen hat. Ist, bis man das letzte Glied des Radikanden bei der Subtraktion benützt hat, noch nicht der Rest 0 geblieben, so bleibt er auch bei weiterer Fortsetzung der Rechnung nicht mehr, weil von da an stets mehr Glieder zu subtrahieren sind als Minuend vorhanden sind. Dies zeigt an, daß der Radikand kein volles Quadrat ist, also die Wurzel nicht ausgezogen werden kann. Die Ausziehung solcher unvollständigen Wurzeln gehört nicht der elementaren Mathematik an.

Beispiel:

$$\sqrt{9a^4 - 42a^3b + 79a^2b^2 - 70ab^3 + 25b^4} = 3a^2 - 7ab + 5b^2$$

$$\begin{array}{l}
9a^4 \\
(-) \\
\hline
-42a^3b \qquad : 6a^2 \text{ (gibt } -7ab) \\
-42a^3b + 49a^2b^2 \\
(+) \qquad (-) \\
\hline
30a^2b^2 \qquad : 6a^2 - 14ab \text{ (gibt } 5b^2) \\
30a^2b^2 - 70ab^3 + 25b^4 \\
(-) \qquad (+) \qquad (-) \\
\hline
0
\end{array}$$

---

1. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$; $\sqrt{4x^2 + 12x + 9}$; $\sqrt{16 - 40x + 25x^2}$;

2. $\sqrt{\frac{a^2}{b^4} - 2 + \frac{b^4}{a^2}}$; $\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}}$; $\sqrt{\frac{4a^2b^4}{9x^6} - \frac{8a^3}{5bx^2} + \frac{36a^4x^2}{25b^6}}$;

3. $\sqrt{\frac{x^2}{y^4} + \frac{2}{xy} + \frac{y^2}{x^4}}$; $\sqrt{\frac{1}{4a^4x^2} - \frac{3}{ax^2} + \frac{9a^2}{x^2}}$;

4. $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$; $\sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x}}$; $\sqrt{\frac{4}{9}ab + \frac{49}{64}bx - \frac{7}{6}b\sqrt{ax}}$.

5. $\sqrt{a^2b + a^5b^2 - 2a^3b\sqrt{ab}}$; $\sqrt{\frac{a}{4} + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{a^3x^2}}$;

6. $\sqrt{x^2 + \frac{25}{36}x - \frac{5}{3}x\sqrt{x}}$; $\sqrt{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} - 2\sqrt{ab}}$;

7. $\sqrt{a\sqrt{ax} + 2ax + x\sqrt{ax}}$; $\sqrt{\sqrt{ax} + ax^2 - 2x\sqrt[4]{a^3x}}$;

8. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2} + 2x + x\sqrt[3]{x}}$; $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a} + \frac{a}{x}\sqrt[3]{ax} + 2\sqrt[3]{\frac{a}{x}}}$;

9. $\sqrt{x\sqrt[3]{a^2x} - 2ax\sqrt[3]{x^2} + ax^2\sqrt[3]{4a}}$; $\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}}$;

---

10. $\sqrt{a^4 + 4a^3 + 10a^2 + 12a + 9}$;

11. $\sqrt{(a^4 - 6a^3b + 19a^2b^2 - 30ab^3 + 25b^4)}$;

12. $\sqrt{(9a^8 - 30a^6x + 109a^4x^2 - 140a^2x^3 + 196x^4)}$;

13. $\sqrt{(36a^4 + 8a^3 - 11\frac{5}{9}a^2 - \frac{4}{3}a + 1)}$;

14. $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2)}$;

15. $\sqrt{(\frac{16}{25}x^6 - \frac{7}{5}ax^5 - \frac{109}{192}a^2x^4 + \frac{35}{24}a^3x^3 + \frac{25}{36}a^4x^2)}$;

16. $\sqrt{\left[121\frac{a^4}{x^6} + 154\frac{a^2b}{x^4} - 61\frac{b^2}{x^2} - 70\frac{b^3}{a^2} + 25\frac{b^4x^2}{a^4}\right]}$;

17. $\sqrt{(9x^2 - 30ax - 3a^2x + 25a^2 + 5a^3 + \frac{1}{4}a^4)}$;

18. $\sqrt{\left[\frac{a^2}{x^2} + 2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6}\right]}$;

19. $\sqrt{(1 - 2x + 5x^2 - 6x^3 + 6x^4 - 4x^5 + x^6)}$;

20. $\sqrt{\left[\frac{x^2}{4} + 2x + 1 - \frac{8}{x} + \frac{25}{x^2} - \frac{24}{x^3} + \frac{16}{x^4}\right]}$;

21. $\sqrt{(9a^2 - 12ab + 4b^2 + 30ac - 20bc + 25c^2 - 24ad + 16bd - 40cd + 16d^2)}$;

22. $\sqrt{\left[\frac{9a^6}{16b^8} - \frac{5a^5}{4b^6} - 3\frac{11}{36}\frac{a^4}{b^4} + \frac{401a^3}{72b^2} + \frac{211a^2}{36} - 4ab^2 + \frac{9b^4}{16}\right]}$;

23. $\sqrt{(9a^{2m}b^2 - 12a^{2m-1}b^3 + 28a^{2m-2}b^4 - 46a^{2m-3}b^5 + 36a^{2m-4}b^6 - 40a^{2m-5}b^7 + 25a^{2m-6}b^8)}$;

24. $\sqrt{(\frac{4}{9}a^2x^4 - \frac{4}{3}abx^3z + \frac{8}{3}a^2bx^2z^2 + b^2x^2z^2 - 4ab^2xz^3 + 4a^2b^2z^4)}$;

25. $\sqrt{(49a^2b + 84ab\sqrt{ab} - 34ab^2 - 60b^2\sqrt{ab} + 25b^3)}$;

26. $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2x^3 + \frac{1}{3}ax^2\sqrt{ax} + \frac{13}{36}ax^2 + \frac{1}{6}x\sqrt{ax} + \frac{1}{16}x)}$;

27. $\sqrt{(2x + 4x\sqrt{2x} + 12x^2 + 8x^2\sqrt{2x} + 8x^3)}$;

28. $\sqrt{3a^2 + 6a\sqrt{6ax} - 18ax - 36\sqrt{6ax} + 108x^2)}$;

29. $\sqrt{\left[\frac{45a^4}{2} - 30a^2\sqrt{30a} - 300a + 400\sqrt{\frac{30}{a}} + \frac{4000}{a^2}\right]}$;

30. $\sqrt{\left[\frac{25}{12}a + 5\sqrt{\frac{5ax}{6}} - \frac{5}{2}x - x\sqrt{\frac{30x}{a}} + \frac{3x^2}{a}\right]}$;

31. $\sqrt{(100x^4 - 100x^3\sqrt[3]{a} + 65x^2\sqrt[3]{a^2} - 20ax + 4a\sqrt[3]{a})}$;

32. $\sqrt{(b\sqrt[3]{a^2b} - 2ab\sqrt[3]{2b^2} + 3ab^2\sqrt[3]{4a} - 4ab^2\sqrt[3]{a^2b} + 2a^2b^2\sqrt[3]{2b^2})}$;

33. $\sqrt{(48a^4\sqrt[3]{3b^2} - 96a^3b\sqrt[3]{2a} + 40a^2b\sqrt[3]{36a^2b} - 48a^2b\sqrt[3]{3b^2} + 18ab^2\sqrt[3]{2a})}$;

34. $\sqrt{(a^{8m-4}b^{2-6x} - 6a^{6m-3}b^{3-4x} + 13a^{4m-2}b^{4-2x} - 24a^{2m-1}b^5 + 40b^{6+2x} - 24a^{1-2m}b^{7+4x} + 36a^{2-4m}b^{8+6x})}$;

35. $\sqrt{(16a^3 + 16a^2\sqrt{ax} - 4a^2x - 28ax\sqrt{ax} - 11ax^2; + 6x^2\sqrt{ax} + 9x^3)}$;

36. $\sqrt{\left[x^3 + 4x^2\sqrt{x} + 10x^2 + 16x\sqrt{x} + 19x + 16\sqrt{x} + 10 + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right]}$;

37. $\sqrt{(a^2\sqrt[3]{4a^2} + 2a^2\sqrt[6]{32a^2x^3} - 2a^2x + 6ax^2\sqrt[3]{2a} - 4ax^2\sqrt{2x} + 2x^3\sqrt[3]{4a^2})}$;

38. $\sqrt{(a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + a^2 - 2ab + b^2)}$.

67.

Kubikwurzel aus Polynomen.

Das Verfahren beim Ausziehen einer Kubikwurzel aus Polynomen ist verwandt mit dem bei Quadratwurzeln und entspricht der Formel $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$.

Man nimmt die Kubikwurzel aus dem 1. Glied des Radikanden und erhält dadurch das erste Glied a des Resultates. Mit dem dreifachen Quadrat dieses ersten Gliedes dividiert man in das zweite Glied des Radikanden und erhält so das 2. Glied b des Resultates; man bildet der Formel gemäß die Werte $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3, und subtrahiert diese vom Radikanden. Man betrachtet das nun erhaltene $a + b$ des Resultates als dessen erstes Glied, dividiert also mit $3(a + b)^2$ u. s. f. Über Beweis und Resultat gelten dieselben Bemerkungen wie bei der Quadratwurzel.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{(8x^6 - 60x^5 + 198x^4 - 365x^3 + 396x^2 - 240x + 64)} = 2x^2 - 5x + 4$$

$$\begin{array}{l}
(-)\,8x^6 \\
\hline
\quad -60x^5 \qquad : 12x^4 \ (\text{gibt } -5x) \\
\quad -60x^5 + 150x^4 - 125x^3 \\
\quad \ (+) \qquad (-) \qquad (+) \\
\hline
\qquad 48x^4 - 240x^3 \ : 12x^4 - 60x^3 + 75x^2 \ (\text{gibt } 4) \\
\qquad 48x^4 - 240x^3 + 300x^2 \\
\qquad (-) \qquad (+) \qquad (-) \\
\qquad\qquad + 96x^2 - 240x + 64 \\
\qquad\qquad (-) \qquad (+) \qquad (-) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

---

1. $\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$; $\sqrt[3]{(a^3 - 6a^2b^2 + 12ab^4 - 8b^6)}$;
2. $\sqrt[3]{\left[1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{8}\right]}$; $\sqrt[3]{(125a^3 - 300a^2b + 240ab^2 - 64b^3)}$;
3. $\sqrt[3]{\left[\frac{27}{64}\,\frac{a^6}{x^3} - \frac{9}{4}a^3 + 4x^3 + \frac{64}{27}\,\frac{x^6}{a^3}\right]}$;
4. $\sqrt[3]{\left[\frac{512}{x^3} - \frac{16}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{1728}\right]}$;
5. $\sqrt[3]{(a\sqrt{a} - 3a\sqrt{x} + 3x\sqrt{a} - x\sqrt{x})}$;
6. $\sqrt[3]{(2a\sqrt{2a} - 2ax\sqrt{3x} + x^3\sqrt{2a} - \frac{1}{9}x^4\sqrt{3x})}$;
7. $\sqrt[3]{(8a + 12\sqrt[3]{4a^2x^2} + 12x\sqrt[3]{2ax} + 4x^2)}$;
8. $\sqrt[3]{(192a^2b - 144ab\sqrt[3]{36ax^2} - 216bx\sqrt[3]{6a^2x} - 108bx^2)}$;

9. $\sqrt[3]{\left[\frac{a}{9}\sqrt{3a} + \sqrt[3]{3a} + \frac{3}{a}\sqrt[6]{3a} + \frac{3}{a^2}\right]}$;

10. $\sqrt[3]{(16\sqrt{2} - 24\sqrt[3]{12} + 12\sqrt[6]{2592} - 12)}$;

11. $\sqrt[3]{(x^6 - 12x^5 + 63x^4 - 184x^3 + 315x^2 - 300x + 125)}$;

12. $\sqrt[3]{\left[\frac{x^3}{8} + \frac{9x^2}{4} + \frac{21x}{2} - 9 - \frac{84}{x} + \frac{144}{x^2} - \frac{64}{x^3}\right]}$;

13. $\sqrt[3]{(27a^9 - 189a^8b + 576a^7b^2 - 973a^6b^3 + 960a^5b^4 - 525a^4b^5 + 125a^3b^6)}$;

14. $\sqrt[3]{(a^{12} + 3a^{10}b^3 - 5a^6b^9 + 3a^2b^{15} - b^{18})}$;

15. $\sqrt[3]{(1 - 6x + 13\frac{1}{2}x^2 - 14x^3 + 6\frac{3}{4}x^4 - 1\frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{8}x^6)}$.

68.

Quadratwurzel aus Zahlen.

Soll man aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen, so hat man diese Zahl als Radikand als ein Quadrat anzusehen und den zugehörigen Dignand zu finden. Da Zehner beim Quadrieren Hunderter geben, Hunderter aber Zehntausender, und Tausender Millionen geben, allgemein, da eine Ziffer mit dem Stellenwert 10^n beim Quadrieren Ziffern mit dem Stellenwert 10^{2n} gibt, so hat man den Radikanden in Klassen von je zwei Ziffern abzuteilen, vom Dezimalkomma aus. Die vorderste Klasse enthält das Quadrat der ersten Ziffer; nimmt man demnach die nächst niedrige Quadratzahl, die in der ersten Klasse enthalten ist, und aus ihr die Wurzel, so hat man die erste Ziffer des Resultates. Ihr Quadrat subtrahiert man von der ersten Klasse und stellt die zweite Klasse daneben. Dies enthält das doppelte Produkt aus der 1. und 2. Ziffer des Resultates im Stellenwert ihrer vorletzten Stelle und das Quadrat der 2. Ziffer im Stellenwert ihrer letzten Stelle. Dividiert man demnach mit der doppelten ersten Ziffer in die Zahl, welche den Stellenwert der vorletzten Stelle hat, also mit Weglassung der letzten Stelle, so erhält man die zweite Ziffer des Resultates. Man bildet das Doppelte der 1. und 2. Ziffer und das Quadrat der zweiten Ziffer, indem man die zweite Ziffer neben das Doppelte der ersten Ziffer schreibt, und diese Zahl mit der zweiten Ziffer multipliziert. Das erhaltene Produkt subtrahiert man vom zweiten Klassenteil und stellt dann die dritte Klasse herunter. Man betrachtet nun das bisher erhaltene als den ersten Teil des Resultates und sucht die nächste Ziffer auf dieselbe Art. So fährt man fort, bis bei der Subtraktion der Rest 0 bleibt, was anzeigt, daß die Wurzel herausgeht, daß also der Radikand ein vollständiges Quadrat war.

Beispiel:

$$\sqrt{54|16|96} = 736; \qquad \sqrt{3|57|21} = 189$$

```
√54|16|96        = 736;        √3|57|21        = 189
 49                              1
  516|143                        257|28
  429                            224
   8796|1466                      3321|369
   8796                           3321
      0                              0
```

Anmerkung: Ist man gewohnt, bei der Bildung des Subtrahenden gleich den Rest zu berechnen durch Ergänzung des Subtrahenden zum Minuenden, so vereinfacht sich das Verfahren.

Beispiel:

```
√20|45|75|29  = 4523
  445 : 85
   2075 : 902
    27129 : 9043
    00000
```

Ist der Radikand ein Dezimalbruch, so gilt dasselbe Verfahren, wenn man im Resultat dann das Komma macht, wenn man im Radikand die erste Klasse nach dem Komma heruntersetzt; denn der Stellenwert der dadurch erhaltenen Ziffern entspricht dann dem Stellenwert der Klassen. Hat der Dezimalbruch erst nach dem Komma bedeutende Ziffern, so hat man im Resultat 0 Ganze und nach dem Komma noch soviele Nullen als Klassen von je zwei Nullen im Radikand nach dem Komma stehen; erst die nächste Klasse des Radikanden liefert die erste bedeutende Ziffer des Resultates.

```
√0,|00|64|64|16 = 0,0804.
        64 : 16
        6416 : 1604
```

Wenn die Subtraktion nicht aufgeht, wenn die letzte Klasse des Radikanden bei der Subtraktion verwendet wurde, so geht sie auch später nicht mehr auf, wenn man das Verfahren dadurch fortsetzt, daß man beliebig viele Klassen von je zwei Nullen dem Radikanden beifügt. Denn entweder ist eine folgende Ziffer des Resultates Null, dann bleibt derselbe Minuend, oder sie ist von Null verschieden, dann kann ihr Quadrat nicht an letzter Stelle Null haben. In einem solchen Falle kann die Wurzel nicht vollständig ausgezogen werden; man setzt das Verfahren dann nur so weit fort, bis man eine zur Auswertung der gesuchten Zahl hinreichende Anzahl von Ziffern gefunden hat, und vernachläßigt den Rest, welcher dann weniger beträgt als eine Einheit vom Stellenwert der letzten Ziffer. Hiezu genügen in den Fällen der gewöhnlichen Anwendung 5 bedeutende Ziffern.

Beispiel:

$\sqrt{20} = 4,4721$
400 : 84
6400 : 887
19100 : 8942
121600 : 8944

$\sqrt{0,53|7} = 0,73280$
470 : 143
4100 : 1462
117600 : 14648
41600 : 14656

Wenn die Quadratwurzel aus einer Zahl nicht aufgeht, so liefert das angegebene Verfahren doch ein Mittel, um für den Zahlenwert der Wurzel einen Dezimalbruch zu finden, den man fortsetzen kann, so weit man will, so daß der übrig bleibende Fehler kleiner ist als eine beliebig kleine gegebene Größe. Ein solches Verfahren erkennt man in der Mathematik als eine vollständige Lösung an, denn es gibt das Resultat mit jeder gewünschten Genauigkeit.

Wenn die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl nicht aufgeht, so liefert das Verfahren einen unendlichen Dezimalbruch. Wir beweisen, daß derselbe nicht periodisch werden kann. Denn würde er periodisch, so wäre sein Wert gleich einem Quotienten von endlichen Zahlen; die Wurzel würde also erscheinen als Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruch, und müßte die Eigenschaft haben, daß sie quadriert eine ganze Zahl, den Radikanden, gäbe. Das ist aber unmöglich, denn bringt man Zähler und Nenner dieses Bruches auf die einfachste Form, so daß sie, z und n, relative Primzahlen sind, so sind auch ihre Quadrate, z^2 und n^2, relative Primzahlen, können also als Bruch nicht eine ganze Zahl geben. **Daraus folgt, daß solche Quadratwurzeln unendliche nicht periodische Dezimalbrüche sind.** Der Beweis ist leicht auszudehnen auf Wurzeln aus Dezimalbrüchen. Ein unendlicher unperiodischer Dezimalbruch kann, weil er unperiodisch ist, nicht durch ein Verhältnis zweier endlichen Zahlen ausgedrückt werden, da dieses beim Nenner n eine Periode von höchstens $n - 1$ Stellen gibt; er kann also nicht gemessen werden durch die Einheit, oder einen Teil der Einheit, den man erhält, wenn man die Einheit in eine endliche Anzahl gleicher Teile teilt. **Jede Größe, welche nicht durch die Einheit oder deren Bruchteile in endliche Art ausdrückbar ist, heißt eine irrationale** (unberechenbare, unausrechenbare), **eine mit der Einheit incommensurable** (unausmeßbare), **Größe.** Quadratwurzeln, welche nicht herausgehen, sind also irrationale Zahlen. Im Gegensatz hiezu nennt man die ganzen Zahlen, die Brüche und die endlichen Dezimalbrüche **rationale Zahlen, das sind solche, deren Werte durch die Einheit und deren Bruchteile in endlicher Weise bestimmt werden können;** ihr Wert kann aus der Einheit durch eine endliche Anzahl von Operationen mit den vier Grundrechnungsarten gebildet werden. Auch die unendlichen periodischen Dezimalbrüche sind rationale Zahlen.

Die Quadratwurzeln führen also, da sie zu den irrationalen Zahlen führen, zu einer **Erweiterung des Zahlenbegriffes**, indem in den Zwischenraum zwischen je zwei Einheiten, in welchen durch Einführung der Brüche schon die Bruchteile der Einheit eingefügt sind, nun noch die irrationalen Zahlen eingeschaltet werden, derart, daß sie sich zwischen je zwei ungemein nahe beisammenstehende, aber doch durch eine Lücke getrennte rationale Zahlen (Brüche) hineinstellen, ohne mit einer derselben zusammenfallen.

69.

Kubikwurzel aus Zahlen.

Soll aus einer Zahl die Kubikwurzel ausgezogen werden, so teilt man die Zahl vom Komma aus nach rechts und links in Klassen von je drei Ziffern, da Zehner auf der dritten Potenz Tausender geben u. s. w. da allgemein eine Ziffer vom Stellenwert 10^n auf der dritten Potenz Ziffern vom Stellenwert 10^{3n} gibt. Betrachtet man den Radikanden als Kubus eines Binoms, also von der Form $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so ergeben sich folgende Regeln zur Ausziehung der Kubikwurzel:

Man nimmt die nächstniedrige Kubikzahl, welche in der ersten Klasse enthalten ist; ihre Grundzahl gibt die erste Ziffer (a) des Resultates; ihren Kubus subtrahiert man von der ersten Klasse und stellt die zweite Klasse dazu. Man bildet das dreifache Quadrat der ersten Ziffer ($3a^2$) und dividiert damit in den Radikanden, wobei man die zwei letzten Stellen desselben nicht berücksichtigt (da $3a^2$ den Stellenwert 10^2 hat); der Quotient bildet die zweite Ziffer b des Resultates. Man bildet nun $3ab$ und b^2, stellt sie unter das schon vorhandene $3a^2$, indem man stets um eine Stelle nach rechts rückt, addiert diese drei Zahlen und multipliziert die Summe noch mit b, so daß sie $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ vorstellt. Man subtrahiert dies vom Radikanden und stellt dann die nächste Klasse dazu. Man betrachtet die nun vorhandene zweiziffrige Zahl des Resultates als dessen ersten Teil und sucht die nächste Ziffer c auf dieselbe Art, wie man vorher b suchte, und fährt dann so fort. Das Verfahren beendet sich selbst, wenn bei der Subtraktion dann 0 bleibt, wenn die letzte Klasse des Radikanden dabei beteiligt ist, und man findet den Beweis darin, daß man im Lauf des Verfahrens den Kubus des Resultates vom gegebenen Radikanden subtrahiert hat und beide sich hiebei als gleich erwiesen haben. Bleibt hiebei nicht der Rest 0, so setzt man das Verfahren fort, indem man nach und nach beliebig viele Klassen von je drei Nullen vom Radikanden heruntersetzt. Ähnlich wie bei der Quadratwurzel überzeugt man sich, daß das Verfahren dann nie mehr von selbst ein Ende nehmen kann, daß also das Resultat ein unendlicher Dezimalbruch wird, der nicht periodisch ist, also auch eine **irrationale** Zahl vorstellt.

$$\sqrt[3]{381|078|125} = 72$$

$$\begin{array}{r|l}
343 & \\
\hline
38078 & 147 \quad = 3 \cdot 7^2 \\
 & \quad 42 \quad = 3 \cdot 7^2 \\
 & \qquad 4 = 2^2 \\
30248 & 15124 \cdot 2 \\
\hline
7830125 & 15552 \quad = 3 \cdot 72^2 \\
 & \quad 1080 \quad = 3 \cdot 72 \cdot 5 \\
 & \qquad 25 \quad = 5^2 \\
7830125 & 1566025 \cdot 5 \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Zeigt sich die Wurzel als irrational, so begnügt man sich im Resultat meist mit 5 bedeutenden Ziffern, und kann sich zur Bestimmung der letzten Ziffer die kleine Abkürzung gestatten, daß man nicht einen neuen Divisor bildet, sondern den letzten Divisor nach Anhängung von zwei Nullen benützt. Bei Dezimalbrüchen gilt ähnliches wie bei der Quadratwurzel.

$$\sqrt[3]{100} = 4,6416$$

$$\begin{array}{r|l}
64 & \\
\hline
36000 & 48 \ldots\ldots = 3 \cdot 4^2 \\
 & \quad 72 \\
 & \quad 36 \\
33336 & 5556 \cdot 6 \\
\hline
2664000 & 6348 = 3 \cdot 46_2 \\
 & \quad 552 \\
 & \quad\; 16 \\
2561344 & 640336 \cdot 4 \\
\hline
102656000 & 645888 = 3 \cdot 464^2 \\
64602721 & \quad 13921 \\
\hline
38053279000 & 64588800 = 3 \cdot 4640^2.
\end{array}$$

Man darf im allgemeinen annehmen, daß, auf wie viele bedeutende Ziffern die Wurzel ausgezogen ist, auf ebensoviele bedeutende Ziffern die entsprechende Potenz des Resultates mit dem Radikanden übereinstimmt; so ist z. B. $4,6416^3 = 100,000722 \ldots$ oder $\sqrt{7,5} = 2,7386$, und $2,7386^2 = 7,49992996$.

70.

Da $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab}$, so ist

$$\sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}.$$

Hat man demnach einen Wurzelausdruck von der Form links, so läßt er sich oft in das Binom zweier Wurzeln zerlegen, da sich vielfach passende Zahlen a und b finden lassen, welche der Formel entsprechen. Z. B. bei $\sqrt{8+2\sqrt{17}}$ muß 8 als die Summe $(a+b)$ zweier Zahlen betrachtet werden, deren Produkt $(= ab) = 15$ ist. 3 und 5 sind solche Zahlen, also ist:

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Allgemein: Es ist

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Beweis: Quadriert man das Binom rechts, so erhält man den Radikand $a \pm \sqrt{b}$.

Beispiel: $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

---

1. $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$; $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$; $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$;

2. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$;

3. $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$; $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; $\sqrt{12+8\sqrt{2}}$;

4. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$;

5. $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; $\sqrt{1\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$; $\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

6. $\sqrt{6+\sqrt{35}}$; $\sqrt{9+\sqrt{77}}$; $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$;

7. $\sqrt{9-3\sqrt{5}}$;

8. $\sqrt{\sqrt{27}+2\sqrt{6}}$; $\sqrt{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$;

9. $\sqrt{3\sqrt{2}+4}$;

10. $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$; $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$; $\sqrt{y+1-2\sqrt{y}}$;

11. $\sqrt{2x-1+2\sqrt{x^2-x}}$; $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}$;

12. $\sqrt{5-2\sqrt{6+x-x^2}}$; $\sqrt{3-2\sqrt{2-x-x^2}}$;

Die imaginären Zahlen.

71.

Wenn man versucht, aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, so stößt man auf eine Schwierigkeit, weil in diesem Falle weder eine positive noch eine negative Größe der Definition einer Wurzel entspricht; denn behauptet man $\sqrt{-9} = +3$, so ist das unrichtig, weil $(+3)^2$ nicht $= -9$, und behauptet man $\sqrt{-9} = -3$, so ist das auch unrichtig, denn $(-3)^3$ ist nicht $= -9$. Es gibt also weder unter den positiven noch unter den negativen Zahlen eine Zahl, welche der Quadratwurzel aus einer negativen Größe gleich gesetzt werden könnte, da das Quadrat sowohl der positiven als auch der negativen Größe stets positiv ist. *Wir müssen also die Forderung, die Quadratwurzel aus einer negativen Größe auszuziehen, als eine unerfüllbare erklären, so lange wir nur ein Zahlensystem von positiven und negativen Größen besitzen.*

Da aber die Forderung, aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen, an sich nichts wiedersinniges enthält, wir dieselbe aber innerhalb des vorhandenen Zahlensystems von positiven und negativen Zahlen nicht erfüllen können, so werden wir veranlaßt, *das vorhandene Zahlensystem zu erweitern*, indem wir zu der schon vorhandenen Doppelreihe von positiven und negativen Zahlen noch eine Doppelreihe von Zahlen hinzufügen, welche gebildet wird durch $\sqrt{-1}$ als Einheit. Diese Größe heißt die *imaginäre Einheit* und wird mit i bezeichnet; die aus ihr gebildeten Zahlen heißen *imaginäre Zahlen* im Gegensatz zu den positiven und negativen Zahlen, welche *reelle* Zahlen heißen. Die imaginäre Einheit ist somit dadurch definiert, daß sie diejenige Größe sein soll, deren Quadrat $= -1$ ist, also $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$.

Mit der imaginären Einheit bildet man die Reihe der positiv imaginären Zahlen durch Nummerieren, $i + i = 2i$, $2i + i = 3i$, $3i + i = 4i$ 2c., und bildet die Reihe der negativ imaginären Zahlen $-i$, $-2i$, $-3i$ 2c.

Nachdem die imaginären Zahlen auf diese Weise definiert sind, kann man die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl angeben durch imaginäre Einheiten:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i,$$

$$\text{denn } (\sqrt{a} \cdot i)^2 = a(-1) = -a.$$

Das heißt: die Quadratwurzel aus einer negativen Größe ist imaginär und enthält so viele imaginäre Einheiten als die Quadratwurzel aus der positiv genommenen Größe angibt. Z. B. $\sqrt{-9} = 3\sqrt{-1} = 3i$. Da aber jede Quadratwurzel positiv oder negativ

sein kann, mit $\sqrt{-1}$ oder i aber stets die positiv imaginäre Einheit bezeichnet wird, so stellt man in diesem Falle das $\pm$ Zeichen vor die Maßzahl der imaginären Größe; also $\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3i$; $\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$.

72.

Da imaginäre Zahlen aus der imaginären Einheit ebenso gebildet sind, wie reelle Zahlen aus der reellen Einheit, so unterliegen sie zunächst denselben Gesetzen der Addition und Subtraktion.

Beispiel: $3\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1} = 8\sqrt{-1}$;
$7i - 4i = 3i$; $4i - 7i = -3i$;
$6\sqrt{-1} - 8\sqrt{-1} + 11\sqrt{-1} - 4\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$ rc.

Es enthält auch nichts widersinniges, eine Größe zu bilden, die aus mehreren reellen und mehreren imaginären Einheiten zusammengesetzt ist, nur ist es hiebei unzulässig, die reellen und imaginären Einheiten zu einer einzigen Zahl zu vereinigen. Eine solche aus reellen und imaginären Einheiten zusammengesetzte Größe heißt eine komplexe Größe und kann nur in die Form $a + b\sqrt{-1}$ vereinfacht werden.

Beispiel: $2 + 3 + 4\sqrt{-1} - 7 + 5\sqrt{-1} + 3 - 3\sqrt{-1} = 1 + 6\sqrt{-1}$; $2a + 5b\sqrt{-1} - 3a\sqrt{-1} + 5b - 2b\sqrt{-1} = 2a + 5b + (3b - 3a)\sqrt{-1}$.

Zwei komplexe Größen, welche sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden, heißen konjugierte komplexe Größen, z. B. $3 + 2\sqrt{-1}$, $3 - 2\sqrt{-1}$; $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$.

Für die Multiplikation zweier rein imaginären Größen verliert die für reelle Größen gegebene Definition ihren Sinn, und es gibt auch keine bloß im Gebiet des Imaginären liegende Definition dafür, da das Imaginäre so definiert ist, daß es bei der Multiplikation mit sich selbst nicht imaginär bleibt, sondern reell wird. Man hat daher die Multiplikation imaginärer Größen abgesehen von ihrer Bedeutung als rein algebraische Operation anzusehen, bei welcher $\sqrt{-1}$ die Rolle eines selbständigen Faktors spielt, der die Eigenschaft hat, daß er mit sich selbst multipliziert -1 gibt.

Es ist demnach $a\sqrt{-1} \cdot b\sqrt{-1} = a \cdot b \cdot (-1) = -ab$. $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-15} = -3\sqrt{5}$; $3\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} = -18\sqrt{-1}$.

Sollen komplexe imaginäre Größen mit einander multipliziert werden, so betrachtet man sie als Binome, multipliziert sie als solche und vereinfacht den entstandenen Ausdruck zu einer komplexen Größe.

Beispiel:

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = ac + bc\sqrt{-1} + ad\sqrt{-1} - bd$$
$$= ac - bd + (bc+ad)\sqrt{-1}.$$
$$(3+2\sqrt{-1})(4-3\sqrt{-1}) = 12 + 8\sqrt{-1} - 9\sqrt{-1} + 6$$
$$= 18 - \sqrt{-1}.$$

Konjugierte komplexe Größen mit einander multipliziert geben etwas Reelles.

Beispiel:

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}) = a^2 + ab\sqrt{-1} - ab\sqrt{-1} + b^2$$
$$= a^2 + b^2.$$
$$(3+2\sqrt{-1})(3-2\sqrt{-1}) = 9 + 4 = 13.$$

Umgekehrt läßt sich jede Summe zweier reellen Zahlen als Produkt zweier konjugierter komplexer Zahlen darstellen.

Beispiel: $a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{-b})(\sqrt{a} - \sqrt{-b})$.

Bei der Division hat das Dividieren einer imaginären Zahl durch eine reelle Zahl einen natürlichen Sinn, und führt, wenn die Division nicht aufgeht, zur Einführung der Bruchteile der imaginären Einheit.

Beispiel: $\frac{12\sqrt{-1}}{4} = 3\sqrt{-1}$; $\frac{3\sqrt{-1}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{-1}$;

$$\frac{6+5\sqrt{-1}}{4} = 1\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{4}\sqrt{-1}.$$

Kommt das Imaginäre im Nenner vor, so wendet man bekannte algebraische Operationen an, um den Nenner von der Wurzel zu befreien.

Beispiel: $\frac{6}{\sqrt{-1}} = \frac{6\cdot\sqrt{-1}}{-1} = -6\sqrt{-1}$;

$$\frac{4+7\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = \frac{4\sqrt{-1}-7}{-2} = 3\tfrac{1}{2} - 2\sqrt{-1};$$

$$\frac{2}{4-3\sqrt{-1}} = \frac{2(4+3\sqrt{-1})}{4+3} = 1\tfrac{1}{7} + \tfrac{6}{7}\sqrt{-1};$$

Das Potenzieren eines imaginären Ausdruckes liefert bei geraden Exponenten Reelles, bei ungeraden Imaginäres. $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$. Ein komplexer Ausdruck wird wie ein Binom potenziert.

Beispiel:

$$(5-7\sqrt{-1})^2 = 25 - 49 - 70\sqrt{-1} = -24 - 70\sqrt{-1}.$$

Man rechnet demnach mit imaginären und komplexen Größen nach denselben Regeln, nach welchen man reelle Größen behandelt, behandelt also $\sqrt{-1}$ wie irgend eine andere Wurzel von reellem

Wert; am Schluße der Operationen vereinigt man sowohl die reellen als die imaginären Glieder in je ein Glied, so daß das Resultat die Form einer komplexen Größe hat.

Beim Radizieren kann der Wert einer Wurzel von geradem Exponenten aus rein imaginärem Radikanden auf elementarem Wege nicht angegeben werden. Bei ungeradem Exponenten kann bei rein imaginärem Radikanden wenigstens einer der Werte angegeben werden. $\sqrt[3]{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, weil $(-\sqrt{-1})^3 = \sqrt{-1}$, $\sqrt[5]{\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}$, weil $(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$ u. s. w.

Quadratwurzeln aus komplexen Größen lassen sich angeben, wenn der Radikand als entsprechende Potenz einer komplexen Größe angesehen werden kann.

$$\sqrt{a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1}} = \pm(a + b\sqrt{-1}).$$

Quadratwurzeln aus komplexen Größen lassen sich nach **70** zerlegen.

Die Anwendung von **70** liefert für $\sqrt{+\sqrt{-1}}$ und $\sqrt{-\sqrt{-1}}$ folgendes:

$$\sqrt{\pm\sqrt{-1}} = \sqrt{0 \pm \sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{0+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{0-1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 \pm \sqrt{-1}).$$

73.

Aufgaben mit imaginären Größen.

1. $\sqrt{-4} + \frac{1}{2}\sqrt{-9} + \sqrt{6\frac{1}{4}} - \sqrt{1-10} - \sqrt{12-3}$;

2. $\sqrt{-a^2} + \sqrt{\frac{1}{-a}} - \frac{1}{a}\sqrt{-a^4} + \frac{1}{a^2}\sqrt{-a^3} - \sqrt[4]{(-a)^2}$;

3. $\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2} - \frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1} + \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}$;

4. $(2\sqrt{-5} + 3\sqrt{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{-2} - \sqrt{-20}) \cdot 7\sqrt{-6}$;

5. $(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\sqrt{-1})(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\sqrt{-1})$; $[= 1\frac{19}{225}]$

6. $(\sqrt{-2} + \sqrt{3} - \sqrt{-6})(\sqrt{2} - \sqrt{-3} + \sqrt{6})$; $[= 2\sqrt{6} - 7i]$

7. $(\sqrt{-7} - \sqrt{-11})(\sqrt{-7} + \sqrt{-11})$; $[= 4]$

8. $(\frac{1}{2}\sqrt{-3} - \frac{1}{3}\sqrt{-2} + 1)(\frac{1}{3}\sqrt{-3} - \frac{1}{2}\sqrt{-2} - 1)$;

9. $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{-1\frac{1}{4}} + 4\sqrt{-1\frac{2}{3}})(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{-1\frac{1}{4}} - 4\sqrt{-1\frac{2}{3}})$;

10. Was wird aus $2x - 3y + 5z - 8$, wenn
$x = 7 + 2\sqrt{-1}$, $y = -4 - 3\sqrt{-1}$; $z = -2 + 8\sqrt{-1}$;

11. Was wird aus $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{5}{6}z$, wenn
$x = 3 - 4\sqrt{-1}$, $y = 4 - 5\sqrt{-1}$, $z = 5 - 6\sqrt{-1}$;

12. $(\sqrt{-2}+\sqrt{6}-\sqrt{-5})(\sqrt{-2}+\sqrt{6}+\sqrt{-5})$; $[=9+4\sqrt{-3}]$

13. $(\sqrt{a}-a\sqrt{-a}-\sqrt{-a}+a\sqrt{-1})(\sqrt{-a}-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-\sqrt{-1})$;

14. $(a-a\sqrt{-a}+\sqrt{-a}+\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{-a}+a+a\sqrt{-a})$;

15. $(\sqrt{-1}-1-\sqrt{-2})(\sqrt{-1}+1-\sqrt{2})$;

16. $(\sqrt{6}+\sqrt{-15}+3\sqrt{-1}-\sqrt{10})(\sqrt{6}+\sqrt{-15}-3\sqrt{-1}+\sqrt{10})$;

17. $(\sqrt{-10}-\sqrt{15}-\sqrt{6}-5\sqrt{-1})(-\sqrt{10}-\sqrt{-15}+\sqrt{-6}-5)$;

18. Was wird aus $x+y\sqrt{-1}$ und $x-y\sqrt{-1}$, wenn
$x=3+4\sqrt{-1}$, $y=4-3\sqrt{-1}$;

19. Was wird aus $(2-3\sqrt{-1})x+(3-2\sqrt{-1})y$, wenn
$x=3-2\sqrt{-1}$, $y=2+3\sqrt{-1}$;

20. Was wird aus $x\sqrt{5}-y\sqrt{-7}$ und $x\sqrt{5}+y\sqrt{-7}$, wenn
$x=\sqrt{5}+\sqrt{-7}$, $y=\sqrt{-5}-\sqrt{7}$, oder wenn
$x=\sqrt{5}-\sqrt{-7}$, $y=\sqrt{5}+\sqrt{-7}$;

21. Was wird aus $ax+by+1$, wenn
$x=a+b\sqrt{-1}-1$, $y=b-a\sqrt{-1}+1$;

22. Was wird aus
$(a+b\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})-(a-b\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$,
wenn $x=a+b\sqrt{-1}$, $y=a\sqrt{-1}-b$.

---

23. $\dfrac{5}{\sqrt{-3}}$; $2-\dfrac{3}{4\sqrt{-1}}$; $\dfrac{2-3\sqrt{-1}}{4\sqrt{-1}}$; $\dfrac{2-3\sqrt{-1}}{3-4\sqrt{-1}}$;

24. $\dfrac{1}{\sqrt{-a}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{-1}}$; $\dfrac{1}{1+\sqrt{-1}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{-b}}$;

25. $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$; $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{-x}}$; $\dfrac{2-\sqrt{-3}}{2+\sqrt{-3}}$; $\dfrac{7}{2-\sqrt{-3}}$;

26. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}$; $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-a}}$; $\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}$;

27. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{-a}}$;

28. $\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{-1}}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{-1}}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{4+3\sqrt{-1}}}$;

29. $\dfrac{1}{\sqrt{7+\sqrt{-15}}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{a-\sqrt{-b}}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}}$;

30. $1+\sqrt{-2}+\frac{1}{\sqrt{-2}}$; **31.** $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-1}}-\frac{1}{\sqrt{-3}}$;

32. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}+\sqrt{-10}+\frac{1}{\sqrt{-10}}$; $[=\frac{3}{5}\sqrt{-10}]$

33. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-1}}\sqrt{-2}-\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-2}}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}\sqrt{-1}$;

34. $\frac{1}{\sqrt{0{,}1-0{,}5}}-\frac{\sqrt{0{,}1}}{\sqrt{-0{,}01}}-\sqrt{0{,}1-1}$;

35. Was wird aus $\frac{x+\sqrt{3}}{y-1}$, wenn $x=\sqrt{-2}$, $y=\sqrt{-3}$;

36. Was wird aus $\frac{x+1}{y-1}-\frac{x-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}}$, wenn
$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-1}$;

37. Was wird aus $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}$, wenn
$x=2-\sqrt{-1}$, $y=2+\sqrt{-1}$;

---

38. $(2+\sqrt{-3})^2$; $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{-2})^2$; $(1+\sqrt{-1})^2-(1-\sqrt{-1})^2$;

39. $(7-3\sqrt{-1})^2$; $(\sqrt{-3}-5)^2$; $(\frac{1}{2}\sqrt{-1}-\frac{3}{4}\sqrt{-8})^2$;

40. $(\sqrt{-2})^2+(\sqrt{-2})^3+(\sqrt{-2})^4+(\sqrt{-2})^5$;

41. $\left(\frac{4}{\sqrt{-1}}\right)^2-\left(\frac{3}{\sqrt{-2}}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{-8}}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^5$;

42. $(1-\sqrt{-2})^3$; $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})^3$; $(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})^3$;

43. $\left(\sqrt{-1}-\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^3$; $\left(\frac{3}{4\sqrt{-1}}-\frac{4}{\sqrt{-3}}\right)^3$; $(2+\sqrt{-3})^6$;

44. $(1-\frac{1}{2}\sqrt{-5})\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{-5}}$; $[=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{-5}}]$

45. $(\sqrt{-3}+\sqrt{-2})\sqrt{\sqrt{6}-5}$; $[=\sqrt{13+5\sqrt{6}}]$

46. $(\sqrt{3}+2\sqrt{-1})\sqrt{4-2\sqrt{-3}}$; $[=\sqrt{28+14\sqrt{-3}}]$

47. Was wird aus $1+x+x^2+x^3$, wenn $x=1+\sqrt{-2}$;

48. Was wird aus x^2-xy+y^2, wenn $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{-1}$,
$y=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\sqrt{-1}$;

49. Was wird aus $x^3-x^2y+y^3$, wenn $x=1-\sqrt{-5}$, $y=1+\sqrt{-5}$;

---

50. Zerlege $\sqrt{2+\sqrt{5}}$, $\sqrt{3+2\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}$, $\sqrt{1{,}5-\sqrt{2{,}5}}$, $\sqrt{4+3\sqrt{2}}$ nach **70**, und zerlege jede der erhaltenen Wurzeln nochmal nach derselben Regel.

51. Zerlege $\sqrt{3-4\sqrt{-1}}$; $\sqrt{5-\sqrt{-11}}$; $\sqrt{4+\sqrt{-33}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}$; $\sqrt{7+\sqrt{-15}}$; $\sqrt{3-\sqrt{-2}}$; $\sqrt{1+\sqrt{-1}}$; $\sqrt{2+\sqrt{-2}}$; $\sqrt{8-\sqrt{-1}}$;

52. $\sqrt{\sqrt{-3}}$; $\sqrt{\sqrt{-2}}$ (Zerlege nach **70.**)

Aufl.: **1.** $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-1})$; **2.** $\frac{2-a}{a}\sqrt{-a}$; **3.** $2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\sqrt{-1}\right)\cdot\sqrt{a^2-b^2}$; **4.** $-7\sqrt{3}$; **9.** $38\frac{2}{3}-20\sqrt{3}$; **15.** $2(-1+\sqrt{2})(1-\sqrt{-1})$; **16.** $-10+12\sqrt{-10}$; **17.** $20\sqrt{6}+24\sqrt{-1}$; **30.** $1+\frac{1}{2}\sqrt{-2}$; **31.** $\frac{1}{3}(\sqrt{3}(1+4i)$; **33.** $\frac{1}{6}\sqrt{6}(9-5\sqrt{-6})$; **34.** $\frac{1}{5}\sqrt{-10}$.

74.

Vermischte Beispiele.

1. $$\left(\frac{31\frac{1}{4}a^4}{44b^2x}\right)^2:\left[\left(\frac{176b^4}{1\frac{2}{5}a^3x}\right)^3\cdot\left(\left(\frac{25a^4}{392b^2}\right)^4:\left(\left(\frac{11ab^4}{112}\right)^5:\left(\frac{1{,}4ab^2}{16}\right)^6\right)\right)\right]; \quad =\frac{5x}{16}$$

2. $$\left(\frac{a^4-2a^3b+a^2b^2}{a^4+a^3b}\right)^4:\left[\left(\frac{b^2(a^3b+2a^2b^2+ab^3)^3}{a(a^2b^2+ab^3+b^4)^4}\right)^3\cdot\left(\frac{b^2(a^4+a^3b)^4}{a(a^4+ab^3)^3}:\frac{b^2(ab-b^2)^5}{(a^2b^2-ab^3+b^4)^3}\right)^2\cdot\left(\frac{b^2(a^3-b^3)^4}{a(a^2+ab)^7}\right)^3\right]^3;$$

3. $$\frac{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^8}{\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)^3}:\left[\frac{\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)^5}{\left(1-\frac{x^3-x}{1-x}\right)^3}\cdot\left(\frac{\left(1-\frac{2}{1+x}\right)^2}{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}}\right)^4\right];$$

4. $$\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\right)^2:\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\right)^3;$$

5. $$\frac{(4a^2+4ab)^{12}}{(24a^3b^2-18a^2b^3)^4}:\left[\left(\frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{a^2}\right)^2}{\frac{1}{6a^3}-\frac{b}{8a^4}}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{b}{a-b}+1\right)^4}{\left(\frac{2a+b}{a+b}-1\right)^3}:10\frac{1}{8}\right]^2;$$

6. $\dfrac{\frac{4}{9}a^{-4}-(1{,}5^{-1}b^2)^{-2}}{\left(\dfrac{(3^{-1}b-\frac{1}{2}a)^{-1}}{(1+1{,}5\,a\,b^{-1})^2}\right)^{-1}}$; 7. $\dfrac{1-x^{-1}+x^{-2}}{1-\dfrac{1-x^{-1}}{1-(1-x^{-1})^{-1}}}$;

8. $\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^{-2}:\left[\left(\dfrac{1-x^{-2}}{1-x^{-3}}\right)^{-2}:\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3}\right]^{-1}$;

9. $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}-\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-2}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}+\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}-\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^{-1}}}$; $[=0]$

10. $\dfrac{(1\frac{1}{2}a^{-2x+1}b^{-3}(2\frac{2}{3}a^{-x-3}b^{y-4})^{-2}:(4\frac{1}{6}a^{-4}b^{3+y})^3)^2}{\left(((6\frac{2}{3}a^x)^3(15\,a^{3x}b^{3-y})^2)^{-1}:(6\,a^{3x+4}b^{1-2y})^{-3}\right)^3}$;

11. $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$; $[=x^3\sqrt[16]{x}]$

12. $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\,(b^{\frac{2}{3}}\sqrt[4]{a^3\sqrt{b}})^6}{b^{2\frac{1}{3}}\sqrt[4]{a^3b}\,(a^{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{b^2\sqrt{ab}})^2}$; $[=a^3\sqrt[3]{b^2}]$

13. $\sqrt[3]{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdot\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}$; $[=x]$

14. $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a}\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}:\sqrt{\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[4]{a}}\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$; $[=\sqrt{a\sqrt{a}}]$

15. $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}}}}}:\sqrt{a\sqrt{\dfrac{1}{a\sqrt{\frac{1}{a}}}}}$; $[=a\sqrt{a}]$

16. $(a-b^{-1})^{-2}-(b-a^{-1})^{-1}+(a^{-1}+b)^{-1}+(b^{-2}-a^2)^{-1}$;

17. $(\sqrt{3}-\sqrt{-5})^2+(\sqrt{-3}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{-3}+\sqrt{5})(\sqrt{-5}+\sqrt{3})$

18. $\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{-1}}{1-\dfrac{\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}}}$; 19. $\sqrt{1-4\sqrt{-3}}$;

20. $\dfrac{\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\sqrt{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}$

$+2\sqrt{\dfrac{ab\sqrt[4]{a}-b\sqrt{ab\sqrt{a}}}{a-b}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{b}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{2}{\sqrt{b}}}$;

21. $$\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}+\frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}\right)}{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}}}$$
$$+2\sqrt{x}\sqrt{\frac{\frac{1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}-2+x^2}}};$$

22. $$\sqrt{\frac{1-x\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2-\sqrt{x}}}-\sqrt{\frac{x+x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x}}$$
$$+\sqrt{\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}\left[\sqrt{x+x\sqrt{x}}+\left((1-\sqrt{x})\sqrt[4]{1+\sqrt{x}}\right)^2\right]}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}};$$

23. $$\frac{\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}-\sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{a}}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{\frac{b}{a^2}}-\sqrt{\frac{4}{a}}}}+\frac{\left(1+\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^2\left(\sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt{b}}}-\sqrt[8]{b}\right)^2}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{\frac{b}{a^2}}-\sqrt{\frac{4}{a}}}}$$
$$+\sqrt{\frac{4\sqrt[4]{b\sqrt{ab}}-\frac{4\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}}}{\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}}}{\left(\sqrt[8]{\frac{a}{b}}+\sqrt[8]{\frac{b}{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}\right)}};$$

24. $$\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$$

25. $$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\sqrt{\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}}}$$
$$-\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+1}}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}}}};$$

26. $$\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{\frac{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\sqrt{\frac{x\sqrt{x\sqrt{x}}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}; \quad [=1]$$

27. $$\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{4}{5}}\sqrt[\frac{3}{4}]{a^{\frac{2}{3}}\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{\frac{4}{5}}}}} : \sqrt[\frac{3}{4}]{a^{\frac{5}{8}}\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{4}{5}}\sqrt[\frac{1}{3}]{a^{\frac{2}{5}}}}}; \quad [=\sqrt{a}\,.\,\sqrt[5]{a^3}]$$

28. $$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a\sqrt{a^3}}}{\sqrt[4]{a}}}\cdot\sqrt[-2]{\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt[-2]{a}}} : \sqrt[--3]{a\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a}{\sqrt[-3]{a^2}}}}};$$

29. $$\sqrt[\frac{2}{3}]{\sqrt[1,5]{a\sqrt{a}}} + \sqrt[-3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{-2\frac{1}{4}}}} + \sqrt[0,4]{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{5}{6}]{a\sqrt{a}}}}; \quad [=3a\sqrt{a}]$$

30. $$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}}{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}}\cdot\sqrt[5]{\frac{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[9]{a^2\sqrt[4]{a}}}}; \quad [=a]$$

31. $$(-(-a)^{-1})^{-2} - \frac{\frac{2\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{b\sqrt{b}}} + 2\sqrt[4]{a\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{a^2b\sqrt{b}} + \frac{1}{a^3\sqrt{b}} + \frac{2}{a^2b\sqrt{a}}}}$$
$$+ \frac{\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)\sqrt{\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{a} + \frac{2}{\sqrt{a}}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{ab}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)};$$

32. $$\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} + \frac{2\sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{a}} - \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{a^5}} - \frac{2b\sqrt[6]{b}}{a\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt[3]{b^2}}{a^2\sqrt[6]{a}}};$$

33. $$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\sqrt{\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{2x}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}}}-\sqrt{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{x\sqrt{2x}}+\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}}\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{2}}}-\sqrt{2\sqrt{2}}\right)};$$

34. $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{b}}+\sqrt[6]{\frac{b}{a^5}}+\frac{2}{\sqrt[3]{a\sqrt{b}}};$

35. Was wird aus x^2-4x+1, wenn $x=2-\sqrt{5}$; und aus $x^2-1\frac{1}{3}x+2$, wenn $x=\frac{2}{3}-\sqrt{-\frac{3}{2}}$;

36. $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$; 37. $\frac{2}{x}+\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}};$

38. $\frac{1}{b\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt{ab\sqrt{a}}}-\frac{2}{\sqrt{ab\sqrt{b}}};$

39. $\frac{3}{\sqrt[4]{ab^3\sqrt{a}}}-\frac{3}{\sqrt{ab\sqrt{a}}}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a\sqrt[4]{b\sqrt{a}}};$

40. $$\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt[3]{3a^2b\sqrt[-2]{\frac{1,5}{a}}}}+\sqrt[-3]{-0,5a^{-2}\sqrt[3]{\frac{2a^5}{b}\sqrt[-2]{2b}}}$$
$$+\sqrt[-2]{b^{-1}\sqrt[-3]{\frac{b^{-2}}{2^{-1}}\sqrt[-3]{a^{-2}}}};$$

41. $$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{x}}-\sqrt{x}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+x}}}$$
$$\cdot\sqrt[4]{\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\sqrt[4]{x}}{\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}};$$

42. $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{2-\sqrt{-5}}-\sqrt{\sqrt{-1}}.$

Aufl.: 2. $\frac{a^2b^3(a-b)^2}{a+b}$; 3. $\frac{x^2(1-x^2)}{1+x^2}$; 4. $\frac{2(x+1)^2}{x^3(x-1)}$; 5. $\frac{4a^2}{(a+b)^2}$; 6. $\frac{2(4b^2+9a^2)}{3a^4b^2(2b+3a)}$; 7. $\frac{1}{x}$; 8. $\frac{(x-1)(x^2+x+1)^2}{x^2(x+1)^3}$; 10. $250a^2b^{2y+1}$;

16. $\frac{2a+2b^2-2a^2b}{(ab-1)^2(ab+1)}$; **17.** $8i$; **18.** $-i$; **19.** $2-\sqrt{-3}$;
20. $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2$; **21.** $(\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x})^2$; **22.** $\sqrt{1-\sqrt{x}}$;
23. $2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$; **24.** $\frac{2-4x}{1-x}$; **25.** 0; **28.** $a\sqrt[3]{a}$; **31.** $(a-\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$;
32. $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{b}}+\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[12]{a^5}}-\frac{\sqrt[6]{b^5}}{a\sqrt[12]{a}}$; **33.** $1-\sqrt{x}$; **34.** $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[6]{a^5b^2}}$;
39. $\frac{(\sqrt[4]{b}-\sqrt[8]{a^3})^3}{ab\sqrt[8]{a}}$; **40.** $\sqrt[12]{\frac{6b^2}{a}}$; **41.** $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$; **42.** 0.

3. Abschnitt. Logarithmieren.

75.

Logarithmieren heißt, aus einer gegebenen Potenz und dem gegebenen Dignand den Exponenten suchen. (Das Zeichen des Logarithmierens ist log, lg oder l, neben welches die gegebene Potenz und über welches der gegebene Dignand geschrieben wird).

I. $\overset{a}{\log}\, a^x = x$.

Dies enthält die Rechnungsregel: Wenn man eine Potenz für ihren Dignand logarithmiert, so erhält man den Exponenten.

Die gegebene Potenz heißt Logarithmand, der gegebene Dignand heißt Basis oder Grundzahl, der gesuchte Exponent heißt Logarithmus.

Ein Logarithmus ist also (als Exponent) eine Zahl, welche, wenn man mit ihr die Basis potenziert, den Logarithmand gibt.

II. $b^{\overset{b}{\log} a} = a$.

Dies enthält die Rechnungsregel: Wenn man mit einem Logarithmus seine eigene Basis potenziert, so erhält man den Logarithmand.

Umgekehrt: I. Jede Zahl kann man als Logarithmus schreiben, wenn man mit ihr eine beliebige Zahl potenziert und diese Potenz für dieselbe Zahl als Basis logarithmiert. II. Eine Zahl kann man als Potenz schreiben, wenn man sie für eine beliebige Zahl als Basis logarithmiert, und mit diesem Logarithmus dieselbe Basis potenziert.

Der Definition gemäß ist das Logarithmieren eine Umkehrung des Potenzierens, und löst die Aufgabe, eine Zahl in ein Produkt gegebener gleicher Faktoren zu zerlegen, oder eine Zahl als Potenz von gegebener Basis zu schreiben.

Aus der Definition folgt:

$$\overset{a}{\log} a = 1 \text{ und } \overset{a}{\log} 1 = 0.$$

Wenn der Logarithmand sich leicht als Potenz der gegebenen Basis ansehen läßt, ist auch der Logarithmus leicht zu finden.

III. Wenn $a = b$ und $c = d$, so ist $\overset{c}{\log} a = \overset{d}{\log} b$. D. h. Gleiche Größen für gleiche Grundzahlen logarithmiert geben Gleiches. Bew. wie in **3.**

IV. Ist $a^x = a^y$ und logarithmiert man beiderseits für die Basis a, so hat man (nach I) $x = y$; d. h. Sind in gleichen Potenzen die Dignanden gleich, so sind auch die Exponenten gleich.

V. Ist $\overset{x}{\log} a = \overset{x}{\log} b$ und potenziert man mit jeder dieser Größen die Basis x, so hat man (nach II) $a = b$. D. h. Sind in gleichen Logarithmen die Grundzahlen gleich, so sind auch die Logarithmanden gleich.

Berücksichtigt man die Definitionen von Radizieren und Logarithmieren und die Bedeutung der dabei vorkommenden Größen, so ergeben sich noch folgende (weniger richtige) Gesetze:

VI. $\sqrt[\overset{b}{\log} a]{a} = b$. VII. $\overset{\sqrt[x]{a}}{\log} a = x$. Hieraus:

VIII. Ist $\overset{b}{\log} a = \overset{c}{\log} a$, und radiziert man mit jeder dieser Größen die Größe a, so ist (nach VI) $b = c$. D. h. Sind in gleichen Logarithmen die Logarithmanden gleich, so sind auch die Grundzahlen gleich.

IX. Ist $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{a}$, und logarithmiert man für jede dieser Größen (als Basis) die Größe a (als Logarithmand), so hat man (nach VII) $x = y$. D. h. Sind in gleichen Wurzeln die Radikanden gleich, so sind auch die Radikatoren gleich.

Das Logarithmieren ist keine eindeutige Operation, d. h. wenn man den Logarithmus einer Zahl für eine Grundzahl sucht, so findet man nicht nur einen Logarithmus; da es deren stets sogar unendlich viele gibt, so ist das Logarithmieren eine unendlich vieldeutige Operation. Der Beweis dafür sowie die Auffindung der unendlich vielen Werte eines Logarithmus ist nicht Aufgabe der elementaren Mathematik. Es genüge hierüber folgendes. Wenn sowohl Logarithmand als Grundzahl positiv sind, so gibt es stets einen reellen Logarithmus (und noch unendlich viele komplex imaginäre dazu). Ist das nicht der Fall, so sind alle Werte des Logarithmus komplex imaginär. Es ist also schon der Logarithmus einer negativen Zahl für eine positive Basis imaginär und kann auf elementarem Wege nicht aufgefunden werden. Doch führen die Logarithmen nicht auf neue Einheiten, verursachen also nicht eine nochmalige Erweiterung des vorhandenen Zahlensystems, wie es die Wurzeln durch das Imaginäre thun, sondern alle Logarithmen sind durch das vorhandene Zahlensystem der reellen und imaginären Einheiten darstellbar.

1. $\overset{2}{\log} 8 = \overset{2}{\log} 2^3 = 3$ (I.); $\overset{5}{\log} 25$; $\overset{6}{\log} 36$; $\overset{5}{\log} 125$;

2. $\overset{3}{\log}\,81$; $\overset{2}{\log}\,32$; $\overset{7}{\log}\,343$; $\overset{4}{\log}\,64$;

3. $\overset{10}{\log}\,10$; $\overset{10}{\log}\,100$; $\overset{10}{\log}\,1000$; $\overset{10}{\log}\,10\,000$; u. s. w.

4. $\overset{10}{\log}\,0{,}1$; $\overset{10}{\log}\,0{,}01$; $\overset{10}{\log}\,0{,}001$; $\overset{10}{\log}\,0{,}0001$; u. s. w.

5. $\overset{2}{\log}\,\frac{1}{4}$; $\overset{3}{\log}\,\frac{1}{9}$; $\overset{5}{\log}\,\frac{1}{25}$; $\overset{4}{\log}\,1$; $\overset{8}{\log}\,\frac{1}{64}$;

6. $\overset{6}{\log}\,\frac{1}{216}$; $\overset{2}{\log}\,\frac{1}{64}$; $\overset{5}{\log}\,\frac{1}{125}$; $\overset{8}{\log}\,\frac{1}{8}$;

7. $\overset{a}{\log}\,a^3$; $\overset{a^2}{\log}\,a^6$; $\overset{\sqrt{a}}{\log}\,a^3$; $\overset{a^2}{\log}\,a^x$;

8. $\overset{x}{\log}\,1$; $\overset{a}{\log}\,\sqrt{a}$; $\overset{a}{\log}\,\sqrt[3]{a^2}$; $\overset{a}{\log}\,\sqrt[3]{a^x}$.

Schreibe folgende Zahlen als Potenzen mit der beigegebenen Basis als Dignand.

9. 8 f. B. 2; $8 = 2^{\overset{2}{\log} 8} = 2^3$; 49 f. 7; 64 f. 4;

10. c f. b; x f. a; y f. a; z f. a; y f. z; z f. y;

11. 125 f. 5; 10000 f. 10; 343 f. 7; 64 f. 8;

12. 1024 f. 2, f. 32; $\frac{1}{10}$ f. 10; $\frac{1}{100}$ f. 10;

13. $\frac{1}{16}$ f. 2, f. 4; a f. x; b f. a; m f. n; 1 f. a, a f. a.

76.

Gesetze des Logarithmierens.

I. $\overset{c}{\log}\,ab = \overset{c}{\log}\,a + \overset{c}{\log}\,b.$

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren. Umgekehrt. Die Summe der Logarithmen zweier Zahlen (für die nämliche Basis) ist gleich dem Logarithmus des Produktes der beiden Zahlen (für dieselbe Basis).

Beweis: $\overset{c}{\log}\,ab = \overset{c}{\log}\,c^{\overset{c}{\log} a} \cdot c^{\overset{c}{\log} b}$ (nach **75** II)

$= \overset{c}{\log}\,c^{\overset{c}{\log} a + \overset{c}{\log} b}$ (nach **49**)

$= \overset{c}{\log}\,a + \overset{c}{\log}\,b$ (nach **75** I).

II. $\overset{c}{\log}\,\frac{a}{b} = \overset{c}{\log}\,a - \overset{c}{\log}\,b.$

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden minus dem Logarithmus des Divisors. Umgekehrt: Die Differenz der Logarithmen zweier Zahlen (für die nämliche Basis) ist gleich dem Logarithmus aus dem Quotienten der beiden Zahlen (für dieselbe Basis).

Beweis: $\overset{c}{\log}\,\frac{a}{b} = \overset{c}{\log}\,\frac{c^{\overset{c}{\log} a}}{c^{\overset{c}{\log} b}} = \overset{c}{\log}\,c^{\overset{c}{\log} a - \overset{c}{\log} b}$

$= \overset{c}{\log}\,a - \overset{c}{\log}\,b.$

III. $\overset{c}{\log}\, a^m = m \overset{c}{\log}\, a.$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten mal dem Logarithmus des Dignanden. Umgekehrt. Ein Logarithmus wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Logarithmanden mit der Zahl potenziert und diese Potenz für dieselbe Basis logarithmiert.

Beweis: $\overset{c}{\log}\, a^m = \overset{c}{\log}\, (c^{\overset{c}{\log}\, a})^m = \overset{c}{\log}\, c^{m \overset{c}{\log}\, a}$

$= m \overset{c}{\log}\, a.$

IV. $\overset{c}{\log} \sqrt[m]{a} = \dfrac{1}{m} \overset{c}{\log}\, a.$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten. Umgekehrt. Ein Logarithmus wird mit einer Zahl dividiert, indem man den Logarithmanden mit der Zahl radiziert und diese Wurzel für dieselbe Basis logarithmiert.

Beweis: $\overset{c}{\log} \sqrt[m]{a} = \overset{c}{\log}\, a^{\frac{1}{m}} = \dfrac{1}{m} \overset{c}{\log}\, a.$

Zusatz $\overset{c}{\log} \sqrt[x]{a^y} = \dfrac{y}{x} \overset{c}{\log}\, a.$

77.

In den folgenden Beispielen 1 bis 5 sind stets Logarithmen für die Basis 10 gemeint; bei solchen wird die Basis meist nicht geschrieben und nicht gesprochen.

---

1. Gegeben sind die Logarithmen folgender Zahlen für die Basis 10:

$\log 2 = 0{,}30103; \quad \log 3 = 0{,}47712; \quad \log 7 = 0{,}84510.$

Man berechne die Logarithmen von 4, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 200, 2000, 3000, 2800, 36, 63, 72, 84, 48, 343.

2. Berechne ebenso die Logarithmen von $\frac{5}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $3\frac{3}{4}$, $2\frac{5}{8}$, $5\frac{5}{9}$, $3\frac{1}{21}$, $13\frac{1}{15}$, $10\frac{1}{8}$.

3. Bilde ebenso die Logarithmen folgender ächten Brüche und addiere dabei zum Logarithmus des Zählers so viele Einheiten, daß der Logarithmus des Nenners davon subtrahiert werden kann, wofür dann wieder ebensoviele Einheiten als negativ anzufügen sind.

Beispiel: $\log \frac{2}{7} = \log 2 - \log 7 = \overset{+1}{0{,}30103} - \overset{-1}{0{,}84510}$

$= 0{,}45593 - 1.$

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{3}{4000}$, $\frac{7}{12000}$, $\frac{6}{250000}$, $\frac{9}{1750000}$.

---

4. Bilde die Logarithmen von $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{28}$, 6^8, 12^{14}, $\sqrt[5]{14^3}$, $(\frac{7}{18})^2$, $(\frac{5}{24})^4$, $(\frac{8}{35})^7$. (Unter Berücksichtigung des in 3 Angegebenen.

5. Bilde die Logarithmen folgender Wurzelgrößen, und sorge dabei dafür, daß Subtrahenden stets als ganze Zahlen erscheinen. Wenn demnach eine Differenz nach 3 auf die Form gebracht ist, daß der Subtrahend eine ganze Zahl ist, und sie soll dann mit einer Zahl dividiert werden, welche im Subtrahenden nicht ohne Rest enthalten ist, so addiert man zum Minuend und Subtrahend so viele Einheiten, bis die Zahl im vergrößerten Subtrahenden ohne Rest enthalten ist und dividiert dann.

Beispiel: $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}(\log 3 - \log 7) = \frac{1}{3}(\overset{+1}{0{,}47712} - \overset{-1}{0{,}84510})$
$= \frac{1}{3}(\overset{+2}{0{,}63202} - \overset{-2}{1}) = 0{,}87734 - 1;$

$\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{\frac{7}{8}}$; $\sqrt[3]{2\frac{1}{2}}$; $\sqrt[7]{\frac{3}{100}}$; $\sqrt[5]{(\frac{8}{49})^3}$; $\sqrt[11]{\frac{63}{100}}$; $\sqrt[4]{(\frac{5}{108})^5}$;
$\sqrt[7]{(\frac{125}{126})^8}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{10}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{1000}}$; $\sqrt[6]{\frac{1}{200}}$; $\sqrt[8]{\frac{1}{500000}}$.

78.

Entwickele die Logarithmen folgender Ausdrücke nach den Gesetzen **76** für eine beliebige Basis (welche der Einfachheit halber nicht geschrieben wird). Sind dabei die Logarithmanden bestimmte Zahlen, so sind diese in ihre Primfaktoren aufzulösen. Klammern sind aufzulösen.

---

1. $\log a b^2 c^x$; $\log \frac{3 a^2 c}{4 b y^2}$; $\log \left(\frac{11 a x^3}{12 b y^4}\right)^2$;

2. $\log \sqrt[3]{\frac{2 a^2}{5 x^7}}$; $\log x \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{a}{x}}$; $\log \frac{4}{a x^2 \sqrt{y}}$;

3. $\log \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}$; $\log \frac{a\sqrt{x}}{x\sqrt{\frac{a}{x}}}$; $\log \frac{\left(x\sqrt[3]{a x^2}\right)^2}{\left(a\sqrt{a x}\right)^3}$;

4. $\log \frac{1}{a}\sqrt{\frac{x}{\left(a\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^3}}$; $\log \sqrt{a x \sqrt{\frac{a}{x}} \sqrt[3]{\frac{x^2}{a}}}$;

5. $\log a\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{a}{3}\sqrt{\frac{3}{a}}\right)^2\right)^3$; $\log \frac{a b \sqrt{a b}}{\left(a\sqrt{a\sqrt{b}}\right)^3}$;

6. $\log a\left(2b\left(\frac{a}{\sqrt[3]{4b^5}}\right)^2\right)^3$; $\log \frac{a}{\sqrt[4]{a x^3}}\sqrt{\frac{(a x\sqrt{a})^3}{\sqrt{a x\sqrt{\frac{a}{x}}}}}$;

7. $\log \frac{a x^2}{\sqrt[5]{x^3}} : \frac{\sqrt[5]{a^2 x}}{\sqrt{a x\sqrt[5]{\frac{a^2}{x^3}}}}$; $\log \frac{\left((2a^3)^2(3a^2(4a^3)^2)^3\right)^2}{(4a^4)^3(3a(6a^2)^3)^4}$;

8. $\log\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}a\sqrt{\frac{b}{3a}}}}\right)^3$; $\log 12^3\sqrt[3]{\frac{(1\frac{5}{7})^2}{(14\sqrt{18})^3}}$;

9. $\log \frac{6\frac{3}{4}\sqrt{41\frac{2}{3}\sqrt[3]{10\frac{4}{5}}}}{16\sqrt[3]{(2{,}4\sqrt{16{,}2})^4}}$; $\log (a\sqrt{5a})^5\sqrt[5]{\frac{(5a^2)^2}{\sqrt{\left(5a\sqrt{\frac{5}{a}}\right)^2}}}$;

10. $\log \sqrt{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{a}\sqrt[3]{\frac{4}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}}}}$;

11. $\log \frac{5}{7}\sqrt{\frac{5a}{\sqrt[3]{3\frac{1}{2}a x^2}}} : \sqrt[3]{3\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{2\frac{1}{2}a}{\sqrt{\frac{5a}{x}}}}}$;

12. $\log 11\ (12\sqrt{3\frac{1}{2}})^2 : \sqrt[3]{2\frac{3}{4}\left(4\frac{4}{11}\sqrt{\frac{9\sqrt[3]{24}}{11\sqrt{1\frac{3}{4}}}}\right)^6}$;

13. $\log \left[\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{\left(b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^5\sqrt[3]{a}}\right)^6\sqrt{a^9}}}{\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5\sqrt[4]{a}\sqrt[6]{a^7}}}\right)^3}\right]^5$;

14. $\log \sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x}}}}}}}}$; $\log \sqrt[3]{\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a}}}}}}}$;

15. $$\log\left[350\left(\sqrt[3]{15\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{7}{12}}}\right)^2\right]^4 : \sqrt{17\tfrac{3}{5}\left(\sqrt[4]{\frac{18\left(17\frac{6}{7}\right)^3}{\sqrt[3]{7{,}7^2\sqrt[3]{39\frac{1}{16}}}}}\right)^6};$$

16. $$\log\sqrt[12]{\left[\frac{28\,a^4\sqrt[5]{\dfrac{343\,b^3c^3}{24\,a^4}}}{36\,b^4c^5\sqrt{\dfrac{9\frac{1}{7}}{\sqrt[3]{72\sqrt[5]{\dfrac{b^4c^5}{a^2\sqrt{b}}}}}}}\right]^4};$$

17. $$\log\sqrt{\frac{a\sqrt{ab}}{\sqrt{\dfrac{b\sqrt{ab}}{\sqrt{a\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{ab}}}}}}}};\qquad \log\sqrt{\frac{\sqrt{\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}}}{b\sqrt[3]{a^2b}}}}{\sqrt[3]{ab\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}};$$

18. $$\log\sqrt[3]{x\sqrt{a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\dfrac{a}{x}}}{\sqrt[3]{\dfrac{x}{a^2}}}}}} : a\sqrt{x\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{a}}}{\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{ax^6}}}}}};$$

19. $$\log\left[20\,a\sqrt[3]{\frac{3\frac{1}{5}a^2}{25\sqrt{8ab}}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{6\frac{1}{4}a^5\sqrt{32ab}}{\left(6\frac{2}{5}ab^2\sqrt[6]{40a^4b^3}\right)^4}\right)^3}\right]^2;$$

20. $$\log\left(\frac{3a^2}{\sqrt{b}}\sqrt[3]{\frac{4a\sqrt{b}}{\sqrt[4]{6a^3\sqrt[3]{ab^2}}}}\right)^2 : \sqrt[3]{\frac{4a\sqrt{a\sqrt{3ab}}}{\sqrt{\dfrac{3\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{a:2b}}}}};$$

21. $$\log a\sqrt{a}\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{a}\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a\sqrt{a}\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}} : \sqrt[3]{\frac{a\sqrt{a}\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}{\sqrt{\dfrac{a\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a\sqrt{a}}}}}}};$$

22. $$\log\left(\frac{\left(ab\left(a^2b^2(ab^3)^2\right)^3\right)^4}{\left[\dfrac{1}{ab}\left(\dfrac{a}{b^2}\left(\dfrac{b^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{a^3b^3}\right)^2\right)^2\right)^3\right]^2}\right)^2.$$

Vereinige in folgenden Beispielen die Logarithmen in je einen Logarithmus.

23. $\log a + \log b - \log (a + b)$;

24. $2 \log x - 3 \log y + 3 \log (x + y) - 2 \log (x - y)$;

25. $3 \log x - \log (x - 1) + \frac{2}{3} \log (x^2 - 1)$;

26. $\frac{3}{4} \log a - \frac{5}{8} \log b - \frac{1}{4} \log c + \frac{1}{2} \log d$;

27. $3 \log ax^2 - 4 \log a^2x$;

28. $\frac{1}{6} \log a + \frac{1}{5} \log b - \frac{1}{4} \log c$;

29. $2 \log (x + 1) + 3\frac{1}{2} \log (x - 1) - 2 \log (x^2 - 1)$;

30. $\frac{x}{a} \log a + \frac{a}{x} \log x - \frac{a}{x} \log \frac{x}{a}$;

31. $\frac{1}{x} \log \frac{a}{x} + \frac{1}{x + 1} \log \frac{x}{a}$.

79.

Das Logarithmensystem.

Die Gesamtheit der Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Basis nennt man das Logarithmensystem für diese Basis, und die Zusammenstellung wirklich berechneter Logarithmen eines Systemes nennt man Logarithmentafel.

Zu logarithmischen Rechnungen benützt man stets das Logarithmensystem für die Basis 10. Dieses Logarithmensystem heißt das dekadische oder das gemeine oder das Brigg'sche nach seinem ersten Berechner Brigg († 1630). In ihm wird die Basis 10 weder geschrieben noch gesprochen. Für die höhere Mathematik hat das natürliche oder Neper'sche System besondere Bedeutung; seine Basis ist die irrationale Zahl $e = 2{,}7182818\ldots$, seine Bezeichnung ist mit Weglassung der Basis lg oder blos l.

Wir betrachten bloß das Brigg'sche System.

Da in ihm $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10\,000 = 4$, ... $\log 10^n = n$, und da bei wachsendem Logarithmanden auch der Logarithmus wächst, so liegt der Logarithmus jeder einziffrigen Zahl zwischen 0 und 1, jeder zweiziffrigen Zahl zwischen 1 und 2, jeder dreiziffrigen Zahl zwischen 2 und 3, u. s. f. allgemein: der Logarithmus jeder $n$ziffrigen Zahl, d. h. einer solchen, welche n bedeutende Ziffern vor dem Komma hat, liegt zwischen $n-1$ und n, besteht also aus $n-1$ Einheiten und einem ächten Bruche.

Die Logarithmen zweier Zahlen, welche sich nur durch verschiedene Stellung des Komma unterscheiden, unterscheiden sich nur durch ganze Einheiten; denn solche Zahlen unterscheiden sich nur durch ein oder mehrere Faktoren (oder Divisoren) 10, welche beim Logarithmieren ein oder mehrere zu addierende (oder zu subtrahierende) Einheiten geben.

Z. B. Wenn $\log 3{,}7485 = 0{,}57386$, so ist

$$\log 37{,}485 = \log 10 \cdot 3{,}7485 = \log 10 + \log 3{,}7485$$
$$= 1 + 0{,}57386 = 1{,}57386,$$
$$\log 374{,}85 = \log 100 \cdot 3{,}7485 = 2 + 0{,}57386 = 2{,}57386$$
$$\log 3748{,}5 = \log 1000 \cdot 3{,}7485 = 3{,}57386$$
$$\log 374850000 = 8{,}57386 \text{ u. s. w.}$$

Der Logarithmus jeder Zahl besteht also aus ein (kein) oder mehreren Ganzen und einem Dezimalbruch. Diese Ganzen nennt man die Charakteristik oder Kennziffer; sie ist blos von der Stellung des Komma abhängig und beträgt stets um 1 weniger als die Anzahl der Ziffern vor dem Komma. Den dazutretenden Dezimalbruch nennt man die Mantisse (Zugabe), sie ist nicht von der Stellung des Komma abhängig, sondern blos von den bedeutenden Ziffern der Zahl; ihr Wert wird aus den Logarithmentafeln entnommen.

Der Logarithmus jedes ächten Bruches ist negativ. Denn ist $a > b$, so ist $\log a > \log b$, und da $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$, so gibt diese Differenz etwas negatives. Jeden negativen Logarithmus richtet man so ein, daß die Mantisse (mit 0 Ganzen) positiv ist, und das Negative nur in der Form von ein oder mehreren negativen Einheiten vorhanden ist. (**77.** Aufg. 3).

Jeden ächten Dezimalbruch kann man in einen Bruch verwandeln, dessen Zähler zwischen 1 und 10 liegt, und dessen Nenner eine Potenz von 10 ist. Z. B. $0{,}037485 = \frac{3{,}7485}{100}$; logarithmiert man ihn nun, so hat der Logarithmus des Zählers die Charakteristik 0, und der Logarithmus des Nenners liefert ein oder mehrere negative Einheiten.

Z. B. $\log 0{,}037485 = 0{,}57386 - 2,$
$$\log 0{,}37485 = 0{,}57386 - 1$$
$$\log 0{,}0037485 = 0{,}57386 - 3 \text{ u. s. w.}$$

Diese negativen Einheiten, welche bloß von der Stellung des Komma abhängig sind, nennt man auch die Charakteristik. Ein ächter Dezimalbruch hat also eine negative Charakteristik von so vielen Einheiten als die Anzahl der Nullen beträgt, die vor den bedeutenden Ziffern stehen, die Null vor dem Komma mitgerechnet.

Im Brigg'schen System sind die Logarithmen sämtlicher rationalen Zahlen irrational mit Ausnahme der ganzen Potenzen von 10. Der Beweis dafür kann elementar nicht erbracht werden, ebenso auch nicht die Art, wie die Logarithmen berechnet werden.

Auch die Einrichtung der Logarithmentafeln, sowie deren Benützung kann wegen der verschiedenartigen Einrichtung derselben nicht allgemein erklärt werden.

Um Logarithmen eines Systemes in Logarithmen eines anderen Systemes zu verwandeln, dazu dienen noch folgende Gesetze.

I. $\overset{b}{\log}\, a \cdot \overset{a}{\log}\, b = 1.$

Beweis: Es ist $a = b^{\overset{b}{\log}\, a}$; logarithmiert man beiderseits für die Basis a, so ist

$$1 = \overset{b}{\log}\, a \cdot \overset{a}{\log}\, b.$$

Zusatz: Es ist $\overset{b}{\log}\, a = \dfrac{1}{\overset{a}{\log}\, b}$.

II. $\overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a \cdot \overset{c}{\log}\, b.$

Beweis: Es ist $a = b^{\overset{b}{\log}\, a}$; logarithmiert man beiderseits für die Basis c, so ist

$$\overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a \cdot \overset{c}{\log}\, b.$$

Da nach I $\overset{c}{\log}\, b = \dfrac{1}{\overset{b}{\log}\, c}$, so ist auch

$$\overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a \cdot \left(\frac{1}{\overset{b}{\log}\, c}\right).$$

D. h. Man findet die Logarithmen sämtlicher Zahlen (a) für ein neues System von der Basis c (man bildet ein neues Logarithmensystem für die Basis c), indem man jeden Logarithmus des alten Systems (von der Basis b) multipliziert mit ein und derselben Zahl, nämlich dem reziproken Wert des Logarithmus der neuen Basis c für die alten Basis b). Diese Zahl wird deshalb auch der Model (modulus) des neuen Systems in Bezug auf das alte genannt. Will man demnach die Brigg'schen Logarithmen in natürliche verwandeln, so hat man sie zu multiplizieren mit

$\dfrac{1}{\overset{10}{\log}\, 2{,}7182818} = \dfrac{1}{0{,}4342945} = 2{,}302585$; das ist der Model des natürlichen Systems inbezug auf das Brigg'sche; jeder natürliche Logarithmus ist 2,302585 mal größer als der entsprechende Brigg'sche.

Umgekehrt hat man natürliche Logarithmen in Brigg'sche zu verwandeln, so hat man jeden natürlichen Logarithmus zu multiplizieren mit $\dfrac{1}{\overset{2.718}{\log}\, 10} = \overset{10}{\log}\, 2.7182818 = 0{,}4342945$; das ist der Model des Brigg'schen Systems (inbezug auf das natürliche). Es mag erwähnt sein, daß die Berechnungsarten der Logarithmen, wie sie die höhere Mathematik (Analysis) lehrt, stets natürliche Logarithmen liefern, daß demnach stets zuerst das natürliche System berechnet

und dann durch Multiplikation mit dem Model 0,4342945 . . . in das Brigg'sche verwandelt wird.

80.

Logarithmische Berechnung von Zahlenausdrücken.

Zahlenausdrücke, deren Berechnung auf gewöhnlichem Wege mühsam, zeitraubend oder sogar unmöglich wäre, lassen sich oft bequem durch Logarithmen berechnen. Zu diesem Zwecke logarithmiert man den Ausdruck, löst ihn also, in sofern er aus Faktoren und Divisoren besteht, in ein Aggregat von Logarithmen auf, welche je nach vorhandenen Potenz- oder Wurzelexponenten noch mit eben diesen zu multiplizieren und dividieren sind. Man schlägt die Logarithmen in den Logarithmentafeln auf, führt die vorgeschriebenen Multiplikationen und Divisionen mit den Exponenten aus, und vereinigt die so erhaltenen Glieder durch Addition oder Subtraktion. Schon im Verlauf dieser Operationen sorgt man dafür, daß negative Logarithmen blos in der Form vorkommen, daß die Mantisse positiv mit 0 Ganzen und die negative Charakteristik nur aus Ganzen bestehe. Man findet so den Logarithmus des gegebenen Ausdruckes und sucht die zugehörige Zahl wieder mit Hilfe der Tafeln.

1. $2{,}573 \cdot 37{,}13 \cdot 651{,}8$; $31{,}572 \cdot 0{,}741 \cdot 0{,}09824$;

2. $0{,}0073 \cdot 0{,}00028567 \cdot 0{,}94187$;

3. $13722 \cdot 0{,}0428 \cdot 0{,}00004995$;

4. $78563400 \cdot 107285{,}36 \cdot 187{,}2594$;

5. $\frac{8733{,}4}{214{,}52}$; $\frac{963{,}45}{8764{,}2}$; $\frac{0{,}00010945}{1{,}02547}$; $\frac{0{,}01857}{23{,}748}$;

6. $\frac{0{,}34879}{0{,}49572}$; $\frac{9{,}4728}{71{,}592}$; $\frac{2746{,}5}{3872{,}2}$; $\frac{1{,}5946}{0{,}2573}$;

7. $\frac{0{,}68406}{0{,}09007}$; $\frac{37{,}009}{0{,}4802}$; $\frac{0{,}0011207}{0{,}0009548}$;

8. $\frac{11{,}427 \cdot 0{,}068 \cdot 9{,}9058}{64{,}004 \cdot 10{,}872 \cdot 0{,}00041}$; $\frac{81{,}442 \cdot 9{,}013 \cdot 0{,}000568}{0{,}0427 \cdot 0{,}0853 \cdot 0{,}14829}$;

9. $\frac{0{,}020027 \cdot 0{,}003471 \cdot 128}{0{,}0004953 \cdot 0{,}01059 \cdot 1{,}36}$; $\frac{574{,}52 \cdot 9{,}146 \cdot 0{,}0082734}{17{,}042 \cdot 0{,}0482 \cdot 0{,}0001186}$;

Dekadische Ergänzung. Soll ein Logarithmus subtrahiert werden, so bildet man oft, um blos positive Glieder zu bekommen, seine dekadische Ergänzung. Er bleibt nämlich ungeändert, wenn man $+10$ und -10 ihm zufügt, und schon während man ihn aus der Tafel entnimmt, kann man ihn leicht von $+10$ subtrahieren (seine dekadische Ergänzung bilden), hat dann diesen Rest als positiv anzuschreiben und ihm -10 anzuhängen. Hat der zu

subtrahierende Logarithmus selbst eine negative Charakteristik, so ist das Hinzufügen von $+10$ und -10 überflüssig, da die negative Charakteristik bei der Subtraktion positiv wird, und an Stelle des $+10$ als die Zahl benützt werden kann, von welcher man die Mantisse subtrahiert (zu welcher man die Ergänzung bildet).

10. $\frac{587{,}2 \cdot 1{,}4956 \cdot 52{,}553}{4{,}08 \cdot 16{,}94 \cdot 1270{,}6}$; $\frac{9{,}4752 \cdot 128{,}53}{13{,}74 \cdot 0{,}7258 \cdot 0{,}04372}$;

11. $\frac{27538 \cdot 289367}{2 \cdot 579351 \cdot 0{,}00934}$; $\frac{0{,}037 \cdot 572 \cdot 0{,}0874}{0{,}000062 \cdot 0{,}7508 \cdot 1{,}0105}$;

12. $\frac{6{,}647 \cdot 0{,}0004801 \cdot 09}{0{,}81 \cdot 0{,}927 \cdot 0{,}07025}$; $\frac{34 \cdot 7{,}0408 \cdot 0{,}03724}{9{,}941 \cdot 10{,}1572 \cdot 0{,}010684}$;

13. $\frac{14{,}975 \cdot 8{,}073 \cdot 0{,}092046}{0{,}0000936 \cdot 9{,}9415 \cdot 13126}$; $\frac{27{,}2 \cdot 39{,}64 \cdot 21{,}8573}{0{,}94 \cdot 12{,}598 \cdot 19573{,}6}$;

14. $\frac{46{,}05 \cdot 0{,}07002}{28{,}453} + \frac{3658{,}7 \cdot 1{,}591}{9544{,}1 \cdot 0{,}84}$;

15. $\frac{0{,}0001094 \cdot 0{,}05}{0{,}000009738} + \frac{48{,}7 \cdot 0{,}5736}{39{,}478} + \frac{827{,}03}{928{,}92}$;

16. $\frac{29 \cdot 8{,}472}{0{,}0572 \cdot 1{,}064} - \frac{14 \cdot 9{,}753}{0{,}5843} + \frac{0{,}62748 \cdot 1770}{2{,}5036}$;

17. $37{,}42 + \frac{0{,}87 \cdot 9{,}0472}{0{,}76 \cdot 28{,}423} - \frac{374 \cdot 174{,}22}{58{,}9 \cdot 6347{,}6}$;

---

18. $2{,}543^2$; $17{,}403^3$; $1{,}0575^{12}$; $174{,}2^{20}$;

19. $0{,}2894^2$; $0{,}0053726^3$; $0{,}000097486^2$;

20. $0{,}98427^{10}$; $0{,}1004^{275}$; $2{,}5371^{10} \cdot 0{,}72865^9$;

21. $\frac{8 \cdot 12{,}735^4 \cdot 0{,}05382^3}{0{,}005972^4 \cdot 438{,}537^3}$; $\frac{7{,}0042^2 \cdot 18{,}43^3 \cdot 0{,}0065^2}{2{,}86^4 \cdot 157{,}23 \cdot 0{,}8472^2}$;

22. $\left(\frac{16{,}7^2 \cdot 0{,}001756^3 \cdot 0{,}834^2}{0{,}972^2 \cdot 18{,}654^2 \cdot 0{,}00258^3}\right)^2$;

23. $\left(\frac{(9{,}34^2 \cdot 0{,}0806^4)^2 \cdot 185{,}07^3}{(189 \cdot 0{,}0008273)^3 \cdot 1{,}5522^6}\right)^3$; $\left(\frac{(25 \cdot 1{,}03^7)^2 \cdot 0{,}026}{(38 \cdot 1{,}02^{12})^3 \cdot 0{,}74}\right)^2$;

24. $\left(\frac{1{,}0872^5 \cdot 0{,}738^2 \cdot 9{,}988^3}{98{,}81^2 \cdot 0{,}058736^3 \cdot 624}\right)^4$;

25. $\frac{64{,}725^3 - 9{,}825^4}{863{,}4^2}$; $\frac{18 \cdot 0{,}073805^4}{(0{,}52706^3 - 0{,}11273^2)^5}$;

26. $(0{,}94042^2 - 0{,}97414^3)^4 - 0{,}015042^3$;

---

27. $\sqrt{13}$; $\sqrt[3]{31}$; $\sqrt[5]{57}$; $\sqrt[6]{15722}$; $\sqrt[8]{538{,}04}$;

28. $\sqrt{0{,}077}$; $\sqrt[5]{0{,}0000536}$; $\sqrt[3]{0{,}0482}$; $\sqrt{0{,}9}$;

29. $\sqrt[4]{0{,}0827}$; $\sqrt[3]{0{,}0001}$; $\sqrt[6]{0{,}048}$; $\sqrt{0{,}0000278}$;

30. $\sqrt[3]{0{,}0000529}$; $\sqrt{5{,}4279\sqrt{7{,}8265}}$; $\sqrt[3]{0{,}47003\sqrt{0{,}14279}}$;

31. $\sqrt{127{,}5\sqrt{325\cdot 0{,}04796^3}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{1{,}0742^7\sqrt[3]{1{,}4298^4}}}$;

32. $\sqrt{18\sqrt{17}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[4]{15}}$; $\sqrt{0{,}19\sqrt[3]{0{,}18\sqrt[4]{0{,}17}}}$;

33. $\dfrac{38{,}7\sqrt{17{,}5}}{27{,}9\sqrt{58{,}2}}$; $\dfrac{41{,}5^2\sqrt[3]{0{,}7285}}{14{,}9^3\sqrt{0{,}00562}}$; $\sqrt{2\frac{5}{8}\sqrt[3]{17\frac{1}{13}\sqrt[4]{1\frac{1}{37}}}}$;

34. $\sqrt{\dfrac{0{,}38\sqrt{374{,}2}\sqrt[3]{0{,}94}}{0{,}095\sqrt[3]{38{,}5}\cdot\sqrt{0{,}75}}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{2\sqrt{0{,}2}}}{27{,}4}}$;

35. $\sqrt[3]{\dfrac{14{,}5\sqrt[4]{1{,}08}}{3{,}4287^2}\sqrt{0{,}7\sqrt{0{,}725}}}$; $\sqrt[5]{0{,}0875^2\sqrt[3]{\dfrac{5}{\sqrt[3]{0{,}05}}}}$;

36. $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}7^3 : (27{,}1\sqrt[3]{1542{,}3})^2}{0{,}42^2\sqrt{9{,}53^3\sqrt{7542}}}}$; $\sqrt{0{,}2\sqrt{0{,}3\sqrt{0{,}4\sqrt{\dfrac{0{,}5}{\sqrt{0{,}6}}}}}}$;

37. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{5}}}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}19^2\sqrt{8}}{3{,}1416\cdot\sqrt{26{,}4^3}}}$;

38. $\sqrt{\sqrt[3]{7\sqrt{0{,}729}}\cdot\sqrt[4]{9\sqrt{0{,}928}}}$;

39. $\left(\dfrac{31{,}27\sqrt{27{,}5\sqrt{20{,}3\sqrt{0{,}402}}}}{\sqrt[3]{0{,}07\sqrt{12027\sqrt{427{,}6}}}}\right)^2$;

40. $\sqrt[4]{\dfrac{21{,}5\sqrt{4{,}1}\sqrt[3]{0{,}03}\sqrt[4]{0{,}04}}{\sqrt[5]{0{,}0052};\ \sqrt{0{,}8}\cdot\sqrt[3]{0{,}6\sqrt{0{,}71}}}}$;

41. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\dfrac{13{,}1^2\sqrt{0{,}72^3}}{4{,}72^5\sqrt[5]{0{,}049^4}}}\cdot\sqrt[4]{\left(\dfrac{\sqrt{8\sqrt{17{,}11^5}}}{\sqrt[3]{9{,}4^2\sqrt{11{,}5}}}\right)^3}}$;

42. $\sqrt[5]{\dfrac{20{,}4}{\sqrt[3]{0{,}08}}\sqrt{\dfrac{0{,}70423}{\sqrt[3]{0{,}7\sqrt{0{,}1}}}}} : \sqrt{\frac{5}{7}\sqrt{\frac{8}{9}\sqrt[3]{\dfrac{0{,}81}{\sqrt{0{,}96}}}}}$;

43. $\left(35{,}047\sqrt{0{,}0002807\sqrt[3]{84^2}}\right)^3\sqrt[4]{0{,}7\sqrt[5]{9{,}28}\cdot\sqrt{12{,}1\sqrt{12{,}1}}}$;

44. $0{,}99824^{\frac{3}{5}}\cdot 1{,}0742^{\frac{5}{8}}\sqrt{0{,}99824\cdot 1{,}0742^3}$;

45. $\sqrt{14{,}72^2+37{,}82^2}$; $\sqrt{397{,}52^2-261{,}65^2}$;

46. $\sqrt{0{,}047268^3+0{,}08542^3-0{,}058^3}$;

47. $\sqrt[3]{8\sqrt{27{,}5}+16\sqrt[3]{8{,}2}-50}$; $\sqrt[3]{11{,}527+\sqrt{\frac{0{,}12}{0{,}1043}}}$;

48. $\sqrt[4]{0{,}0837+\sqrt{\frac{12{,}5^3}{327{,}08^2}}+\sqrt{0{,}0000738}}$;

49. $\frac{5328{,}4}{\sqrt[3]{1530{,}6^2}}+\sqrt[3]{\frac{0{,}7\sqrt{19{,}4602}}{0{,}0084\sqrt{0{,}004}}}$;

50. $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5\sqrt[3]{3}}}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3{,}5}+\sqrt{4{,}759}}{\sqrt{4{,}952}+\sqrt{3\sqrt[4]{5{,}729}}}}$;

51. $\frac{100\left(\frac{27{,}845}{39{,}427}\right)^2\sqrt[3]{\frac{0{,}04735}{\sqrt[4]{0{,}0987}}}}{3{,}421-\sqrt[5]{\frac{7{,}6284}{3{,}5292}}+\sqrt[3]{8{,}4273-1{,}0875^{10}}}$;

52. $\frac{10{,}372-\sqrt{100-\sqrt[3]{\frac{0{,}50042}{\sqrt{0{,}00498^3}}}}}{0{,}90407\sqrt{0{,}10209\sqrt[3]{0{,}0010072}}}$;

53. $\sqrt[5]{\frac{37{,}842}{\sqrt[4]{0{,}472}}}+\sqrt[3]{\frac{0{,}02758^2\sqrt[6]{\frac{5}{7}}}{0{,}09428^3\sqrt[4]{18\sqrt{0{,}08}}}}$.

III. Teil.

Gleichungen.

1. Abschnitt. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten.

81.

Einleitung. Die Gleichstellung zweier Größen heißt eine Gleichung; die Größen selbst nennt man auch die Seiten der Gleichung.

Sind die beiden Größen blos verschiedene Ausdrucksformen ein und derselben Größe, so nennt man die Gleichung eine identische. Es sind demnach alle Formeln, welche die algebraischen Gesetze enthalten, identische Gleichungen. Z. B.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b); \quad (a + b)m = am + bm.$$

Auch werden alle algebraischen Umwandlungen und Vereinfachungen in der Form identischer Gleichungen gelöst. Z. B.

$$3(a+2b)^2 - 2(a-3b)^2 = 3a^2 + 12ab + 12b^2 - 2a^2 + 12ab - 18b^2$$
$$= a^2 + 24ab - 6b^2.$$

Im folgenden betrachten wir eine andere Art von Gleichungen, die analytischen.

Man versteht unter einer analytischen Gleichung eine solche, welche eine Größe enthält, die ihrem Wert nach so bestimmt werden soll, daß die Gleichung zu einer identischen wird. Die zu bestimmende Größe heißt die Unbekannte und wird meistens mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, u, v, w bezeichnet. Den Wert der Unbekannten bestimmen, nennt man die Gleichung auflösen. Der Wert der Unbekannten heißt eine Wurzel der Gleichung. Eine Wurzel einer Gleichung ist also eine Zahl, welche an Stelle der Unbekannten in die Gleichung eingesetzt, die Gleichung zu einer identischen macht.

In leichten Fällen ist schon durch den Anblick der Gleichung eine Wurzel derselben zu finden.

Beispiel: in $a^2 + 2ax + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist $x = b$, in $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ ist $x = 2$, in $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ ist $x = 1$.

Doch ist dies Verfahren nur selten anwendbar und liefert oft auch nicht alle Wurzeln der Gleichung. So hat in obigem Beispiel die zweite Gleichung auch noch die Wurzel $x = \frac{1}{2}$, und die dritte auch noch die Wurzel $x = -1$.

Man muß demnach Mittel aufsuchen, durch welche man alle Werte der Unbekannten auffinden kann.

Diese Mittel bezwecken, die Gleichung in eine andere, einfachere Form zu bringen und benützen folgende einfache Gesetze.

Gleiches zu Gleichem addiert oder von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Wenn $a - b = c$ und $b = b$, so ist $a = c + b$; oder wenn $a + b = c$ und $-b = -b$, so ist $a = c - b$.

Dies faßt man zusammen in die

1. Regel: Jedes Glied darf man von der einen Seite auf die andere setzen, indem man das Vorzeichen des Gliedes ändert.

Zusatz 1. Wenn $a + b = c + b$ und $-b = -b$, so ist $a = c$; oder $a - b = c - b$ und $b = b$, so ist $a = c$.

D. h. Stehen gleiche Glieder mit gleichen Zeichen auf beiden Seiten, so können sie weggelassen werden.

Zusatz 2. Wenn $a = b$, so ist $b = a$; d. h. die beiden Gleichungsseiten können vertauscht werden.

Gleiches mit Gleichem multipliziert oder durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

Wenn $\frac{a}{m} = b$ und $m = m$, so ist $a = m \cdot b$; oder wenn $a \cdot m = b$ und $m = m$, so ist $a = \frac{b}{m}$. Also:

2. Regel. Ein Faktor der einen Gleichungsseite darf als Divisor auf die andere Gleichungsseite gebracht werden, und ein Divisor der einen Gleichungsseite darf als Faktor auf die andere Gleichungsseite gebracht werden.

Zusatz 1. Wenn $ma = mb$ und $m = m$, so ist $a = b$; wenn $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$ und $m = m$, so ist $a = b$.

D. h. Gleiche Faktoren oder gleiche Divisoren der beiden Gleichungsseiten dürfen weggelassen werden.

Zusatz 2. Wenn $a - b = c + d - e$,
so ist $-a + b = -c - d + e$.
D. h. Man darf die Vorzeichen aller Glieder ändern.

82.

Auflösungsmethoden.

Man schaffe die Unbekannte auf die linke Seite u. befreie sie von Faktoren u. Nenner

Die einfachste Gleichung ist $x = a$; sie ist schon gelöst. Jede Gleichung von komplizierterer Form muß durch die Auflösungsmethode auf diese einfachste Form gebracht werden; dann gibt die einfachste Form die Lösung, oder die Wurzel der Gleichung.

Indem wir von dieser einfachsten Form nach und nach zu komplizierteren übergehen, erhalten wir folgende Methoden:

1. Steht die Unbekannte allein auf einer Seite der Gleichung, und hat sie nur Faktoren, oder Divisoren oder ein negatives Zeichen bei sich, so schaffe man diese auf die andere Seite.

Beispiel: $6x = 18$ gibt $x = 3$; $\frac{x}{3} = 11$ gibt $x = 33$.
$\frac{5}{7}x = 4$ gibt $x = \frac{28}{5}$. $-x = b$ gibt $x = -b$;
$x(a - b) = a + b$ gibt $x = \frac{a+b}{a-b}$ u. s. w.

2. Kommt die Unbekannte nur auf einer Seite der Gleichung, und nur in der ersten Potenz vor, aber in mehreren Gliedern, so vereinigt man diese Glieder in ein Glied, und führt dadurch die Gleichung auf den ersten Fall zurück.

Beispiel: $5x + 8x = 26$; gibt $13x = 26$.
$7x - 11x + 15x - 23x = 18$; gibt $-12x = 18$.
$2\frac{1}{2}x - 5\frac{3}{4}x + 7\frac{1}{2}x = 12 - 3\frac{1}{2}$; gibt $4\frac{1}{4}x = 8\frac{1}{2}$.
$ax + bx = c$; gibt $x(a + b) = c$.
$2a^2x - 3b^2x - 5b^2x = a - 2b$; gibt $x(2a^2 - 8b^2) = a - 2b$.

3. Kommen auf beiden Gleichungsseiten Glieder mit der Unbekannten und Glieder ohne die Unbekannte (bekannte Glieder) vor, so setzt man alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten auf die eine, alle bekannten Glieder auf die andere Seite; man „ordnet die Gleichung"; dadurch wird sie auf die zweite Form zurückgeführt.

Beispiel: $7x - 4 = 3x + 8$; gibt $7x - 3x = 8 + 4$.
$a - 2bx + 3b = 3a - ax - b$; gibt $ax - 2bx = 2a - 4b$.

4. Enthält die Gleichung Klammern, welche die Unbekannte enthalten, so müssen dieselben weggeschafft werden; dies geschieht entweder dadurch, daß man sie auflöst, oder dadurch, daß man die Gleichung durch passende Anwendung der Regeln von **81** so umgestaltet, daß die Klammern überflüssig werden und demnach weggelassen werden können. Dadurch wird die Gleichung auf die Form 3 oder eine frühere gebracht.

Klammern, welche die Unbekannte nicht enthalten, brauchen nicht aufgelöst zu werden; man löst sie auf, wenn man sich nach der Form der dabei entstehenden Glieder Vereinfachungen versprechen kann.

$5 - (x - 3) = 2(x + 7)$; $5 - x + 3 = 2x + 14$.

$a(a + x) = x(a - b) + a(a + b)$; $a^2 + ax = ax - bx + a^2 + ab$.

$3(x - 2) = 12$; $x - 2 = 4$.

$a - b = 2a - (x - a)$; $x - a = a + b$.

5. Kommen in der Gleichung Brüche vor, welche die Unbekannte im Nenner oder als Glied eines Polynoms im Zähler enthalten, so müssen die Nenner dieser Brüche weggeschafft werden. Dies geschieht, indem man die ganze Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen dieser Nenner, dem Generalnenner dieser Brüche, multipliziert. Dadurch wird die Gleichung auf die Form 4 oder eine frühere zurückgeführt.

Andere Brüche, welche blos bekannte Zahlen (Buchstaben) oder welche die Unbekannte nur im Zähler in einem eingliedrigem Ausdruck enthalten, müssen nicht weggeschafft werden. Man schafft sie weg, wenn man sich nach der Form der dadurch entstehenden Glieder Vereinfachungen verspricht.

Beispiel: $\frac{x - 2}{5} = \frac{2x - 5}{3}$; $3(x - 2) = 5(2x - 5)$;

$\frac{7}{4x} = \frac{9}{6x - 4}$; $7(3x - 2) = 9 \cdot 2x$.

Man achte noch besonders darauf, ob nicht ein Bruch, dessen Nenner weggeschafft werden muß, sich noch vereinfachen läßt.

Erst wenn nach dieser Methode die Gleichung von Nennern und Klammern befreit und die Glieder geordnet und vereinigt sind, läßt sich erkennen, von welchem Grade die Gleichung ist. Kommt nämlich die Unbekannte in der vereinfachten Gleichung blos in der ersten Potenz vor, so nennt man die Gleichung eine Gleichung ersten Grades oder eine lineare Gleichung, deren allgemeine Form $ax = b$ ist.

Enthält die vereinfachte Gleichung die Unbekannte auch noch in der zweiten Potenz, so heißt sie eine Gleichung vom zweiten Grade oder eine quadratische Gleichung, deren allgemeine Form

$$ax^2 + bx = c \text{ ist.}$$

Allgemein: Der höchste Exponent der Unbekannten der vereinfachten Gleichung gibt deren Grad an. In der einfachsten Form ist:

eine Gleichung dritten Grades: $ax^3 + bx^2 + cx = d$,

" " vierten " : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e$;

u. s. w.

Die bisher entwickelte Methode genügt zur Vereinfachung und Lösung der linearen Gleichungen, sofern dieselben keine Wurzelgrößen enthalten.

83.

Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

1. $x + a = b$; $x - a = b$; $a = b + x$; $a = b - x$;
$a - x = b$; $ax = b$; $\frac{x}{a} = b$; $\frac{a}{x} = b$;

2. $x + 28 = 71$; $x - 1\frac{4}{5} = 2\frac{3}{4}$; $114 = 85 + x$;

3. $27 = 38 - x$; $35 - x = 21$; $0{,}4 = 0{,}17 - x$;

4. $x + 2a = a + b$; $3a + b = 4a + x$; $3b - x = 2a + b$;

5. $x + a = \frac{1}{2}(a + b)$; $x - b = \frac{1}{2}(a - b)$; $a - x = \frac{1}{2}(a - b)$;

6. $\frac{1}{2}(a + b) = b + x$; $x + \frac{1}{2}(a - b) = a$; $x - \frac{1}{2}(a - b) = b$;

7. $b = \frac{1}{2}(a + b) + x$; $\frac{1}{2}(a + b) - x = b$; $a = x - \frac{1}{2}(a - b)$;

8. $n - 1 + x = 2n - 2$; $n - 2 - x = 2n - 4$;

9. $2n - 2 = n + 1 + x$; $2a + 3b = x - 3a + 2b$;

10. $7c + 1\frac{1}{2}a = 2c - 3\frac{1}{2}a + x$; $5p - x - 1 = 6p - 2$;

11. $7\frac{3}{4}a + x + 2\frac{4}{5}b = 2\frac{5}{12}a + 8\frac{2}{15}b$;

12. $x - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b)$; $\frac{1}{2}(a - b) - x = \frac{1}{2}(a + b)$.

---

13. $2x = 6a + 4b$; $3x - 4 = 2$; $12 - 5x = 2$;

14. $18 = 7x + 4$; $7x = 4\frac{1}{5}$; $3\frac{1}{2}x = 4\frac{1}{5}$; $1\frac{3}{4} = 1\frac{2}{5}x$;

15. $\frac{9x}{17} = \frac{45}{4}$; $\frac{8x}{15} = \frac{16}{75}$; $2\frac{3}{4}x = 6\frac{7}{8}$; $\frac{5}{9} = \frac{20x}{21}$;

16. $3x - 4a + 5b = 2a - b$; $11\frac{1}{2}x - 37a = 9a$;

17. $3\frac{5}{6}a = 5\frac{1}{3}x - 8\frac{1}{6}a$; $149 = 12x - 91$.

---

18. $\frac{x}{6} = 21$; $2a + 1 = \frac{x}{5}$; $3a - \frac{x}{4} = 2$;

19. $\frac{1}{2}(a + b) = a + \frac{x}{2}$; $cx + a = 2bc + a$;

20. $x(a + b) = b$; $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}(a - b)$; $1\frac{1}{15} = 9x$;

21. $3\frac{1}{2}x + 2\frac{3}{4} = 10\frac{1}{12}$; $32\frac{1}{3} = 45\frac{2}{3} - 1\frac{3}{5}x$;

22. $b^2 = a^2 - (a - b)x$; $n^2 + x(1 + n) = 1$; $a^2 + 1 = 2a + x(a - 1)$;

23. $bn - a = an - b - x(a - b)$; $4 + x(q - 2) = 2q$;

24. $2x + 5 = 3$; $13 + 4x = 5$; $7 - 4x = 19$; $7 - \frac{1}{2}x = 9$;

25. $2\frac{3}{4} - \frac{x}{8} = 7\frac{5}{6}$; $11\frac{1}{12} = 2\frac{5}{6} - 1\frac{3}{8}x$;

26. $2\frac{1}{4}x + 4\frac{13}{24} = 2\frac{2}{3}$; $a^2 + x(a - b) = b^2$;

27. $2 = a - \frac{x}{a - 1}$; $12 = 17 + \frac{1}{3}x$; $18 = 15 - \frac{1}{3}x$

28. $\frac{x}{a-b} + b = a + 2b$; $\frac{x}{3a - 2b} - 3b = 2(a - b)$;

30. $a^2 + \frac{x}{a+b} + b^2 = ab$; $a(a+b) = \frac{x}{b-a} - b^2$.

---

31. $4 : x = 12 : 17$; $1\frac{1}{4} : 2\frac{6}{7} = 4\frac{3}{8} : x$;
32. $x : a = (a - b) : b$; $(a - b) : x = a : (b + a)$;
33. $1 : a = x : 2$; $1 : a = 2 : x$;
34. $2x + 7a = x + 11a$; $12a - x = 3a - 3x$;
35. $a + b + x = 2b + 2x - a$; $1\frac{3}{4}x + 5\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4} - 2\frac{5}{8}x$;
36. $ax + 1 = bx$; $bx = a - ax$; $(a+b)x - 2b = (a - b)x$;
37. $(2n - 1)x + 2 = 1 - x(2 - 2n)$;
38. $bx + cx - dx + a = b + ax + cx - dx$;
39. $2ax - bx - a - 2b = bx + a$;
40. $ax + b + x(b - a) = a + b - x(a - b)$;
41. $2a - 2x + ax = 6a - ax + 6 - 5x$;
42. $mx - n = rx - p$; $ax + m^2 - a = bx + m^2 + b$;

---

43. $\frac{2a}{x} = 3a$; $\frac{3}{x} = 7$; $\frac{4}{x} + 2 = 10$; $2 - \frac{5}{x} = 12$;

44. $a - \frac{a-b}{x} = b$; $2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{2} - \frac{3}{x}$; $2\frac{1}{2} + \frac{3}{x} = 6\frac{1}{4}$;

45. $9\frac{11}{12} = 3\frac{2}{3} - \frac{5}{x}$; $\frac{4}{x} = \frac{8}{7} + \frac{3}{x}$; $\frac{5}{2} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x} + 1$

46. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{20}x = 40$; $-\frac{7}{x} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{x} + 2\frac{1}{6}$;

47. $\frac{7}{x} + 7 - \frac{3}{x} + 3 = 5 - \frac{5}{x} - 11\frac{1}{2}$;

48. $\frac{a}{x} + b = \frac{b}{x} + a$; $\frac{x}{a} + b = \frac{x}{b} + a$;

49. $\frac{x}{3} + 4 = \frac{x}{5} + 6$; $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 15 - \frac{x}{6}$;

50. $\frac{2}{x} + 3 = \frac{3}{x} + 4$; $\frac{a-1}{x} + 1 = \frac{a+1}{x} + a$;

51. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{8} - \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{4} - \frac{x}{3} + 2\frac{1}{2}x^2$;

52. $\frac{2a}{x} + a = 1 + \frac{a-1}{x} + 2a$; $ax + 1 = a^3 + x$;

53. $a^2 + ax = bx - b^2 + 2ab$;

54. $\frac{x}{a} - \frac{2x}{a} = 1 - \frac{x}{b}$; $x - 2 = \frac{x}{3} - 5$;

55. $3x - \frac{4}{5}x = 4 + 2x - \frac{3}{4}x$; $a + bx + a^2 = b + ax + b^2$;

56. $\frac{a+1}{x+1} = 1; \quad \frac{a-1}{x+1} = 2; \quad \frac{a+2}{x-1} = 1; \quad \frac{a-2}{x-1} = 2;$

57. $\frac{3x-12}{10} = 0; \quad \frac{4x-7}{3} = 1.$

---

58. $ax + b + (b-a)x = a - bx + (b+a)x; \quad [=-1]$

59. $4a(a+x) - 2b(x-2a) - b^2 = x(3a-b) + 2a(b+3a) - a^2;$

60. $(3x-c)(b+c) = a^2 - c^2 + (b+c)(a+2x);$

61. $3x(a+c) - a(a+b) = (2x+b)(a+c) - a(b-c);$

62. $(2a+x)(2a-x) = 2a^2 - 2ax - x^2; \quad [=-a]$

63. $2(5a-1)(1-x) - 4 = 3a - (1-3a)(3a-5x+1);$

64. $43b^2 - (7b+10x)(7a-6b) = 7a(15a-11x) + 11b(5x-4a) - 49ab;$

65. $2(m-n)\{5x - 8(m+n)\} + 2nx = 9m^2 - (5m-4n)(3-x);$

66. $(x+b)^2 - (x-b)^2 = 4ab; \quad [=a]$

67. $x(1-x) - (1+x)(1-2x) + (2-x)(3-2x) = (x+1)(3x-2);$

68. $5x(a-b) - 3b(a+b) + 3x - (a+b) = 2a(a+b) - 4x(2b-a);$

69. $(x-a)(5a-b) + 3a(6b+4a) - 2(x-a)(3a+b) = 3a(11b+4a) - 3(x-a)(b+2a);$

70. $(x+\frac{1}{2})(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-x^2) + x(\frac{1}{4}-\frac{x}{2}+x^2) = (x-\frac{1}{2})(\frac{1}{4}-\frac{x}{2}-x^2) + x(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}+x^2) - x(x-\frac{1}{4});$

71. $(a+x-b)(a-x-b) = (a-x)(b+x) - ab; \quad [=a-b]$

72. $ax(a+b) - b(a-b) = bx(a+b) + a(a-b); \quad [=1]$

73. $(a+b)(x-a-b) - (a-b)(c-x) = (a-b+c)(x-c);$

74. $2a(b-a-2) + ax = bx - 4a(a-b+1);$

75. $a - (2x-a)(a-2b+1) + 2b(a+3) = 3b(a+2) + (2x-a)(a+b-1) - a(2a-1);$

76. $(x-2)(a+2) + (a-1)(a-2) = (x-2)(a-3) + (a+1)(a+2).$

---

77. $4\{3(2(x+1)-3)-5\} - 6 = 34. \quad [=3]$

78. $\frac{1}{4}\{\frac{1}{3}(\frac{1}{2}(x-1)+1)-1\} + 1 = \frac{4}{5}; \quad [=-\frac{1}{5}]$

79. $2\{2(2(2x-1)-1)+2\} - 1 = 1; \quad [=\frac{5}{8}]$

80. $1 - \frac{1}{4}[1 - \frac{1}{5}\{1 - \frac{1}{3}(2-3(1-x))\}] = \frac{7}{9}; \quad [=\frac{7}{9}]$

81. $1 - \frac{9}{10}\{\frac{7}{8} - \frac{5}{6}(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}(\frac{2}{3}-x))\} = \frac{13}{16}; \quad [=\frac{2}{3}]$

82. $b - \frac{1}{2}[a - \frac{1}{3}\{b - \frac{1}{2}(a+(x+b))\}] = \frac{7b-4a}{6}; \quad [=a-b]$

---

83. $6x - \frac{x-3}{2} = 95; \quad \frac{3x}{4} = \frac{x-12}{2} + 14; \quad [=17; \ =32]$

84. $\frac{2x-3}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} = 1; \quad x - \frac{x-3}{5} = 26\frac{1}{5}; \quad [=1\frac{1}{2}; \ =32]$

Beseitigt man den Nenner eines Bruches, der ein negatives Vorzeichen hat, so tut man gut, den Zähler, wenn er zusammengesetzt ist, in eine Klammer einzuschließen.

85. $ax - \frac{2a - 3bx}{3} = \frac{1}{4}$; $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = 2$;

86. $\frac{x-4}{5} - \frac{x-3}{6} + \frac{x-1}{8} = 1$; [$= 9$]

87. $\frac{x+3}{24} + \frac{x+5}{20} - \frac{x+6}{28} = 1$; [$= 15$]

88. $\frac{7x+2}{6} - \frac{3x-2}{10} = \frac{2x+7}{15} + \frac{2x+1}{3}$; [$= 4$]

Beim Differenz od. Summen im Nenner beachte, dass man beim Aufstellen des Hauptnenners als einen Faktor für sich.

89. $\frac{5}{2x-3} = \frac{7}{3x-4}$; $\frac{5}{0{,}4x-7} = \frac{9}{4-0{,}3x}$; [$= -1$; $16\frac{14}{51}$]

90. $\frac{12}{2x+1} = \frac{18}{5x-3\frac{1}{2}}$; $\frac{a}{x-1} = \frac{2a+1}{x+1}$; $\left[= 2\frac{1}{2};\ \frac{3a+1}{a+1}\right]$

91. $\frac{2\frac{4}{5}}{7-3\frac{1}{2}x} = \frac{5\frac{1}{7}}{8-1\frac{4}{7}x}$; $\frac{4x-1}{2ab} - \frac{4ab^2+3bx}{2ab^2} = \frac{4-x}{ab} + 1$;

92. $\frac{10}{3x-4} - \frac{3}{5} - \frac{4}{3x-4} = \frac{12}{3x-4}$; [$= -2$]

93. $\frac{5}{2x-1} - 1 = \frac{3\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + \frac{11}{1-2x}$; [$= 5$] × verwandeln in: $-\frac{11}{2x-1}$!

94. $\frac{x-2}{4} + \frac{x-1}{5} = 1 - \frac{x+1}{36}$; [$= 3\frac{1}{2}$]

95. $\frac{9x-10}{6} - \frac{5x+1}{27} = 2 - \frac{3x}{4}$; [$= \frac{400}{223}$]

96. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}} - \frac{1\frac{1}{3}}{1 - 1\frac{1}{3}x} = 2\frac{1}{2}$; [$= 1\frac{3}{4}$]

97. $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x-1}{x-9}$; $\frac{4x+7}{10x+9} = \frac{2x-3}{5x-16}$; [$= -3$; $= -5$]

98. $\frac{x-3}{4} + \frac{2x+5}{5} = 1 + \frac{x+10}{6}$; [$= 5$]

99. $x - \frac{4x+3}{15} + \frac{2x+3}{21} = \frac{5x+4}{28} - \frac{7x+4}{20} - 12$; [$= -12$]

100. $\frac{a+b+1}{x} = \frac{2}{x-1}$; $0{,}5x + 7 - \frac{2}{3}x - 0{,}6x - 16$;

101. $4{,}7x - \frac{27-10x}{2} = 15\frac{1}{4}x - 2{,}4$; [$= -2$]

102. $1 - \frac{ab}{(a+x)(a+b)} = \frac{1}{a+x} + \frac{a}{a+b}$; $\left[= \frac{a+b}{b}\right]$

103. $(a - x) : (a - x + 1) = (a + x + 1) : (x + 1)$;

104. $a - (a - x)\left(a + \frac{a}{x}\right) + x\left(a - \frac{a}{x}\right) = a\left(x - \frac{a}{x}\right) - a$;

105. $\frac{x}{a} - b = \frac{x}{c} - d; \quad \frac{a}{x} - b = \frac{c}{x} - d;$

106. $4 + (3 - 7x)\left(4 + \frac{11}{x}\right) - 5x\left(7 + \frac{4}{x}\right)$
$= 7x\left(9 - \frac{4}{x}\right) - 11\left(4 - \frac{3}{x}\right);$

107. $\frac{x}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} = \frac{x}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}; \quad \left[= \frac{a^2+b^2}{b}\right]$

108. $\frac{x}{c-1} - \frac{1}{c+1} = \frac{x}{c+1} + \frac{c+1}{c-1} + 1; \quad [= \tfrac{1}{2}(2c^2+3c-1)]$

109. $\frac{x-1}{c-1} + \frac{c-1}{c+1} + 1 = \frac{x+1}{c+1} - \frac{c+1}{c-1} + 1; \quad [= -c^2+c-1]$

110. $\frac{x+a}{c+a} + \frac{2c-x}{2c+a} - 2 = \frac{x+2c}{2c+a} - \frac{x-a}{c+a}; \quad \left[= \frac{(c+a)(2c+a)}{c}\right]$

111. $5\tfrac{1}{2} - \frac{16x-7}{2x+5} - \frac{6x+17}{7-3x} = \frac{5x-11}{6x+15} - \frac{8x-9}{6x-14}; \quad [= \tfrac{1228}{1417}]$

112. $((a-1)^2 x + a + 1)(1 - (a+1)x)$
$= (a - (a-1)x)(1 - a + (a^2 - 1)x);$

113. $((1-a^2)x - a)^2 - ((1+a^2)x - a - 1)^2$
$= a^2 + 2a + 2 - (1 + a + 2ax)^2;$

114. $\frac{7\frac{1}{3}}{2x+11} + \frac{3\frac{1}{2}}{5-4x} + 1\tfrac{1}{3} = \frac{8x}{6x+33} - \frac{1\frac{2}{3}}{8x-10}; \quad [= \tfrac{209}{124}]$

115. $x - \tfrac{1}{4}\left(7 - \frac{x-2}{5}\right) = \tfrac{1}{7}\left(1\tfrac{1}{5}(6x-1) - x - 6\right); \quad [=5]$

116. $\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+x} + 4\tfrac{4}{5} = 5 - \frac{\frac{4}{5}+\frac{4}{5}x}{\frac{4}{5}+x}; \quad [= -2\tfrac{2}{5}]$

117. $\frac{\frac{7}{9}+\frac{2}{3}x}{\frac{7}{9}-\frac{2}{3}x} + 3\tfrac{8}{9} = 4 + \frac{\frac{2}{3}+\frac{7}{9}x}{\frac{7}{9}-\frac{2}{3}x}; \quad [= \tfrac{2}{3}]$

118. $\frac{\frac{2}{a}+\frac{x}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{x}{b}} + \frac{1}{a} = 1 - \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{x}{b}}; \quad \left[= \frac{b(1+2a)}{a(1-2a)}\right]$

119. $\frac{a}{b} - \frac{2b-x}{2(a+x)} = \frac{a}{2b} + \frac{a^2}{b(a+x)} + \frac{3a}{2(a+x)}; \quad [= a + 2b]$

120. $\frac{x+2}{3x-2} - \frac{x+3}{4x+1} = \frac{3x+4}{4x+1} - \frac{2x-1}{3x-2}; \quad [= 2\tfrac{1}{2}]$

121. $\frac{a}{6(a^2-2)} - \frac{x-a-1\frac{1}{3}}{2(2-a^2)(2a-x)} = \frac{1}{3a(2-a^2)} - \frac{1}{6(x-2a)}; \quad [=a]$

122. $\frac{1}{1-x} + \frac{4x+4}{1+x} = \frac{4x}{x-x^2}; \quad [= \tfrac{1}{4}]$

123. $\frac{1}{3} - \frac{1}{a(a-2)(x-a)} = \frac{1}{3x-3a} - \frac{1}{a^2-2a}$; [$= a+1$]

124. $\frac{x+\frac{1}{a}}{x-\frac{1}{a}} = 4 - \frac{x}{x-\frac{1}{a}} + \frac{1}{1-ax}$; $\left[= \frac{3}{a}\right]$

125. $\frac{6}{3x-\frac{1}{a}} = \frac{6}{2x+\frac{1}{a}} - \frac{1}{x+\frac{1}{a}}$; $\left[= -\frac{11}{7a}\right]$

126. $\frac{a}{x-b} - \frac{b}{2a} = \frac{b}{x-b} - \frac{a+b}{2a} + \frac{3a-b}{2(a+b)}$; [$= a+2b$]

127. $(x-2):(x-5) = (x+3):(x-1)$;]$= 17$]

128. $(x+1)^2 - 11 = (x+2)^2 - 4(x+2)$; [$= 3$]

129. $2(x+3)^2 - 4(5x-6) = 25 + 2(x-5)^2$; [$= 2\frac{3}{4}$]

130. $(x-6)^2 + 14 = (x-4)^2 - (x-4)(x+2) + (x+2)^2$;

131. $3(x-11)^2 - 5(2x-9)^2 = (x-50)(x-5) - 2(3x-7)^2 - 4$;

132. $3(x+0{,}1)^2 + (2x+0{,}3)^2 = (3x+0{,}4)^2 - 2(x+0{,}1)^2 - 0{,}04$;

133. $\frac{4}{3}\left[x - \frac{2}{3}\left(3 - \frac{5}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(5 - \left(x - \frac{2}{5}\right)\right)\right)\right]$
$= -\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{1}{9}\left(x^2 - \frac{1}{2}\left(148\frac{1}{3}x - 164\frac{7}{8}\right)\right)$;

134. $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x^2-1} = 2$; [$= 2$]

135. $\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3} + 2 = \frac{2x^2-3}{x^2+x-6}$; [$= -8$]

136. $\frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} + \frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} - \frac{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{x^2-\frac{1}{4}}$; [$= 3$]

137. $2 + \frac{5}{4x} - \frac{15}{4x(8x+3)} = \frac{2(7x+1)}{7x-3}$; [$= 9$]

138. $(x+2)^3 + 2\frac{(x-5)^2}{x+2} + \frac{8x+2}{x+2} + 71 = (x^2+14)(x+6)$;

139. $\frac{7}{x-1} - \frac{2x}{x-2} + 3 = \frac{x}{x-3}$; [$= 2{,}4$]

140. $\frac{5}{x^2+x-6} - \frac{7}{x^2-9x+14} = \frac{4}{x^2-4x-21}$; [$= -8$]

141. $\frac{13}{x^2-x-30} = \frac{15}{x^2+13x+40} - \frac{18}{x^2+2x-48}$; [$= -17\frac{3}{4}$]

142. $\frac{x-1\frac{5}{8}}{x+1\frac{1}{8}} - \frac{x+1\frac{1}{8}}{x-1\frac{5}{8}} = \frac{1}{x^2-\frac{1}{2}x-1\frac{53}{64}}$; [$= \frac{3}{44}$]

143. $\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} + \frac{1}{3} = 2\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{6}$; [$= \frac{5}{7}$]

144. $\frac{7}{3x^2+3x-18} - \frac{3}{5x^2-5x-60} = \frac{1}{15x^2-90x+120}$;

145. $\frac{11}{40x-40} - \frac{27}{35x-70} + \frac{31}{42x-42} = \frac{2x}{5x^2-15x+10}$;

146. $\frac{4}{15x-30} = \frac{5}{12x-60} - \frac{3}{20x-60}$; [$=2\frac{8}{11}$]

147. $1 - \frac{1}{1-x} - \frac{2}{2-x} = \frac{x}{x-3}$; [$=1\frac{1}{2}$]

148. $\frac{1}{2-x} - \frac{3+x}{(2-x)^2} = \frac{1-2x}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2-x)^3}$; [$=1\frac{1}{2}$]

---

149. $\frac{5}{x-5} - \frac{5}{x-4} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-1}$; [$=7$]

150. $\frac{3}{x-5} - \frac{3}{x-3} = \frac{2}{x-4} - \frac{2}{x-1}$; [$=\frac{11}{3}$]

151. $\frac{2}{x-7} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-4} + \frac{1}{x-8}$; [$=12$]

152. $\frac{1}{x+12} - \frac{1}{x+6} = \frac{6}{x+8} - \frac{6}{x+7}$; [$=-5\frac{1}{3}$]

153. $\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-5} = \frac{2}{x+5} - \frac{2}{x+7}$; [$=\frac{5}{13}$]

154. $\frac{4}{x-11} + \frac{4}{2-x} = \frac{3}{x-7} - \frac{3}{x+5}$; [$=5\frac{2}{11}$]

155. $\frac{4}{x-8} - \frac{5}{x-5} = \frac{4}{x+2} - \frac{5}{x+3}$; [$=-\frac{1}{4}$]

156. $\frac{x+5}{x-4} + 1 = \frac{5}{x-7} + \frac{x-8}{x-5} + \frac{x+3}{x-4}$; [$=4\frac{1}{2}$]

157. $\frac{x+2}{x+3} - \frac{2x+3}{x+4} + \frac{2x-5}{x+6} = \frac{2x+7}{x+6} + \frac{x-5}{x+3} - 2$; [$=-\frac{114}{31}$]

158. $\frac{x+3}{x+4} - 2 + \frac{2x-3}{2x+3} = \frac{x-2}{x+4} - \frac{x+12}{x+14}$; [$=6$]

159. $\frac{3x+1}{x-3} - \frac{2x-8}{2x-3} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{3x+2}{x-3} - \frac{2x-7}{2x+4} - 1$; [$=5$]

---

160. $a\frac{x+a}{2x-a} - 1 = a - \frac{x+a}{2x-a}$; [$=2a$]

161. $4b - 2b\frac{x+a-b}{x+a+b} = a\left(\frac{x+a-b}{x+a+b} - 2\right)$; [$=-a-3b$]

162. $\dfrac{2}{\dfrac{3x+2\frac{1}{4}}{2x-\frac{1}{4}}+2} = \dfrac{3}{2\dfrac{3x+2\frac{1}{4}}{2x-\frac{1}{4}}+2\frac{1}{2}}$; $[= -2\frac{1}{2}]$

163. $3\frac{1}{2}x - 1\frac{5}{12} = 3(3\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{6}) - 11\frac{1}{4}$. $[=2\frac{1}{3}]$

Aufl.: **59.** $a-b$; **60.** $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}$; **61.** $a+b$; **63.** $\frac{9a^2-7a+5}{5a-3}$; **64.** $15a-17b$; **65.** $5m+4n-3$; **67.** $1\frac{1}{6}$; **68.** $\frac{1}{2}(a+b)$; **69.** $a+3b$; **70.** 1; **73.** $a+b+c$; **74.** $-2a$; **75.** a; **76.** $1\frac{1}{5}a+2$; **85.** $\frac{3+8a}{12(a+b)}$, $\frac{2ab}{a+b}$; **91.** 1; $2ab+3$; **100.** $\frac{a+b-1}{a+b+1}$; 30; **103.** $\frac{a^2+a+1}{a-1}$; **104.** $a-2$; **105.** $\frac{ac(b+b)}{c-a}$; $\frac{a-c}{b-d}$; **106.** $-\frac{1}{14}$; **112.** $\frac{1}{a+1}$; **113.** $\frac{1}{2a^2+a+1}$; **130.** $2\frac{1}{5}$; **131.** $2\frac{4}{17}$; **132.** 0,1; **133.** $2\frac{2}{3}$; **138.** 2; **144.** 5; **145.** $-7\frac{123}{133}$.

84.

Wurzelgleichungen, welche auf Gleichungen ersten Grades führen.

Eine Wurzelgleichung nennt man eine solche, bei welcher die Unbekannte unter einer Wurzel steht (im Radikand einer Wurzel vorkommt). Um die Gleichung aufzulösen, müssen diese Wurzeln zuerst weggeschafft werden, was im allgemeinen dadurch geschieht, daß man beide Gleichungsseiten mit derselben passend gewählten Zahl potenziert.

Hiezu ergeben sich im Besonderen folgende Regeln.

1. Man beseitige zuerst die Nenner.

2. Alle Glieder, welche dieselbe Wurzelgröße enthalten, müssen in je ein Glied vereinigt werden.

3. Enthält die Gleichung dann blos eine Wurzelgröße, so schafft man sie allein auf eine Seite und potenziert beiderseits mit ihrem Exponenten. Beispiel: $\sqrt{x} = 2$; $x = 4$; $\sqrt[3]{x} = 7$; $x = 343$.

4. Enthält die Gleichung blos zwei Wurzelgrößen und sonst keine Glieder, so stellt man jede Wurzel auf eine Gleichungsseite und potenziert beiderseits mit so viel, daß die Wurzeln wegfallen.

Beispiel: $\sqrt{2x-3} = \sqrt{5x-12}$; $2x-3 = 5x-12$. $\sqrt[4]{x^2+3x-1} = \sqrt{x-2}$; $x^2+3x-1 = x^2-4x+4$.

5. Enthält die Gleichung außer zwei Quadratwurzeln noch Glieder, so betrachte man letztere als in ein Glied zusammengefaßt, so daß die Gleichung drei Glieder enthält; man stellt dann ein Glied, häufig am bequemsten eine Wurzelgröße, allein auf eine Seite und quadriert beiderseits, wodurch die Gleichung auf die Form 3 zurückgeht. Diese Regel paßt auch dann noch, wenn das dritte Glied auch eine Quadratwurzel ist.

Beispiel: $\sqrt{x-3} = 3 - \sqrt{x-6}$;
$x-3 = 9-6\sqrt{x-6}+x-6$. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+17} = 2\sqrt{x+6}$
gibt: $x-3+2\sqrt{(x-3)(x+17)}+x+17 = 4x+24$; dann nach 3.

6. Enthält die Gleichung vier Quadratwurzeln, oder deren 3 und noch ein Glied, so stellt man je zwei Glieder auf jede Seite und quadriert, wodurch die Gleichung auf 5 zurückgeht.

Diese Regeln genügen wohl in den meisten, aber nicht in allen Fällen, und es werden später noch einige Regeln hinzugefügt werden.

Erst wenn alle Wurzeln weggeschafft sind, zeigt sich von welchem Grade die resultierende Gleichung ist.

---

1. $\sqrt{x} + 5 = \sqrt{x} + 8$; $a\sqrt{x} = b$;

2. $\frac{1}{4}(3\sqrt{x} - 1) - \frac{1}{3}(3 - 2\sqrt{x}) = \sqrt{x}$; [= 9]

3. $(2\sqrt{x} + 5)(3\sqrt{x} - 2) = 6(x + 2)$; [= 4]

4. $(4\sqrt{x} - 5)(3\sqrt{x} + 2) = 7(2 - \sqrt{x})$; $\sqrt{a^2 + x} = b$;

5. $5\sqrt{7 - x} = 4 + 3\sqrt{7 - x}$; [= 3]

6. $a\sqrt{a^2+x} - a^2 = b\sqrt{a^2+x} - b^2$; $\sqrt{x-1} = 6 - \sqrt{4x-4}$;

7. $\frac{5}{\sqrt{18x - 27}} - \frac{3}{\sqrt{8x - 12}} = \frac{1}{6}$; [= 2]

8. $\sqrt{x(x + 2a)} = x + b$;

9. $\sqrt{x - 9} + 1 = \sqrt{x}$; $\sqrt{4x + 9} - 1 = 2\sqrt{x}$; [= 25; 4]

10. $\sqrt{3x + 1} + 2 = \sqrt{3x + 21}$; [= 5]

11. $\sqrt{4x - 3} + 2\sqrt{x + 2} = 11$; [= 7]

12. $\sqrt{5x + 9} - 1 = \sqrt{5x - 4}$; [= 8]

13. $\sqrt{4x + 3} - 2 = \sqrt{4x - 5}$; [= 1,5]

14. $\sqrt{9x^2 + 7x - 4} = 3x + 1$; [= 5]

15. $2\sqrt[3]{x + 4} = \sqrt{x + 4}$; [= 60]

16. $\sqrt[3]{x} + 1 = \sqrt{2}$; $\sqrt[4]{x} - \sqrt{a} = \sqrt{b}$;

17. $\sqrt{\frac{18}{\sqrt{x}}} + \sqrt{\frac{8}{\sqrt{x}}} = 5$; $\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{x}}} + \sqrt[3]{\frac{108}{\sqrt{x}}} = 8$;

18. $\sqrt{x - 8} + \sqrt{x + 4} = 2\sqrt{x - 3}$; [= 12]

19. $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 11} = 2\sqrt{x - 4}$; [= 20]

20. $\sqrt{3x + 40} - \sqrt{3x} = 2\sqrt{3x - 5}$; [= 3]

21. $\sqrt{2\sqrt{2x}+\sqrt{x^2+4x+\sqrt{x+1}}}=\sqrt{x}+\sqrt{2}$; [$=15$]

22. $x+\sqrt{x^2-3x+\sqrt{x^2+4x+3}}=1$; [$=-1$]

23. $\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}-\sqrt[3]{\frac{1}{4\sqrt[3]{x}}}=1$; [$=\frac{1}{64}$]

24. $\sqrt{(10\sqrt{x}-6)(5\sqrt{x}+3)}=\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)(\sqrt{10x}-1)$; [$=-\frac{1}{16}$]

25. $\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-3}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5}$; [$=121$]

26. $\sqrt{x+1}:\sqrt{x-4}=\sqrt{3x+12}:\sqrt{3x-8}$; [$=8$]

27. $-\sqrt{x-1}+\frac{5}{\sqrt{x+3}}=\sqrt{x+3}$; [$=\frac{7}{6}$]

28. $-\sqrt{2-x}+\frac{6}{\sqrt{4-x}}=\sqrt{4-x}$; [$=\frac{2}{5}$]

29. $\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{7}{4}-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}$; [$=4$]

30. $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}-\sqrt{\frac{3}{\sqrt{x}+1}}=0$; [$=4$]

31. $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x-7}}=\sqrt{x-7}$; [$=16$]

32. $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}}=1$; [$=9$]

33. $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}-\sqrt{\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}=1+\sqrt[4]{a}$; $\left[=\left(1-2\sqrt[4]{a}\right)^2\right]$

34. $\sqrt{\frac{a}{2\sqrt{x}-\sqrt{a}}}-\sqrt{\frac{2a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}=0$; [$=a$]

35. $\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$; [$=\frac{1}{4}$]

36. $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x}+3\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}+3\sqrt{2}}}=3-2\sqrt{2}$; [$=11-6\sqrt{2}$]

37. $\sqrt{9x+3}+\sqrt{x+\frac{1}{3}}=2\sqrt{3x+1}$; [$=-\frac{1}{3}$]

38. $\sqrt{9x+3}+\sqrt{x+\frac{1}{3}}=2\sqrt{3x+2}$. [$=-\frac{5}{6}$; Einsetzen!]

Textgleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

85.

Eine in Worte gekleidete Aufgabe, deren Lösung zu einer Gleichung führt und mittels derselben geschieht, nennt man eine Textgleichung.

Wir betrachten zunächst solche Aufgaben, bei welchen nur eine Größe gesucht ist, oder bei welchen, wenn mehrere Größen gesucht sind, diese von nur einer Größe so einfach abhängen, daß aus der Kenntnis dieser einen auch die Kenntnis der anderen Größen sich leicht ergibt.

Zur Auflösung solcher Aufgaben mögen die folgenden Anhaltspunkte als die wichtigsten hervorgehoben werden, und dabei bemerkt sein, daß es allgemeine Regeln, welche zur Lösung aller derartigen Aufgaben sicher führen, nicht gibt.

1. Definition der Unbekannten. Man bezeichne eine in der Aufgabe als gesucht vorkommende Größe als die Unbekannte, und benenne sie mit einem bestimmten Buchstaben, meistens x.

Es ist hie und da von Vorteil, nicht gerade die in der Aufgabe als gesucht bezeichnete Größe als Unbekannte zu wählen, sondern eine andere, welche mit ersterer so nahe verwandt ist, daß aus ihr die erstere leicht berechnet werden kann.

2. Aufstellung eines Satzes, welcher die Gleichheit zweier Größen ausspricht. Man suche aus der Angabe zwei Größen, oder Größenkomplexe, welche der Angabe gemäß einander gleich sein sollen. Die Richtigkeit der Behauptung, daß diese Größen einander gleich sind, ist entweder in der Angabe selbst enthalten als Forderung, daß sie gleich sein sollen, oder beruht auf meist einfachen Grundsätzen und Erfahrungsthatsachen des gewöhnlichen Lebens, oder auf Lehrsätzen einer Wissenschaft, Geometrie, Physik, Chemie, aus deren Gebiet die Aufgabe entnommen ist. Solche Sätze sind etwa folgende: „Der Weg des A muß gleich sein dem Weg des B plus dem Vorsprung des B", wenn angegeben ist, daß A den B einholen soll. „Das Silber, welches ich schon habe, plus dem Silber, welches ich dazuthue, ist gleich dem Silber, welches schließlich in der Mischung sein soll", wenn angegeben ist, daß aus zweierlei Sorten Silber eine dritte gemacht werden soll. „Die Geschwindigkeiten zweier Körper erhalten sich umgekehrt wie die Zeiten der Bewegungen", wenn angegeben ist, daß die Körper denselben Weg durchlaufen. „Die Menge Quecksilber, die ich mit Schwefel verbinde, ist gleich der Menge Quecksilber, die sich in dem dadurch entstandenen Zinnober befindet". (Lehrsatz der Chemie). U. s. w.

3. Berechnung der im Gleichheitssatze vorkommenden Größen. Man versucht nun die im Gleichheitssatze vorkommenden Größen zu berechnen und zwar 1. mittels der in der

Angabe enthaltenen bekannten Größen, 2. mittels der definierten Unbekannten; letztere wird hiebei, da sie eine ganz bestimmte, wenn auch vorderhand noch unbekannte Größe hat, und der Definition gemäß mit einem Buchstaben (x) bezeichnet ist, wie eine allgemeine Buchstabengröße behandelt, also während des Verlaufes dieser Berechnung als bekannt angesehen. Soll etwa der Weg des A berechnet werden, und weiß man aus der Angabe, daß A sich 12″ lang bewegt, und hat man seine Geschwindigkeit mit x bezeichnet, so ist der Weg des A = 12 x. Gelingt es, alle in dem Gleichheitssatze vorkommenden Größen vermittels gegebener Größen und der definierten Unbekannten zu berechnen, so werden die Ausdrücke dieser Größen in den Gleichungssatz eingestellt, und man hat eine analytische Gleichung, welche die definierte Unbekannte enthält.

4. Auflösung der Gleichung. Die Auflösung der erhaltenen Gleichung gibt den Wert der definierten Unbekannten, und damit direkt das Gesuchte, oder doch eine Größe, aus welcher das Gesuchte leicht berechnet werden kann.

5. Diskussion des Resultates. Der gefundene Wert der Unbekannten genügt, wenn richtig berechnet, den Bedingungen der Aufgabe; er kann also nur mehr geprüft werden auf seine Bedeutung, oder auf seine Verwendbarkeit für das praktische Leben, welchem die Aufgabe entnommen ist, oder auf die Möglichkeit seines Vorkommens, wenn er eine in der Natur nur innerhalb gewisser Grenzen vorkommende Größe bedeutet, und ähnliches. Er kann also nur betrachtet werden in Bezug auf diejenigen Größen, von denen er abhängt.

Beispiele. War nach der Zeit gefragt, in welcher ein Körper einen anderen einholt, und hat sich dieselbe als negativ ergeben, so ist zu sagen, daß der Körper den anderen in der Zukunft überhaupt nicht einholen wird, daß jedoch die Körper, wenn sie sich vorher auch schon nach denselben Gesetzen bewegten, früher einmal beisammen waren. Oder wenn nach der Geschwindigkeit gefragt ist, welche ein Reiter haben muß, um einen Fußgänger einzuholen, und es ergibt sich diese Geschwindigkeit gleich 20 m, oder 0,2 m, so liegt jede solche Geschwindigkeit außerhalb des möglichen oder gewöhnlichen Vorkommens. Wenn die Lösung aussagt, daß zu einer gewissen Arbeit $3\frac{2}{5}$ Arbeiter nötig wären, so heißt das, daß 3 Arbeiter zu wenig, 4 zuviel sind. U. a. m.

86.

Textgleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

1. Welche Zahl gibt 11, wenn man zu ihr 9 addiert?

2. Welche Zahl gibt p, wenn man sie von 9 subtrahiert?

3. Welche Zahl muß man von 27 subtrahieren, um 15 zu erhalten?

4. Welche Zahl gibt, mit 15 multipliziert, 255?

5. Welche Zahl gibt, durch 12 dividiert, 13?

6. Mit welcher Zahl muß man a dividieren, um b zu erhalten?

7. Von welcher Zahl ist das 3fache um 4 kleiner als 19?

8. Von welcher Zahl ist das $1\frac{2}{3}$fache um 3 größer als 17?

9. Von welcher Zahl ist der vierte Teil um 8 kleiner als 12?

10. Von welcher Zahl ist das Drittel um 4 größer als das Viertel?

11. Von welcher Zahl sind drei Viertel um 2 kleiner als vier Fünftel derselben?

12. Nehme ich von einer Zahl $\frac{8}{13}$, so habe ich um 6 mehr als der Rest beträgt; wie heißt die Zahl?

13. Von einer Zahl ist das $\frac{3}{8}$fache nebst 13 eben so groß als das $\frac{4}{9}$fache nebst 8. Wie heißt die Zahl?

14. $4\frac{3}{5}$ m eines Stoffes kosten um $4\frac{1}{2}$ ℳ mehr als $3\frac{1}{4}$ m dieses Stoffes. Was kostet 1 m? [$= 3\frac{1}{3}$ ℳ]

15. 7 m eines Stoffes kosten um $2\frac{1}{2}$ ℳ mehr als 8 m eines um $\frac{2}{3}$ ℳ billigeren Stoffes. Wieviel ℳ kostet 1 m jeden Stoffes?

16. Eine Eierfrau gibt den Schilling (30 Stck.) Eier für 1 ℳ 25 ₰. Am nächsten Markttage hat sie einen Schilling Eier weniger, muß auch den Schilling für 1 ℳ 20 ₰ geben und nimmt deshalb um 1 ℳ 60 ₰ weniger ein. Wie viel Eier brachte sie auf den Markt? [= 8 Sch. das erstemal]

17. Das Dreifache einer Zahl ist ebensogroß als die um 10 vergrößerte Zahl. Wie heißt die Zahl?

18. Die Zahl 67 soll man in zwei Teile teilen, deren Unterschied 9 beträgt.

19. Aus der Summe s und der Differenz d zweier Zahlen soll man die Zahlen selbst bestimmen.

20. Wenn die Nacht $2\frac{1}{2}$ Stunden länger (kürzer) dauert als der Tag, wie lange dauert jedes und wann geht die Sonne auf?

21. Zwei Drittel einer Zahl sind um 7 kleiner als die um 5 verminderte Zahl. Wie heißt die Zahl? [= 36]

22. Man soll die Zahl 136 in drei Teile teilen, von denen der zweite um 8 größer als der erste, und der dritte um 9 größer ist als der zweite. [37, 45, 54]

23. Zieht man von einer Zahl ihr dreifünftelfaches ab, so ist der Rest um 14 kleiner, als ihr dreiviertelfaches. Wie heißt die Zahl?

24. Das arithmetische Mittel aus einer Zahl und einer 5mal größeren Zahl ist 21; wie heißt die Zahl? [= 7]

25. Nachdem einer $\frac{4}{7}$ des Weges zurückgelegt hat, hat er noch $\frac{1}{3}$ des Weges und noch $2\frac{1}{2}$ km zurückzulegen. Wie groß ist der Weg?

26. Um nach Hause zu kommen legt einer $\frac{2}{3}$ des Weges mit der Bahn, $\frac{1}{5}$ des Weges mit der Post und die letzten $7\frac{1}{2}$ km zu Fuß zurück. Wie weit hat er nach Hause? [$56\frac{1}{4}$ *km*]

27. Wenn Spiritus aus 7 Teilen Alkohol und 12 Teilen Wasser gemischt werden soll, wie viel Alkohol braucht man zu 120 l Spiritus? [44,21 *l*]

28. Ein Meister verspricht seinem Gesellen für jeden Tag, den er bei ihm arbeitet 80 ₰ Lohn; arbeitet er aber anderswo, so muß der Geselle ihm für die Kost 50 ₰ bezahlen. Nach 50 Tg. rechnen sie ab, und der Geselle erhält 21,8 ℳ Lohn. Wie viele Tage hat er demnach beim Meister gearbeitet? [= 36 Tg.]

29. Von 140 Stck. einer Ware wird ein Teil mit je 0,7 ℳ Gewinn, der Rest mit je 0,5 ℳ Verlust verkauft; im ganzen wurden aber doch 80 ℳ gewonnen; wie viele Stücke wurden mit Gewinn verkauft? [= 125 Stck.]

30. Nachdem einer $\frac{2}{5}$ seiner Barschaft für Schuhe, und $\frac{1}{4}$ derselben für einen Hut ausgegeben hatte, blieben ihm noch $10\frac{1}{2}$ ℳ. Wie viel hatte er anfangs? [30 ℳ]

31. Nachdem einer $\frac{3}{5}$ seines Wochengeldes für Essen und $\frac{2}{3}$ des Restes für Wohnung ausgegeben hatte, blieben ihm noch 8 ℳ; wie viel Wochengeld hatte er? [60 ℳ]

32. Den 3. Teil meiner jährlichen Einkünfte, sagte jemand, verwende ich auf Kost und Miethe, den 8. Teil auf Kleidung und Wäsche, und den 10. Teil auf Nebenausgaben und erspare dabei jährlich noch 318 Thaler? Wie groß sind seine Einkünfte? [720 Thl.]

33. Eine Bäuerin mußte von ihrem Markterlös 60 ₰ Marktgeld entrichten, verwandte $\frac{3}{5}$ des Restes auf Einkäufe und bringt noch 5 ℳ 20 ₰ nach Hause; wie viel löste sie? [13,6 ℳ]

34. Das 15fache einer Zahl ist um 7 größer, als ihr 11faches. Wie heißt die Zahl? [$\frac{7}{4}$]

35. Sieben Zwölftel von einer um 5 vergrößerten Zahl sind um 5 kleiner als die Zahl. Wie heißt die Zahl? [19]

36. Ein Bedienter erhielt von seinem Herrn jährlich 40 Thaler und eine Livree als Lohn. Nachdem er 5 Monate gedient hatte, nahm er seinen Abschied und erhielt, da er die Livree schon erhalten hatte, noch $6\frac{1}{6}$ Thl. an Geld. Wie hoch wurde die Livree gerechnet?

37. Von welcher Zahl ist das Drittel um 2 größer als das Viertel der um 12 vergrößerten Zahl? [60]

38. Das Achtel einer um 2 verkleinerten Zahl ist um $\frac{1}{2}$ größer als das Neuntel der um 2 vergrößerten Zahl. Wie heißt die Zahl?

39. Ein Körper verlor beim Trocknen $\frac{7}{9}$ seines Gewichtes; der Rest verlor beim Verbrennen noch $\frac{5}{6}$ seines Gewichtes; die Asche wog $1\frac{2}{3}$ g. Wie schwer war der Körper? [45 *g*]

40. Ein Vater ist 40 Jahre, sein Sohn 12 Jahre alt; nach

wieviel Jahren wird der Vater 3 mal, nach wieviel Jahren 4 mal älter sein als Sohn; vor wieviel Jahren war er 10 mal älter?

41. Teile ich eine Strecke im Verhältis 5 : 11, so ist der eine Teil um 12,3 *cm* kleiner als der andere; wie groß ist die Strecke? [32,8 *cm*]

42. Füge ich zu einer Strecke noch $4\frac{1}{2}$ *cm*, so verhält sie sich zur vergrößerten Strecke wie 9 : 11; wie groß ist die Strecke?

43. Nehme ich von einer Strecke $4\frac{1}{2}$ *cm* weg, so verhält sie sich zur verminderten Strecke wie 9 : 7. Wie groß ist die Strecke?

44. Wieviel darf ich von einer $19\frac{1}{2}$ *cm* langen Strecke wegnehmen, damit sie sich zur verringerten Strecke wie 13 : 11 verhalte?

45. In einer Gesellschaft befinden sich 3 mal so viele Herren als Frauen; als aber 8 Herren mit ihren Frauen fortgingen, befanden sich 5 mal mehr Herren als Frauen dort. Wie viel waren es?

46. Welche Zahl muß zu a addiert und von b subtrahiert werden, damit die Summe sich zur Differenz wie m : n verhalte?

47. Welche Zahl muß von a und b subtrahiert werden, damit die Differenzen sich wie m : n verhalten?

48. Eine Strecke von 38 *cm* ist in drei Teile so geteilt, daß der erste um 3 cm kleiner, der letzte um 2 *cm* größer ist als der mittlere. Wie groß ist jeder Teil? [10, 13, 15]

49. Die Zahl 5760 soll man in zwei Teile teilen, von denen der eine um 1000 größer ist als der andere. Man soll sie in drei Teile teilen, von denen der 1. um 500 größer ist als der 2. und der zweite um 500 größer ist als der dritte. Man soll sie in 5 Teile teilen, von denen der 1. und 5. um je 100 größer ist als der mittlere, während der 2. und 4. um je 50 kleiner ist als der mittlere. Wie groß sind in jedem Falle die einzelnen Teile?

50. Ein Meter ist in drei Teile so geteilt, daß der erste zum zweiten sich wie 3 : 5 verhält und der dritte um 9 *cm* größer ist als der zweite. Wie groß ist jeder Teil? [21, 35, 44]

51. Ein Meter ist in drei Teile geteilt, so daß sich der erste zum zweiten wie 9 : 10 verhält, und daß der dritte um 1 *cm* länger ist als $\frac{7}{5}$ des zweiten. Wie lang ist jeder Teil? [27, 30, 43]

52. Man soll 164 in fünf Teile teilen, von denen der 1. und 5. dreimal größer, resp. kleiner ist als der mittlere, während der 2. und 4. zweimal größer, resp. kleiner ist als der mittlere.

53. Füge ich zu einer Strecke noch ein Drittel dieser Strecke und noch 70 *cm*, so ist das Ganze um 2 *cm* länger als das Doppelte der gegebenen Strecke. Wie groß war die Strecke? [102]

54. Ersetzt man die Hälfte des Heues, das ein Pferd bekommen soll, durch Haber, indem man statt 3 ℔ Heu 2 ℔ Haber nimmt, so erhält das Pferd im Ganzen $8\frac{1}{3}$ ℔ Futter; wieviel Heu sollte es bekommen? [10 ℔]

55. Einen Stein, welcher $2\frac{1}{2}$ mal so schwer ist als ein zweiter

Stein, schlage ich in zwei Stücke, von denen das eine $11\frac{3}{8}$ ℔ wiegt, das andere $1\frac{3}{4}$ mal schwerer ist als der zweite Stein. Wieviel wiegt jeder Stein? [$37\frac{1}{12}$ ℔, $15\frac{1}{6}$ ℔]

56. Ein Grundbesitz umfaßt 315 *ha*; das Feld hat 15 *ha* mehr als der dritte Teil des Waldes, und die Wiesen haben 10 *ha* mehr als zwei Drittel des Feldes. Wieviel *ha* hat jede Gattung?

57. Ein Grundbesitzer hat 120 *ha* Feld und Wald zusammen; er tauscht den Wald gegen Feld ein, wobei er für je 7 *ha* Wald 3 *ha* Feld bekommt und hat nun 80 *ha* im Ganzen. Wieviel Wald hatte er anfangs? [70 *ha*]

58. Ein Grundbesitzer hat 180 *ha* Feld und Wald zusammen; er tauscht aber die Hälfte des Waldes gegen Feld ein, wobei er für 7 *ha* Wald 3 *ha* Feld bekommt und besitzt nun 140 *ha* im Ganzen. Wie viel Wald hat er jetzt? [70 *ha*]

59. Ein Grundbesitzer hat 124 *ha* Wald und Feld zusammen; er tauscht die Hälfte des Waldes gegen Feld, wobei er für 5 ha Wald 2 *ha* Feld bekommt; dann tauscht er $\frac{1}{3}$ seines jetzigen Feldes gegen schlechteres Feld, wobei er für 2 *ha* gutes 3 *ha* schlechtes Feld bekommt, und ist nun im Besitze von 110 *ha* im Ganzen. Wie viel *ha* Wald hatte er früher? [80 *ha*]

60. Ersetzt man bei Kornbrod $\frac{1}{3}$ des Kornmehles durch Waizenmehl, wobei man, um gleichen Preis zu erhalten, statt 4 ℔ Roggenmehl nur 3 ℔ Waizenmehl nimmt, so treffen auf jeden Leib um $\frac{1}{2}$ ℔ Mehl weniger. Wieviel Mehl traf zuerst auf den Leib?

61. Ersetzt man bei gemischtem Brod das Waizenmehl, das $\frac{1}{4}$ des Ganzen beträgt, durch Roggenmehl, wobei man, um gleichen Preis zu behalten, statt 3 ℔ Waizenmehl 4 ℔ Roggenmehl nimmt, so trifft auf den Leib Brod im Ganzen um $\frac{1}{3}$ ℔ mehr Mehl. Wieviel traf zuerst auf den Leib? [4 ℔]

62. Brod ist aus Roggen- und Waizenmehl im Verhältnis 4 : 3 gemischt; ersetzt man die Hälfte des Waizenmehles auch durch Roggenmehl, wobei man für 3 ℔ Waizenmehl 4 ℔ Roggenmehl nimmt, so enthält jeder Leib $\frac{1}{4}$ ℔ Mehl mehr. Wieviel enthielt er zuerst? [$3\frac{1}{2}$ ℔]

63. Gemischtes Brot besteht aus 2 Teilen Roggen- und 1 Teil Waizenmehl; nimmt man aber 1 Teil Roggenmehl und 2 Teile Waizenmehl, wobei man, um gleiche Preise zu behalten, für je 3 ℔ Roggenmehl 2 ℔ Waizenmehl nimmt, so muß 1 Leib um $\frac{1}{2}$ ℔ weniger Mehl haben. Wie viel Mehl hatte er zuerst? [4 ℔]

64. Subtrahiere ich 1 vom dritten Teit einer Zahl, subtrahiere dann vom vierten Teil des erhaltenen Restes wieder 1 und subtrahiere den 5. Teil dieses Restes von 1, so erhalte ich den 35. Teil der um 1 vergrößerten Zahl. Wie heißt die Zahl? [27]

65. Welche Zahl muß man zu jeder der vier Zahlen 10,

19, 14, 25 (oder 10, 11, 16, 19) hinzufügen, damit sie eine richtige geometrische Proportion bilden? [8; —7]

66. Addiere ich 1 zum vierten Teil einer um $\frac{1}{3}$ verminderten Zahl, und subtrahiere ich 1 vom 5. Teil der erhaltenen Summe, so erhalte ich den 33. Teil der um $3\frac{1}{3}$ verminderten Zahl. Wie heißt die Zahl? [$36\frac{1}{3}$]

67. Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß $\frac{3}{5}$ herauskommt, wenn ich von der Zahl $\frac{3}{5}$ subtrahiere, den Rest durch $\frac{3}{5}$ dividiere, davon noch $\frac{3}{5}$ subtrahiere und mit dem Rest in $\frac{3}{5}$ dividiere? [$\frac{39}{25}$]

68. Man soll eine Zahl a in drei Teile teilen, so daß der zweite m mal, der dritte n mal so groß ist als der erste. Wie groß sind die Teile?

69. An einer Arbeit sind zwei Arbeiter beschäftigt, der eine seit 24 Tagen, der andere seit 20 Tagen; an einer anderen ebenso beschaffenen Arbeit sind 3 Arbeiter seit bezüglich 14, 12, 7 Tagen beschäftigt. Nach wieviel Tagen wird die zweite Arbeit ebensoweit gefördert sein wie die erste, und vor wieviel Tagen war sie halbsoweit gefördert? [11; $5\frac{1}{2}$]

70. An einer Arbeit sind 3 Arbeiter seit 24 Tagen und 5 Arbeiter seit 20 Tagen beschäftigt. An einer gleichartigen Arbeit sind 4 Arbeiter seit 18 Tagen, 2 Arbeiter seit 15 Tagen und 6 Arbeiter seit 7 Tagen beschäftigt. In wieviel Tagen wird die zweite Arbeit ebensoweit gefördert sein als die erste? [7]

71. Von einem Flusse, der auf 100 *m* Länge um $\frac{2}{3}$ *m* fällt, wird ein Kanal abgezweigt, der auf 100 *m* Länge nur um 10 *cm* fällt. Wie lange muß der Kanal sein, damit schließlich sein Wasserspiegel um $2\frac{1}{2}$ *m* höher liegt als der des Flusses? [$441\frac{3}{17}$ *m*]

72. Wenn einer von einem Vorrat von 184 *kg* wöchentlich $3\frac{1}{2}$ *kg*, ein anderer von einem Vorrat von 149 *kg* wöchentlich $2\frac{2}{3}$ *kg* verbraucht, nach wieviel Wochen werden beide gleich viel übrig haben? [42]

73. Ein Bauherr zahlt seinen Arbeitern, von denen $\frac{3}{7}$ Maurer, $\frac{1}{3}$ Handlanger und der Rest Lehrlinge sind, täglich 87,8 *M* Lohn, Wenn nun ein Maurer täglich 2,8 *M*, ein Handlanger 2,1 *M* und eine Lehrbube 80 ₰ bekommt, wie viel Arbeiter hat er? [42]

74. Ein Kapitalist hat $\frac{1}{3}$ seines Vermögens zu $3\frac{1}{3}$ %, $\frac{3}{8}$ desselben zu 4 %, und den Rest zu 5 % angelegt und erhält im Ganzen jährlich 7325 *M* Zinsen. Wie groß ist sein Vermögen? [180000]

75. Wenn ich zu einer Zahl $5\frac{1}{2}$ addiere, die Summe durch $7\frac{3}{4}$ dividiere, den Quotienten von $4\frac{2}{7}$ subtrahiere und die so erhaltene Differenz durch $5\frac{2}{5}$ dividiere, so erhalte ich $\frac{4}{7}$; w. h. d. Z.? [$3\frac{4}{5}$]

76. Wenn ich zu einer Zahl addiere das 7fache der um 2 vergrößerten Zahl und die erhaltene Summe dividiere durch die Summe aus 4 und dem 8ten Teil der um 5 vergrößerten Zahl, so erhalte ich 17. Wie heißt die Zahl? [11]

77. Wenn ich von einer Zahl 1 subtrahiere, den Rest durch 2 dividiere, davon 2 subtrahiere, den Rest durch 3 dividiere und davon 3 subtrahiere, so erhalte ich 4. Wie heißt die Zahl? [47]

78. Subtrahiere ich von 18 das 5fache einer um 2 verminderten Zahl und dividiere ich die erhaltene Differenz durch die 4fache Summe aus dem 3fachen der Zahl und dem 4fachen der um 3 verminderten Zahl, so erhalte ich $\frac{7}{8}$. W. h. d. Z.? [4]

79. Wenn ich die Summe aus dem 3fachen der um 4 verminderten Zahl und dem 5fachen der um 2 vergrößerten Zahl dividiere durch die 6fache Differenz aus dem 3fachen der um 2 vergrößerten Zahl und dem 4fachen der um 3 verminderten Zahl, so erhalte ich $\frac{7}{11}$. Wie heißt die Zahl? [7]

80. Zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 3; nehme ich aber von der größeren 12 und lege es zur kleineren, so kehrt sich das Verhältnis um. Wie heißen diese Zahlen? [24,36]

81. Wenn ich die 3fache Differenz aus einer Zahl und dem 4fachen der um $1\frac{1}{2}$ verminderten Zahl dividiere durch die Summe aus 33 und der 4fachen Differenz aus der 3fachen Zahl und dem 5fachen der um $2\frac{1}{2}$ vergrößerten Zahl, so erhalte ich $\frac{3}{10}$; wie heißt die Zahl? [$3\frac{1}{2}$]

82. Wie groß ist die Zahl, welche um ebensoviel kleiner ist als das arithmethische Mittel aus ihr und einer (größeren) Zahl a, als sie selbst größer ist, als das arithmetische Mittel aus ihr und einer (kleineren) Zahl b? [$\frac{1}{2}$ (a+b)]

83. Zwischen zwei Zahlen a und b ($a > b$) soll eine neue Zahl so eingeschaltet werden, daß sie um ebensoviel von a verschieden ist, als sie selbst vom arithmetischen Mittel aus ihr und b verschieden ist. [$\frac{1}{3}$ (2a+b)]

84. Zu den Zahlen a, b, c ($a > b > c$) soll man eine vierte Zahl so suchen, daß sie um ebensoviel kleiner ist als das arithmetische Mittel aus ihr und a, als sie selbst größer ist als das arithmetische Mittel aus b und c. [$\frac{1}{3}$ (a+b+c)]

85. Zu drei Zahlen a, b, c ($a > b > c$) soll man eine vierte Zahl so suchen, daß das arithmetische Mittel aus ihr und a um ebensoviel von b absteht, als b vom arithmetischen Mittel aus ihr und c absteht. [$\frac{1}{2}$ (4b—a—c)]

86. Ein Arbeiter fertigt a Stck. in m Std; ein zweiter liefert b Stck. in n Std., ein dritter c Stck. in o Std. In welcher Zeit liefern sie zusammen s Stck.?

87. Ein Bauer hatte zwei Taglöhner, welche für gleichen Lohn bei ihm arbeiteten; dem einen gab er einmal für 56 Tage 4 Schäffel Roggen und 14 Thaler Geld, dem anderen für 84 Tage $7\frac{1}{2}$ Schäffel Roggen und $17\frac{1}{4}$ Thaler. Wie hoch wurde das Schäffel Roggen gerechnet? [$2\frac{1}{2}$ Thlr.]

88. Von zwei Arbeitern würde der eine eine Arbeit in

18 Std., der andere in 22 Std. fertig bringen; wann werden sie damit fertig, wenn sie gemeinsam arbeiten? [9,9 Tg.]

89. Mit einer Arbeit würde ein Arbeiter in 20 Tg. fertig; hilft ihm ein anderer, so werden sie in 12 Tg. fertig; wann würde der zweite allein fertig, und wie ist infolge dessen der gemeinsame Verdienst von 55,2 ℳ unter sie zu teilen? [30 Tg.]

90. Ein Futtervorrat hätte für eine Kuh noch 50 Tage ausgereicht; da aber noch ein Ochse dazu kam, der noch dazu täglich um 1 ℔ mehr bekommt als die Kuh, so ist der Vorrat schon in 24 Tg. zu Ende. Wie groß war der Vorrat? [600 ℔]

91. Um mit einem Futtervorrat, der noch für 18 Wochen ausreicht, 9 Wochen länger zu reichen, muß der Bauer zwei Ochsen weggeben. Wie viel Ochsen hatte er? [6]

92. Zu einer Arbeit würde ein Arbeiter 36 Tage, ein zweiter 38 Tage brauchen; da sie aber zusammen arbeiten und noch ein dritter mithilft, der täglich 5 Stck. mehr fertigt als der zweite, so sind sie schon in 12 Tg. fertig. Wie viele Stücke waren zu machen?

93. Zu einer Arbeit würde ein Arbeiter 13 Tg. brauchen; da ihm aber zwei Arbeiter helfen, von denen der eine täglich 2 Stck., der andere täglich 3 Stck. mehr fertigt als er selbst, so ist die Arbeit schon in 4 Tg. fertig; wie viele Stücke waren es? [260]

94. Zu einer Arbeit braucht man 12 Tage; nimmt man aber einen Arbeiter weniger, so braucht man 16 Tage. Wie viele Arbeiter waren es? [4]

95. Mit einer Arbeit würde ein Arbeiter in 30 Tagen fertig; nachdem er 5 Tag gearbeitet hat, bekommt er einen Gehülfen, wodurch die Arbeit in den folgenden 13 Tagen fertig wird. Wie lange hätte der 2. Arbeiter allein gebraucht? [$32\frac{1}{2}$ Tg.]

96. Zu einer Arbeit hat ein Arbeiter früher 19 Tage gebraucht; da nun doppelt so viele Stücke bestellt werden und die Bestellung pressiert, so wird ihm noch ein Arbeiter, der täglich um 4 Stck. mehr fertigt, und noch ein Lehrbube, der täglich halb so viel als der zweite Arbeiter fertigt, beigegeben, und diese drei werden nun in 15 Tg. fertig. Wie viele Stücke waren zu machen?

97. Ein Knabe erhielt von seiner Mutter noch so viel Geld als er schon hatte, vernaschte davon 10 ₰, erhielt dann von seinem Vater noch so viel als er jetzt hatte, und hatte nun doppelt so viel Geld als er zuerst gehabt hatte. Wie viel hatte er anfangs?

98. Ein Knabe legte seine Nüsse in Form eines vollen Quadrates; da ihm aber hiebei 59 Nüsse übrig blieben, machte er die Seite des Quadrates um 2 Nüsse größer, doch fehlten im nun 13 Nüsse; wie viele Nüsse hatte er? [348]

99. In einem Fasse habe ich eine gewisse Quantität Wasser; ich möchte noch ebensoviel hinzuthun, als schon darin ist, muß aber 15 *l* heraußen lassen, da das Faß voll geworden ist. Das volle

Faß entleere ich zur Hälfte, füge noch 15 *l* hinzu und finde, daß ich nun um $\frac{1}{4}$ mehr im Faße habe als anfangs. Wieviel hatte ich anfangs darin? [30 *l*]

100. Von einem Vorrat Rüben, der für einen Ochsen auf 100 Tg., für eine Kuh auf 80 Tg. reichen würde, füttert man einen Ochsen und zwei Kühe und gibt zudem noch einem Schwein täglich 6 ℔; hiebei reicht aber der Vorrat nur 25 Tage; wie groß war er? [1200 ℔]

101. 2 Meister, 8 Gesellen und 12 Handlanger erhalten zusammen 58 ℳ 80 ₰; wenn nun ein Meister 1,20 ℳ mehr bekommt als ein Geselle, und dieser 80 ₰ mehr als ein Handlanger, wie viel bekommt dann jeder? [4,2 ℳ d. Meister]

102. Als mit einem Sack voll Samen 160 *a* besät wurden, blieben 12 *l* Samen über; aber für einen anderen Acker von 195 *a* fehlten noch 16 *l*. Wie viele Liter faßte der Sack? [140 *l*]

103. Zwischen den Punkten A und B, deren Abstand = a, liegt ein Punkt C, so daß CB = b; man soll auf der Verlängerung von AB jenseits B einen Punkt D so finden, daß er die Strecke AB in demselben Verhältnis äußerlich teilt, wie C die Strecke AB innerlich teilt. (Welche Lage hat D, wenn $b > \frac{1}{2}a$?) $\left[BD = \frac{ab}{a-2b}\right]$

---

104. Geht einer in 4″ 5 *m*, so werden ihm nach einer gewissen Zeit noch 400 *m* zum Ziele fehlen; geht er aber in 3″ 4 *m*, so wird er nach derselben Zeit noch $2\frac{1}{2}$ Minuten zum Ziele haben. Wie weit ist sein Ziel entfernt? [3400 *m*]

105. Indem ich einen Berg hinansteige, lege ich alle 3″ 2 *m* zurück; beim Herabsteigen lege ich in 2″ 3 *m* zurück und bin, obwohl ich einen um 120 *m* längeren Weg einschlage, doch in der halben Zeit unten. Wie lang ist der Weg? [960 *m*]

106. Das Vorderrad eines Wagens hat a *m*, das Hinterrad hat b *m* Umfang. Wie lang ist eine Wegstrecke, auf welcher das Vorderrad n Umläufe mehr macht als das Hinterrad?

107. Von zwei Orten A und B, deren Entfernung $66\frac{1}{2}$ *km* beträgt, gehen zwei Boten, von denen der eine in der Stunde 5 *km*, der andere $4\frac{1}{2}$ *km* zurücklegt, einander entgegen. Wann und wo treffen sie sich? [Nach 7 Std.]

108. Von zwei Orten A und B, deren Entfernung 250 *m* beträgt, bewegen sich zwei Körper mit den Geschwindigkeiten von $1\frac{1}{2}$ *m* und $1\frac{1}{3}$ *m* einander entgegen; wann wird ihr Abstand nur mehr 46 *m* betragen, und wann wird er, nachdem sie an einander vorbeigegangen sind, wieder 46 *m* betragen? [nach 72″, $104\frac{8}{17}$″]

109. Zwei Körper, deren Abstand 20 *m* beträgt, laufen in derselben Richtung hinter einander; der vorangehende legt in 4″ 3 *m*, der folgende in 6″ 5 *m* zurück; nach welcher Zeit wird ihr

Abstand nur mehr 12 *m* betragen, nach welcher Zeit wird der zweite den ersten eingeholt, und wann um 10 *m* überholt haben?

110. Ein Dampfschiff legt stromaufwärts in je 5″ 7 *m* zurück, und hat unterwegs 10 Minuten Aufenthalt; beim Abwärtsfahren legt es in jeder Sekunde 3 *m* zurück, hat auch 10 Minuten Aufenthalt und ist doch nur 2mal weniger lang unterwegs (Aufenthalt eingerechnet) als aufwärts. Wie lang ist es unterwegs?

111. Ein Postwagen fährt von A nach B und macht 8 *km* in jeder Stunde. $1\frac{1}{2}$ Std. nach seinem Abgang geht ein Fußgänger von B nach A und macht $4\frac{1}{2}$ *km* in der Stunde. Wann und wo treffen sich beide, wenn die Entfernung $AB = 53\frac{2}{3}$ *km* ist?

112. Einem Wagen, der in jeder Stunde $6\frac{2}{3}$ *km* macht, wird $1\frac{3}{4}$ Std. nach seiner Abfahrt ein Reiter nachgeschickt, der in jeder Stunde $7\frac{5}{6}$ *km* macht. Wann wird der Reiter den Wagen einholen?

113. Einem Körper, der 7 *m* in der Minute zurücklegt, wird 12 Minuten nach seinem Abgang ein zweiter nachgesandt, der 11 *m* in jeder Minute macht. Wann wird er den ersten einholen, wann wird er bis auf 12 *m* nahe gekommen sein und wann wird er ihn um 20 *m* überholt haben? [21′, 18′, 26′]

114. Zwei Kreise von den Radien 50 *cm* und 20 *cm* bewegen sich auf einander zu, indem ihre Mittelpunkte auf der die Mittelpunkte verbindenden Geraden mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortrücken, und zwar legt der erste in 2″ $3\frac{1}{2}$ *m*, der zweite in 4″ 5 *m* zurück. Ihr anfänglicher Mittelpunktsabstand beträgt 170 *cm*. Wann werden sie sich zum erstenmale von außen, wann von innen berühren, wann werden sie sich zum zweitenmale von innen und außen berühren? Wo befinden sich jedesmal ihre Mittelpunkte?

115. Ein Schiff verläßt seinen $7\frac{1}{2}$ Seemeilen von der Küste entfernten Ankerplatz und legt in jeder Stunde 8 Seemeilen zurück. Eine Stunde nach seinem Abgang wird ihm von der Küste aus ein Aviso nachgeschickt, der in der Stunde $10\frac{1}{4}$ Seemeilen macht; wann wird er das Schiff bis auf 2 Seemeilen eingeholt haben?

116. Einem Fußgänger wird eine Stunde nach seinem Abgang ein anderer Fußgänger nachgesandt, welcher in der Stunde um $\frac{11}{15}$ *km* mehr zurücklegt und den ersten nach 5 Std. einholt. Wie viel *km* legt jeder in 1 Std. zurück? [$3\frac{2}{3}$ km d. erste.]

117. Ein Körper, der in jeder Minute 65 *m* zurücklegt, hat einen vorangehenden, der in der Minute 53 *m* zurücklegt, in 22 Min. bis auf 18 *m* eingeholt; wie groß war anfangs ihr Abstand und wann werden sie beisammen sein? [282 m; nach $19\frac{1}{2}$ Min.]

118. Um 5 Uhr Morgens geht ein Fußgänger von A nach B, macht in jeder Stunde 4 *km* und ruht unterwegs 1 Std. aus. 12 Min. vor 11 Uhr folgt ihm ein Radfahrer, der den Kilometer in 3 Minuten zurücklegt und trifft zu derselben Zeit in B ein. Wie weit ist von A nach B? [24 km]

119. Zwei Wanderer gehen von den Orten A und B einander entgegen, der eine würde den Weg in 9 (s) Stunden, der andere in $7\frac{1}{5}$ (s') Stunden zurücklegen. Wann und wo begegnen sich sich? [nach 4 Std.]

120. Ein Postzug fährt um 11^h 10 von A und kommt um 4^h 30 Nachm. nach B. Ein Eilzug fährt um 11^h 35 in B und kommt um 3^h nach A. Wann kreuzen sie sich? [1^h 30 ca.]

121. Ich fahre um 9^h mit dem Postzug von A nach B, kreuze unterwegs den um $9^h\,20^m$ von B abgegangenen Eilzug um 10^h 10 und treffe um 11^h 50 in B ein; wann wird der Eilzug in A eingetroffen sein? [10^h 45]

122. Ein Bote geht von einem Orte A fort und macht in b Stunden c Meilen; d Stunden nach seinem Abgang wird ihm von einem um e Meilen rückwärts (vorwärts) gelegenen Orte B ein anderer Bote nachgesandt, welcher in f Stunden g Meilen macht. Wann holt der zweite den ersten ein? Wie viele Meilen (anstatt g Meilen) muß der zweite machen, um den ersten in t Stunden einzuholen?

123. Zwei Wagen fahren von den Orten A und B einander entgegen; der erste macht in 3 Stunden 5 Meilen, der andere in 4 Stunden 9 Meilen. Da der zweite eine Stunde später fortgeht als der erste, so treffen sie sich gerade in der Mitte. Man berechne hieraus die Entfernung von A nach B. [$12\frac{6}{7}$ Meilen]

124. Zwei Körper laufen zu derselben Zeit von den Punkten A und B in derselben Richtung; der folgende legt in jeder Minute m Meter mehr zurück und hat den vorangehenden in t Minuten bis auf p Meter eingeholt. Wie groß war die anfängliche Entfernung?

125. Ein Dampfschiff fährt stromaufwärts von A nach B und macht in jeder Stunde $4\frac{1}{2}$ *km*. Nachdem es 6 *km* zurückgelegt hat, fährt ein anderes Dampfschiff von B nach A, macht stündlich $8\frac{1}{3}$ *km* und langt $6\frac{1}{3}$ Std. früher in A an, als das erste in B. Wie lange braucht es und wie weit ist von A nach B?

126. Ein Postwagen, der alle Stunden $10\frac{2}{3}$ *km* zurücklegt, und ein Fußgänger, der in der Stunde 4 *km* macht, gehen gleichzeitig von A nach B. Der Fußgänger trifft nach 9 stündigem Marsch den wieder von B zurückkehrenden Postwagen und erfährt vom Kutscher, daß er sich 3 Std. in B aufgehalten hat. Wie weit ist A von B entfernt und wie lange muß der Fußgänger noch marschieren? [50 km; noch $3\frac{1}{2}$ Std.]

127. Ein Fußgänger geht von A um 8^h fort nach B, trifft um $10\frac{1}{2}^h$ den von B kommenden Postwagen und erfährt von dessen Kutscher, daß er um $8\frac{1}{2}^h$ von B fortgefahren sei und um 12^h in A sein müsse. Wie viel Rast darf sich der Fußgänger noch gönnen, wenn er Nachmittags 3^h in B sein will? [$1\frac{1}{6}$ Std.]

128. Zwei Körper bewegen sich von demselben Punkte aus

hinter einander auf der Peripherie eines Kreises. Der vorangehende durchläuft die Peripherie in m Zeiteinheiten, der folgende in m' Zeiteinheiten; wann werden sie beisammen sein, wann und wo werden sie einander gerade gegenüber stehen?

129. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises; der vorangehende, der schon um $\frac{1}{4}$ der Kreisperipherie voran ist, durchläuft den Kreis in 12 Zeiteinheiten, der folgende in 15 Zeiteinheiten; wann wird der vorangehende (raschere) den folgenden bis auf $\frac{1}{4}$ der Kreisperipherie eingeholt haben? [nach 30 Zeiteinh.]

130. Zwei Körper bewegen sich hinter einander auf der Peripherie eines Kreises, welcher m Meter mißt. Anfangs stehen sie, im Bogen gemessen, d m von einander ab; der erste macht c m, der zweite c′ m in der Sekunde. Wann werden die Körper zum erstenmal, zweitenmal u. s. w. zusammentreffen? Wann, wenn der erste t″ früher sich zu bewegen anfängt? Wann, wenn der erste t″ später sich zu bewegen anfängt? Wann, wenn in jedem dieser drei Fälle die Körper sich gegen einander bewegen?

131. Zwei Körper A und B bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises. A geht voran, B, der um $\frac{1}{4}$ der Peripherie hinter ihm ist, legt in 15 Tagen die ganze Peripherie zurück und ist dem A in 40 Tagen bis auf $\frac{1}{12}$ der Peripherie nachgekommen; wie lange braucht also A zu einem Umlauf? [16 Tg.]

132. Ein Dampfschiff fährt stromaufwärts mit der Geschwindigkeit von $1\frac{1}{3}$ Meilen; ein anderes fährt ihm $3\frac{1}{3}$ Std. später entgegen mit einer Geschwindigkeit von $2\frac{1}{4}$ Meilen. Als sie sich trafen, zeigte sich, daß der erste zweimal so viel Weg zurückgelegt hatte als das zweite. Wann und wo geschah die Begegnung?

133. Von drei Körpern, welche sich gleichförmig und in derselben Richtung, wobei A vorangeht, auf der Peripherie eines Kreises bewegen und um je $\frac{1}{6}$ der Peripherie von einander abstehen, macht A in 18, B in 24, C in 15 Tg. einen Umlauf. Wann wird C gerade in der Mitte von A und B sein? Wie stellt sich die Lösung, wenn sich C hiebei in entgegengesetzter Richtung bewegt? [$13\frac{11}{13}$ Tg., $6\frac{42}{83}$ Tg.]

134. Von drei Körpern A, B, C, welche sich gleichförmig hinter einander auf der Peripherie eines Kreises bewegen, und um je $\frac{1}{6}$ der Kreisperipherie von einander abstehen, macht A in 30, B in 48 Tagen einen Umlauf, und C steht nach 16 Tg. gerade zwischen A und B; wie lange braucht C zu einem Umlauf? [$23\frac{17}{41}$]

135. Drei Körper A, B, C bewegen sich hinter einander; der vorangehende C legt in jeder Minute 20 m, der folgende B 17 m, der letzte A 24 m zurück; wann wird A gerade in der Mitte zwischen B und C sein, und wann wird A so weit vor C sein, als dieser vor B sein wird, wenn zu Anfang der Bewegung A 20 m hinter B und dieser 30 m hinter C war? Wann wird

A die Entfernung von B und C innerlich so teilen, wie er sie anfangs äußerlich teilte? [$6\frac{4}{11}$; 80; $4\frac{28}{43}$″]

136. Drei Körper A, B, C bewegen sich hinter einander. Voran geht B, der 18 *m* vor A ist; der folgende C, der 15 *m* vor A ist, hat die Geschwindigkeit 9 *m*; der letzte A hat die Geschwindigkeit 10 *m*; welche Geschwindigkeit muß B haben, damit es nach 7″ gerade zwischen A und C ist? [8 *m*]

137. Zwei Körper, deren Geschwindigkeiten sich wie m : n verhalten, bewegen sich von einem Orte aus in derselben Richtung, der zweite um 3 Minuten später; wann holt der zweite den ersten ein?

138. Vom Punkte C aus liegen nach rechts und links die Punkte A und B in den Entfernungen von 180 und 131 *m*; beide bewegen sich gegen C hin mit den Geschwindigkeiten von 4,2 resp. 3,6 *m*; wie rasch und in welcher Richtung muß sich C bewegen, damit er nach 35″ gerade in der Mitte zwischen A und B stehe?

139. Ein Hase, den ein Hund verfolgt, hat 90 (50) Sprünge voraus und macht 5 (6) Sprünge, während der Hund 4 (5) macht; doch betragen 7 (9) Hasensprünge an Länge nur ebensoviel als 5 (7) Hundesprünge. Wieviele Sprünge muß der Hund noch machen, um den Hasen einzuholen? [600]

140. Ein Arbeiter, der täglich 8 Stunden arbeitet, hat schon $3\frac{1}{2}$ Tg. gearbeitet, als sich ihm ein anderer beigesellt, der nicht blos täglich 1 Std. mehr arbeitet, sondern auch geschickter ist, da er 8 Stck. fertigt, bis der erste 7 fertigt. Wann wird der zweite ebensoviel gearbeitet haben als der erste? [$12\frac{1}{4}$ Tg.]

141. Ein Fußgänger A will seinen Freund B, der a Meter Vorsprung hat, einholen; wo wird das geschehen, wenn die Schritte des A und B sich hinsichtlich ihrer Größe wie $l_1 : l_2$ und hinsichtlich ihrer Anzahl (in gleichen Zeiten) wie $n_1 : n_2$ verhalten?

142. Eine Lieferung von 1460 Stck. soll von zwei Arbeitern gefertigt werden. Der erste bringt in den ersten 6 Tagen à $8\frac{1}{2}$ Std. 85 Stck., der andere, der 2 Tg. später anfängt, in den folgenden 4 Tagen à 9 Std. 63 Stck. fertig; in wieviel Tagen von da an werden sie fertig, wenn beide von jetzt an täglich 9 Std. arbeiten?

143. Aus zwei Röhren, deren Querschnitte sich wie 5 zu 13 verhalten, fließt Wasser mit Geschwindigkeiten, die sich wie 8 : 7 verhalten; wenn nun in einer gewissen Zeit aus der einen (welchen?) Röhre um 561 *l* weniger flossen als aus der anderen, wieviel gab jede Röhre? [440 *l* die erste]

144. Ein Wasserbehälter, der 500 *l* faßt und zur Hälfte voll ist, soll durch eine Röhre gefüllt werden, welche in 4 Min. 37 *l* liefert. 7 Min., nachdem diese geöffnet ist, wird eine zweite Röhre geöffnet, durch welche in 5 Min. 32 *l* ausfließen. Wann wird der Behälter voll? [72′

145. Ein Wasserbehälter, der schon $\frac{1}{6}$ voll ist, wird durch zwei Röhren gefüllt, von denen die eine den leeren Behälter in 45 Std., die andere in 40 Std. füllen würde; die zweite wird aber erst 3 Std. später geöffnet; wann wird der Behälter bis auf das letzte Fünftel voll sein? [15 Std.]

146. Wann wird ein Wasserbehälter voll durch gleichzeitiges Fließen von drei Röhren, von denen die erste in a, die zweite in b, die dritte in c Std. den Behälter füllen würde? Wie heißt die Lösung, wenn 4 Röhren ihn füllen, welche ihn einzeln in den Zeiten a, b, c, d füllen würden?

147. Fließen in einen Wasserbehälter in je 3 Min. 28 *l*, so ist er in einer gewissen Zeit bis auf 20 *l* gefüllt; fließen aber gleichzeitig noch in je 5 Min. 70 *l* dazu, so sind schon in der halben Zeit 50 *l* übergelaufen. Wie lange braucht der Behälter zur Füllung durch jeden Zufluß allein, und wie lange durch beide zusammen? [30′, 15′, 10′]

148. Vater und Sohn gehen in die Wette von A nach B; der Vater macht aber einen um $\frac{1}{6}$ größeren Weg, und macht nur 7 Schritte, während der Sohn 8 macht; da aber 2 Schritte des Vaters ebensolang sind als 3 des Sohnes, so langte er in B an, als der Sohn noch um 200 seiner Schritte davon entfernt war. Wieviel Schritte machte jeder? [1400 d. V., 1600 + 200 d. S.]

149. A schöpft mit seiner um $\frac{1}{4}$ größeren Kanne 5 mal, während B 7 Kannen schöpft, hat aber schon 20 Kannen geschöpft als B anfing, und deshalb mußte B, als A aufhörte, noch 7 Kannen schöpfen, bis er ebensoviel Wasser hatte als A. Wieviel Kannen hat jeder geschöpft? [A 140, B 175]

150. Zwei Knechte beackern zwei Felder von gleicher Breite; der eine hat Pferde und macht auf seinem um $\frac{1}{6}$ längeren Acker 4 Längsfurchen, während der andere mit seinen Ochsen (auf seinem kürzeren Acker) nur 3 Furchen macht. Da der erstere schon 10 Furchen gezogen hatte, als der andere anfing, so wurde er früher fertig und half deshalb dem anderen, indem er auf dessen Acker noch 21 Furchen zog; so hörten sie zugleich auf. Wieviele Furchen hat jeder gezogen?

151. Zwei Knechte beackern zwei Felder von gleicher Länge, der eine mit Ochsen, der andere mit Pferden; der mit den Pferden hatte schon 10 Längsfurchen gezogen, als der andere anfing, und macht 5 Furchen, während der andere 3 macht. Obwohl nun der mit den Pferden ein um $\frac{1}{3}$ breiteres Feld zu beackern hat, wird er doch früher fertig und hilft deshalb dem anderen, indem er auf dessen Feld noch 12 Furchen zieht. Da damit auch das zweite Feld beackert ist, hören sie gleichzeitig auf. Wieviele Furchen zog jeder?

152. Mit einem gewissen Futtervorrat reichten 15 Militärpferde in der Garnison eine gewisse Zeit lang; als im Manöver die Pferdezahl auf 24 erhöht und die Ration um $\frac{1}{3}$ reichlicher ge-

macht wurde, blieben von einem $2\frac{1}{3}$mal größeren Vorrat in derselben Zeit nur 63 Manöverrationen übrig. Wie lang war diese Zeit?

153. Ein Wasserbehälter, der 1400 *l* faßt, soll durch eine Röhre gefüllt werden, die in 9 Min. 64 *l* liefert; 3 Min., nachdem diese Röhre geöffnet wurde, wird eine andere Röhre geöffnet, durch welche in 7′ 20 *l* ausfließen; wann wird der Behälter voll sein, und wann wird er voll, wenn die zweite Röhre erst dann sich öffnet, wenn der Behälter durch die erste halb gefüllt ist?

154. Wenn ein Behälter durch eine Röhre in 7 Std., durch eine andere in 11 Std. gefüllt wird, wann wird er voll, wenn beide Röhren zugleich fließen, die zweite aber eine Stunde später geöffnet wird? [$4\frac{2}{3}$ St. nach d. 1.]

155. Ich steige einen Berg hinauf, ruhe oben 18 Minuten aus, steige auf einem um 1100 kürzeren Weg wieder herab und komme nach 2 Std. unten an. Wenn ich nun beim Hinaufsteigen den Kilometer in 20 Minuten, beim Hinabsteigen in 12 Minuten zurücklege, wielange ist der Weg hinauf? [3,6 *km*]

156. Zwei Körper A und B bewegen sich von einem Punkte M aus nach entgegengesetzten Richtungen. B legt in 3″ um 2 *m* mehr zurück als A in derselben Zeit, und befindet sich, wiewohl er seine Bewegung um 2 Minuten später beginnt als A, doch schon 10 Minnten nach seinem Abgang um 160 *m* weiter von M als A. Mit welcher Geschwindigkeit bewegte sich jeder Körper?

157. Zwei Körper bewegen sich von A nach B; der erste macht alle 3″ 2 *m* mehr als der zweite und erreicht in 7 Min. das Ziel, während der zweite nach 8 Min. noch 140 *m* vom Ziel entfernt ist; wie groß ist die Strecke AB und die Geschwindigkeit jedes Körpers? [3 *m*, $2\frac{1}{3}$ *m*; AB = 1260 *m*]

---

158. Zwei Größen, deren Summe = s (Differenz = d), stehen aus irgend welcher Ursache im Verhältnis m : n; wie groß sind sie?

159. Zwei Größen, deren Summe = s (Differenz = d) stehen infolge einer Ursache im Verhältnis m : n und infolge einer andern Ursache, welche die Wirkung der ersten nicht stört, im Verhältnis m′ : n′; wie groß ist jede Größe?

160. Zwei Arbeiter, deren Geschicklichkeit im Verhältnis a : b steht (der eine macht a Stck., während der andere b macht) und deren Ausdauer im Verhältnis c : d steht (der eine arbeitet täglich nc Std., der andere nd Std.), fertigen in einer gewissen Anzahl von Tagen s Stck. (verdienen zusammen m ℳ); wieviel trifft davon auf jeden?

161. Drei Kaufleute vereinigen sich zu einem Geschäft, A legt 1200, B 800, C 600 ℳ ein; A läßt sein Geld 8, B 10, C 14

Monate im Geschäft stehen. Sie gewinnen 500 Thaler; wieviel gebührt jedem? [184,61; 153,85; 161,54]

162. Es sollen 12500 ℳ unter 5 Personen so verteilt werden, daß B $1\frac{1}{4}$mal so viel als A und 130 ℳ, C $\frac{2}{3}$ vom Anteil des B weniger 170 ℳ, D die Hälfte von A und die Hälfte von C und 150 ℳ, E um 155 ℳ weniger erhält als A; wieviel erhält jeder? [A = 2500 ℳ]

163. Drei Personen teilen eine gewisse Summe, so daß B $\frac{3}{4}$ vom Anteil des A und noch 10 ℳ, C $\frac{1}{3}$ vom Anteil des A und vom Anteil des B und noch 20 ℳ erhält und damit ebensoviel hat als B. Wie groß war die ganze Summe? [220 ℳ]

164. Eine Summe von 4800 ℳ soll unter 3 Personen so verteilt werden, daß B $\frac{3}{4}$ von A und noch 10 ℳ, C um 60 ℳ mehr als das Mittel vom Anteil des A und B bekommt. Wieviel bekommt jeder? [A = 1800 ℳ]

165. 5 Personen teilen 659 ℳ. B erhält die Hälfte von A und 40 ℳ, C $\frac{4}{5}$ von B, D ein Drittel von A, B und C weniger 10 ℳ, E die Hälfte von B und C; wieviel erhält jeder?

166. Man soll 442 in zwei Teile teilen, die sich wie 5 : 8 verhalten. [170, 272]

167. Man teile 667 in drei Teile, die sich wie 7 : 9 : 13 verhalten. [161, 207, 299]

168. Man soll 4200 in 4 Teile teilen, die sich wie 6 : 8 : 11 : 15 verhalten. [630, 840, 1155, 1575]

169. Man soll 533 in 5 Teile teilen, die sich wie 4 : 5 : 9 : 10 : 13 verhalten. [52, 65, 117, 130, 169]

170. 438 Mann sollen in drei Ortschaften einquartiert werden und zwar entsprechend deren Einwohnerzahlen, nämlich 653, 521, 840 Einwohner; wieviel Mann treffen auf jede Ortschaft?

171. Wieviel Liter Spiritus von 70 % und 45 % muß man nehmen, um 15 *l* à 60 % zu bekommen? [9 *l* à 70 %]

172. Zwei Brüche, von denen der eine 2x + 3, der andere 3x + 2 als Nenner hat, geben addiert $\frac{12x+13}{(2x+3)(3x+2)}$. Man suche die Zähler?

173. In einer Stadt befinden sich 4mal soviel Kaufleute als Beamte und doppelt soviele Handwerker als Kaufleute, im Ganzen 585; wieviel von jeder Gattung sind es? [45 Beamte.]

174. Die Anzahl der klaren Tage verhält sich zur Anzahl der trüben Tage wie 4 : 3, während die Anzahl der Tage mit wechselnder Bewölkung 4mal größer ist als die Summe der klaren und trüben Tage. Wieviel klare und trübe Tage hat das Jahr?

175. Drei Zahlen, von denen die zweite um 15 größer ist als die erste, verhalten sich wie 15 : 20 : 24; wie heißen die Zahlen?

176. Vier Zahlen, von denen die erste um 28 kleiner ist als die zweite, verhalten sich wie 18 : 22 : 27 : 35. Wie heißen die Zahlen? [126, 154, 189, 245]

177. Wie heißt eine Zahl, deren Quadrat um 95 kleiner ist als das Quadrat der um 5 vergrößerten Zahl? [7]

---

178. Ein Kapital ist bei $3\frac{1}{2}$ % Zinsen in $3\frac{2}{3}$ Jahren auf 6465,35 ℳ angewachsen; wie groß war es zuerst? [5730 ℳ]

179. 11400 ℳ sind in 4 Jahren mit den Zinsen ebenso hoch angewachsen, als 11020 ℳ in 5 Jahren; zu wieviel Prozent waren sie ausgeliehen? [4 %]

180. 3720 ℳ tragen in 11 Monaten denselben Zins wie 2170 ℳ in einem Jahre. Zu wieviel Prozent war jedes ausgeliehen, wenn der Zinsfuß des letzteren um 2 größer ist als der des ersteren? [$3\frac{1}{2}$ % d. erste]

181. Es gibt jemand 5500 ℳ Kapital auf Zinsen zu 4 %; $4\frac{1}{2}$ Jahre nachher ein anderes Kapital von 8000 ℳ zu 5 %. Wenn er nun beide auf Zinsen stehen läßt, in wieviel Jahren wird er von jedem gleichviel Zins bezogen haben? [In $5\frac{1}{2}$ weiteren J.]

182. 8240 ℳ werden zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen; 2 Monate später werden 8300 ℳ auch zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen. Wann werden die Summen aus jedem Kapital und seinen Zinsen gleich groß sein?

183. Von einem Kapital, das sich zu 8 % verzinst, nimmt einer am Ende des ersten Jahres 600 ℳ weg, läßt das übrige im nächsten Jahre wieder auf Zinsen stehen, nimmt wieder 600 ℳ weg und hat doch noch 2080 ℳ mehr als anfangs. Wieviel hatte er anfangs? [20000 ℳ]

184. Es hat einer eine gewisse Summe in einem Geschäfte stehen und nimmt damit Anteil am Gewinn von 10 %. Den Gewinn läßt er im nächsten Jahre ebenfalls im Geschäfte stehen, bekommt aber diesmal nur 5 % Gewinn. Seine anfängliche Summe ist dadurch um 1240 ℳ gestiegen; wie groß war sie? [8000 ℳ]

185. Ein Grossist verkauft das aus der Fabrik bezogene Tuch mit 15 % Gewinn an den Händler, der seinerseits noch 25 % Gewinn daraufschlägt, und nun ist das Meter um 2,2 ℳ teurer als im Fabrikpreis. Wie hoch ist letzterer? [5,03 ℳ]

186. Es spekuliert einer mit seinem Vermögen und gewinnt dadurch im 1. Jahre 7 % und verbraucht 2000 ℳ. Mit seinem jetzigen Vermögen gewinnt er im 2. Jahre 6 % und verbraucht 2090 ℳ und hat nun um 5 % mehr Vermögen als am Anfange des ersten Jahres. Wieviel hatte er? [50000 ℳ]

187. Ein Kapital ist mit den Zinsen zu $3\frac{2}{3}$ % in 12 Jahren auf 18000 ℳ angewachsen; wie groß war es am Ende des 7. Jahres dieses Zeitraumes? [15250 ℳ]

188. Es verkauft einer eine Ware um 516 ℳ mit $7\frac{1}{2}$ % Gewinn. Wie teuer hat er sie eingekauft? [480 ℳ]

189. Ein Wiederverkäufer erhält eine Ware mit 8 % Rabatt v. H. für 41,4 ℳ; wie teuer ist sie ohne Rabatt? [45 ℳ]

190. Ein Kaufmann hat für eine rückständige Schuld nebst Verzugszinsen zu 6 % für 1 J. 4 M. 945 ℳ zahlen müssen; wie groß war die Schuld? [875 ℳ]

191. Eine Kaufsumme wurde bei 5 % Rabatt (fürs Jahr) für 7 Monate mit 815,5 ℳ beglichen; wie groß war sie? [840 ℳ]

192. Ich will für ein Kind in eine Sparkasse so viel legen, daß die Summe in 8 Jahren mit den Zinsen zu $3\frac{3}{4}$ % 300 ℳ ausmacht; wieviel muß ich einlegen? [230,8 ℳ]

193. Zwei Brüder erben zusammen 9240 ℳ zu ungleichen Teilen; da aber der eine sein Kapital zu $3\frac{1}{2}$ %, der andere zu 4 % anlegt, erhalten sie jährlich den gleichen Zins. Wieviel erbte jeder? [4312; 4928]

194. Ein Faß enthielt 87 prozentigen Spiritus; als aber einer 12 *l* abzapfte und durch Wasser ersetzte, war er nur mehr 83 prozentig; wieviel Liter enthielt das Faß? [261 *l*]

195. Ein Faß wird mit 150 *l* 90 prozentigem Spiritus zum Transport übergeben, und enthielt bei der Ankunft wohl 150 *l* aber 83 prozentigen Spiritus; wieviel Liter hat einer unterwegs durch Wasser ersetzt? [$11\frac{2}{3}$ *l*]

---

196. Aus zwei Waren à 1,80 ℳ und 2,30 ℳ für 1 ℔ soll eine Mittelsorte zu 2 ℳ das ℔ hergestellt werden; wieviel von jeder Sorte braucht man für 40 ℔? [24; 16 ℔]

197. Wieviel ℔ à p ℳ und à q ℳ braucht man zu Q ℔ Mittelsorte à m ℳ.

198. Es sollen m *kg* à p ℳ mit n *kg* einer anderen Sorte gemischt werden, so daß das ℔ der Mischung r ℳ kostet; was darf 1 ℔ der zweiten Sorte kosten?

199. Wieviel Kupfer muß zu 60 *kg*, die aus 5 Tl. Silber und 1 Tl. Kupfer bestehen, zugesetzt werden, damit auf 7 Tl. Silber 3 Tl. Kupfer kommen? [$11\frac{3}{7}$ ℔]

200. Wieviel *g* Silber à 520 fein muß zu 80 *g* Silber à 842 f. zugesetzt werden, damit die Mischung 800 fein wird? [12 *g*]

201. Wieviel *g* Kupfer müssen zu 142 *g* Silber à 920 f. zugesetzt werden, damit es 900 f. wird? [3,155 *g*]

202. Wieviel *g* Feingold müssen zu 73 *g* Gold à 640 f. zugesetzt werden, damit es 850 fein wird? [102,2 *g*]

203. 80 *g* Silber à 840 f. haben durch Zusatz von 62 *g* einer andern Silbersorte eine Mischung von 720 Feingehalt gegeben; wie fein war das zugesetzte Metall? [565 f.]

204. Um Silber à 750 fein zu bekommen, nimmt einer 64 *g*

Silber à 560 fein und 43 g Silber à 800 fein und hat nun noch zwei Sorten à 900 f. und à 500 f.; von welcher Sorte und wieviel muß er nehmen? [66$\frac{11}{15}$ à 900 f.]

205. Es hat einer 3 Sorten Silber à 600 f., 720 f. und à 800 fein; er will 250 g Silber à 700 f. und wünscht dazu den Vorrat von 20 g à 720 f. aufzubrauchen; wieviel hat er von jeder der beiden anderen Sorten noch zu nehmen? [117; 113]

Terminrechnungen

206. Es hat einer 570 ℳ nach 2 Monaten, 410 ℳ nach 5 Mon., 720 ℳ nach 9 Mon. zu zahlen; wann kann er die ganze Summe auf einmal zahlen? [5,7 Mon.]

207. Wenn einer 840 ℳ nach 1$\frac{1}{2}$ Monaten, 730 ℳ nach 4 Mon. und eine gewisse Summe nach 5$\frac{1}{2}$ Mon. zu zahlen hat, wie groß ist diese Summe, wenn der mittlere Zahlungstermin aller 3 Summeu 4$\frac{1}{2}$ Mon. ist? [2885 ℳ]

208. Statt 2000 ℳ, die einer nach 8 Monaten zu zahlen hätte, zahlt er 300 ℳ nach 2 Mon., 500 ℳ nach weiteren 3 Mon., 400 ℳ nach weiteren 2 Mon. und 300 ℳ wieder nach 3 Mon. Nach wieviel Monaten kann er die fehlenden 500 ℳ entrichten?

209. Jemand soll in 4 Terminen folgende Zahlungen leisten: a ℳ nach l, b ℳ nach m, c ℳ nach n Monaten; wann kann er die ganze Summe a+b+c auf einmal leisten?

210. Statt 4000 ℳ, die einer nach 10 Monaten zu zahlen hätte, wünscht er vier Teilzahlungen zu machen, von denen jede folgende um 500 ℳ größer ist und drei Monate später erfolgt als die vorhergehende; wie groß ist jede Teilzahlung und wann erfolgt die erste? [3$\frac{5}{8}$ Mon.]

211. Ein Gutsherr hat sich verpflichtet, 40 Ochsen seines Nachbars 16 Monate lang auf seine Weide gehen zu lassen. Der Nachbar schickt aber mit Bewilligung des Gutsherrn anfangs nur 20 Ochsen, nach 7 Mon. 25 Stck. mehr, und 8 Mon. darauf wieder 15 Ochsen mehr. Wie lange muß der Gutsherr diese 60 Ochsen noch ferner füttern, um seine Verpflichtungen zu erfüllen?

212. Es soll einer 13000 ℳ nach 12 Mon. zahlen; nachdem er 3000 ℳ nach 5 Mon. bezahlt hat, wünscht er den Rest in 5 gleichen Beträgen und gleichen Zeitabständen zu zahlen; wie groß müssen die Termine sein? [3$\frac{1}{30}$ Mon.]

213. Wenn eine Summe, die nach 12 Monaten bezahlt werden soll, in 4 Terminen, von denen jeder folgende um 1$\frac{1}{2}$ Monate länger ist, bezahlt wird, wie groß sind diese Termine? [3$\frac{1}{3}$ Mon.]

214. A ackert mit seinen Pferden in 3 Tg. ebensoviel als B mit seinen Ochsen in 5 Tg. Wenn sie nun für einen Acker, den sie gemeinsam beackern, 72 ℳ bekommen, wieviel trifft auf jeden?

215. A ackert mit seinen 3 Pferden in 4 Tagen ebensoviel, als B mit seinen 4 Ochsen in 5 Tagen; wenn sie nun für gemein=

same Arbeit 72 ℳ bekommen; wieviel trifft auf jeden? Wie stellt sich die Lösung, wenn sich A an der Arbeit mit nur 2 Pferden, B mit nur 3 Ochsen beteiligt? [40; 32 ℳ; 37,88; 34,12 ℳ]

216. Von zwei Arbeitern verdient der eine bei täglich 9stündiger Arbeit in 4 Tagen ebensoviel als ein anderer bei täglich 8stündiger in 5 Tagen. Sie arbeiten eine Zeit lang gemeinschaftlich täglich gleich lang und verdienen dabei 133 ℳ. Wieviel gebührt jedem? [70; 63 ℳ].

Aufl.: **15.** $2\frac{5}{6}$ ℳ; $2\frac{1}{6}$ ℳ; **20.** $13\frac{1}{4}$ Std. Nacht; **23.** 40; **25.** $26\frac{1}{4}$ *km*; **36.** 18 Thlr.; **38.** 70; **40.** 2; $-2\frac{2}{3}$; $8\frac{8}{9}$; **42.** $20\frac{1}{4}$ *cm*; **43.** $20\frac{1}{4}$ *cm*; **44.** 3 *cm*; **45.** 48 H. 16 F.; **49.** 3380, 2380; 2420, 1920, 1420; 1232, 1082, 1132, 1082, 1232; **52.** 72, 48, 24, 12, 8; **56.** 180 *ha* Wald; **60.** 6 ℔; **92.** 1710; **96.** 3420 Stck. zuerst; **97.** 15 ₰; **109.** Nach 96″, 240″; 360″; **110.** 110 Min. aufw., 80′ abw.; **111.** $3\frac{1}{3}$ Std. nach Abgang d. Fußg., welcher 15 *km* zurücklegt; **112.** 10 Std. nach Abg. d. Reit.; **114.** Nach $33\frac{1}{3}$″, $46\frac{2}{3}$″, $66\frac{2}{3}$″, 80″; **115.** 6 Std. nach Abg. d. Aviso; **125.** 9 Std. d. zweite; **132.** Das erste fährt $4\frac{14}{19}$ Std. und macht $6\frac{6}{19}$ Meil.; **138.** 0,4 *m* geg. A; **142.** In $42\frac{2}{3}$ Tg. **150.** Der Ochsenknecht 87 F., der Pferdeknecht 105 große und 21 kleine F.; **151.** Der Ochsenkn. 54, der Pferdekn. 100 F. im ganzen; **152.** 28 Tg.; **153.** 327,1 Min. nach Öffn. d. 1. R.; **156.** A 2 *m*, B $2\frac{2}{3}$ *m* in 1″. **165.** A = 180 ℳ; **174.** 42 kl. Tg.; **175.** 45, 60, 72; **182.** Nach 8 weiteren ℳ; **208.** Nach weiteren 4,2 ℳ; **211.** Nach $2\frac{1}{3}$ M.; **214.** 45; 27 ℳ.

2. Abschnitt. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

87.

Enthält eine Gleichung mehr als eine, etwa zwei, Unbekannte, so hat die Gleichung unendlich viele Auflösungen; denn zu jedem beliebigen Wert, den man der einen Unbekannten beilegt, findet man den zugehörigen Wert der andern Unbekannten aus der Gleichung.

Beispiel: Aus der Gleichung $2x + 3y = 8$ findet man für $y = 0$, $x = 4$; $y = 1$, $x = 2\frac{1}{2}$; $y = 2$, $x = 1$; $y = 3$, $x = -\frac{1}{2}$; $y = 4$, $x = -2$; u. s. w. Die Gleichung liefert also zu jedem Wert von y einen zugehörigen Wert von x und umgekehrt, und da sie, wenn man für die eine Unbekannte alle möglichen Werte setzt, auch alle zugehörigen Werte der anderen Unbekannten liefert, so kann sie als die algebraische Form dieses System von unendlich vielen Paaren zusammengehöriger Werte zweier Größen angesehen werden.

Solche Gleichungen haben in der Anwendung oft den Charakter von Formeln, bei denen in allgemeiner Weise aus einer Größe (oder mehreren) eine andere Größe berechnet ist.

Beispiel: der Zins z, den ein Kapital k bei 4% in einem Jahre trägt, ist

$$z = \frac{k \cdot 4}{100}.$$

Diese Gleichung nennt man gewöhnlich eine Formel (Zinsformel), aus welcher, wenn die eine Größe gegeben ist, die andere berechnet werden kann. Da aber aus ihr bei gegebenem Zins z auch das zugehörige Kapital k berechnet werden kann, so kann sie auch angesehen werden als Gleichung mit den zwei Unbekannten z und k, und ist als solche die algebraische Form für all die unendlich vielen Wertpaare von Kapital und zugehörigem vierprozentigem jährlichen Zins.

Läßt man in diesem Beispiel auch den Zinsfuß unbestimmt, p%, und die Jahre, n J., so ist

$$z = \frac{k \cdot p \cdot n}{100}.$$

Dies nennt man die allgemeine Zinsformel, den allgemeinen Ausdruck des Zinses durch Kapital, Prozent und Zeit. Jede solche Formel kann auch aufgefaßt werden als Gleichung zwischen diesen vier Größen und enthält als solche die unendliche Mannigfaltigkeit von je 4 zusammengehörigen Werten dieser Größen.

Beispiel: Ein Punkt ist von mir 20 *m* weit entfernt und entfernt sich in jeder Sekunde um weitere 3 *m*; man stelle die Gleichung auf zwischen der jeweiligen Entfernung des Punktes von mir (y) und der zugehörigen verflossenen Zeit x; man berechne hieraus den Abstand y aus den Zeiten $x = 2''$, $= 10''$, $= 100''$, u. s. w. und die Zeit x aus den Abständen y = 32 *m*, 206 *m*, 11 *m*, u. s. w.

88.

Hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, und sollen die Werte der Unbekannten den zwei Gleichungen zugleich genügen, so gibt es im allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Wertpaaren, welche dieser Forderung genügen.

Solche Gleichungen nennt man zusammengehörige Gleichungen oder ein System von Gleichungen.

Das System auflösen heißt, die Wertepaare der Unbekannten bestimmen.

Wir beschränken uns zunächst auf lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten, das sind solche, bei welchen jede Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt und keine zwei Unbekannten mit einander multipliziert sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Gleichung schon auf die einfachste Form gebracht sei. Dies geschieht, indem man Brüche, Klammern (und Wurzeln) nach den Regeln von 81, 82 (und 84) wegschafft, die in Bezug auf je eine Unbekannte gleichartigen Glieder in je ein Glied vereinigt und auf die eine Gleichungsseite stellt (und die bekannten Glieder auf die andere Gleichungsseite bringt). Eine vereinfachte lineare Gleichung mit zwei Unbekannten hat also die allgemeine Form:

$ax + by = c$, also auch folgende Spezialformen:

$$4x - \tfrac{3}{8}y + 15 = 0; \quad -ax + (b - 2a)y = a(a - b)$$

$$\frac{x}{a + b} - \frac{by}{a - b} = c; \quad x - y + a - 2 = 0.$$

Zur Auflösung des Gleichungssystems hat man folgende Methoden.

1. Die Substitutionsmethode. Man berechnet den Wert einer Unbekannten aus einer Gleichung, und setzt ihn in die andere; die dadurch erhaltene Gleichung enthält dann nur mehr eine Unbekannte, welche aus dieser Gleichung berechnet werden kann. Setzt man dann ihren Wert in eine der gegebenen Gleichungen, so liefert diese dann auch die andere Unbekannte.

Beispiel:

I. $5x + 7y = 43$; II. $4x = 3y$.

Aus II ist $x = \frac{3}{4}y$; dies in I gibt

I. $5 \cdot \frac{3}{4}y + 7y = 43$; $10\frac{3}{4}y = 43$; $y = 4$.

Dies in II gibt $4x = 3 \cdot 4$; $x = 3$.

Also $x = 3$, $y = 4$.

2. Die Komparationsmethode. Man berechnet ein und dieselbe Unbekannte aus den zwei Gleichungen und setzt die erhaltenen Werte derselben einander gleich; die erhaltene Gleichung enthält dann nur eine Unbekannte, welche aus dieser Gleichung berechnet werden kann. Durch Substitution ihres Wertes in eine der gegebenen Gleichungen erhält man dann die andere Unbekannte.

Beispiel:

I. $4x - 3y = 17$; II. $7x + 5y = -1$;

aus I. $x = \frac{17 + 3y}{4}$; aus II. $x = \frac{-1 - 5y}{7}$.

Comp. $\frac{17 + 3y}{4} = \frac{-1 - 5y}{7}$;

$119 + 21y = -4 - 20y$; $41y = -123$; $y = -3$.

Dies in I $x = \frac{17 - 3 \cdot 3}{4}$; $x = 2$.

Also $x = 2$, $y = -3$.

3. Die Additions- und Subtraktionsmethode: Man multipliziert (oder dividiert) jede Gleichung mit so viel, daß die Koeffizienten einer und derselben Unbekannten in beiden Gleichungen einander gleich werden. Man verbindet dann die beiden Gleichungen durch Addition oder Subtraktion, so daß diese Unbekannte wegfällt. Die dadurch erhaltene Gleichung enthält dann nur noch eine Unbekannte, welche aus der Gleichung berechnet werden kann. Durch Substitution ihres Wertes in eine der gegebenen Gleichungen findet man die andere Unbekannte.

$$\begin{aligned} \text{I.}\ & 3x + 4y = 36; \\ \text{II.}\ & 7x + 6y = 64; \end{aligned}$$

hieraus

$$\begin{aligned} \text{I.}\ & 9x + 12y = 108; \\ \text{II.}\ & 14x + 12y = 128; \end{aligned}$$

subtr.: $5x = 20;\ x = 4;$ dies in I

$12 + 4y = 36;\quad y = 6.$

Diese drei Methoden sind nur der Form, nicht dem Wesen nach verschieden; denn jede liefert die nämliche Gleichung mit nur einer Unbekannten. Das Ziel jeder Methode ist, aus den zwei gegebenen Gleichungen eine Unbekannte zu entfernen, hinauszuschaffen, zu eliminieren, so daß die entstandene Gleichung, die Eliminationsgleichung nur mehr eine Unbekannte enthält, welche dann aus ihr berechnet werden kann.

89.

Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

Die im vorigen Paragraph angegebenen Eliminationsmethoden genügen auch, um Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten aufzulösen.

Das übersichtlichste ist das Substitutionsverfahren. Man berechnet eine Unbekannte aus einer Gleichung und setzt ihren Wert in jede der anderen Gleichungen ein; man erhält dadurch ein neues zweites System von Gleichungen, bei welchem sowohl die Anzahl der Gleichungen, als auch die Anzahl der Unbekannten um 1 kleiner ist. In diesem System berechnet man wieder eine Unbekannte aus einer Gleichung und setzt ihren Wert in jede der anderen Gleichungen des zweiten Systems ein; man erhält dadurch wieder ein neues, ein drittes System von Gleichungen, bei welchem wieder, sowohl die Anzahl der Gleichungen, als auch die Anzahl der Unbekannten um 1 kleiner ist als im zweiten System. Indem man auf dieselbe Weise fortfährt, erhält man immer neue Systeme, bei denen die Anzahlen der Gleichungen und der Unbekannten gleichmäßig um je 1 abnehmen. Soll das System auflösbar sein, so muß man schließlich auf ein System von nur einer Gleichung mit nur einer Unbekannten kommen, und aus ihr kann diese, erste Unbekannte berechnet werden. Das vorhergehende System muß demgemäß zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten enthalten haben; durch Substitution des Wertes der ersten Unbekannten in eine dieser Gleichungen ergibt sich die zweite Unbekanute. Das nächstvorhergehende System muß drei Gleichungen mit drei Unbekannten umfaßt haben; durch Substitution der zwei schon bestimmten Unbekannten in eine dieser Gleichungen ergibt sich die dritte Unbekannte. Indem man so fortfährt, von System auf System rückwärts zu schließen, ergibt sich, daß das gegebene

System ebensoviel Gleichungen als Unbekannte besitzen muß, und daß man durch fortgesetzte Substitution der schon gefundenen Unbekannten in eine Gleichung des vorhergehenden Systems nach und nach alle Unbekannten bestimmen kann.

Beispiel:

$$\begin{cases} \text{I. } 4x + 3y + 2z + u = 20; \\ \text{II. } 2x + 5y - z + 3u = 21; \\ \text{III. } 3x - 2y + 4z - 2u = 3; \\ \text{IV. } x - 4y + 5z + 5u = 28; \end{cases}$$

Aus I. $u = 20 - 4x - 3y - 2z$; dies in II, III, IV gibt:

$$\begin{cases} \text{II}'. \ 10x + 4y + 7z = 39; \\ \text{III}'. \ 11x + 4y + 8z = 43; \\ \text{IV}'. \ 19x + 19y + 5z = 72; \end{cases}$$

Aus II'. $y = \frac{39 - 10x - 7z}{4}$; dies in III', IV', gibt:

$$\begin{cases} \text{III}''. \ x + z = 4 \\ \text{IV}''. \ 114x + 113z = 453 \end{cases}$$

Aus III. $x = 4 - z$; dies in IV'' gibt:

IV'''. $456 - 114z + 113z = 453$; hieraus $\mathbf{z = 3.}$

Dies in III''. $x + 3 = 4$; hieraus $\mathbf{x = 1.}$

Beides in II'. $10 + 4y + 21 = 39$; hieraus $\mathbf{y = 2.}$

Alles in I. $4 + 6 + 6 + u = 20$; hieraus $\mathbf{u = 4.}$

Die Methode der Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten besteht demnach im wesentlichen darin, daß man aus dem gegebenen System von Gleichungen eine Unbekannte eliminiert, also ein neues System von Gleichungen aufstellt, welches um eine Unbekannte und eine Gleichung weniger enthält. Zur Elimination der Unbekannten kann aber außer dem (eben benützten) Substitutionsverfahren ebensogut die Komparationsmethode oder die Additons= und Subtraktionsmethode benützt werden.

Bei der Bildung des neuen Systems ist aber darauf zu achten, daß die erhaltenen Gleichungen von einander unabhängig sind, d. h. daß nicht eine derselben durch zwei oder mehrere der andern dargestellt werden kann. Hat man nur 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, und eliminiert man etwa x, so erhält man neue Gleichungen durch Verbindung von I mit II, und von I mit III, und von II mit III. Von diesen drei möglichen Gleichungen bilden zwei das neue System, und es ist gleichgültig, welche zwei man wählt; die dritte ist überflüssig und ist auch von den zwei vorhandenen nicht unabhängig, sondern kann durch dieselben dargestellt werden.

Z. B. $\begin{cases} \text{I. } 3x + 7y + 6z = 19 \\ \text{II. } 3x + 8y + 4z = -22 \\ \text{III. } 3x - 5y - 3z = 16. \end{cases}$

Durch Elimination von x erhält man:

I u. II.) $y - 2z = -41$

I u. III.) $12y + 9z = 3$

II u. III.) $13y + 7z = -38$.

Man sieht daß die letzte durch Addition der zwei ersten entsteht.

Bei 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten ist die Anzahl der Arten, auf welche man je zwei Gleichungen verbinden kann, eine noch viel größere, da man I II, I III, I IV, II III, II IV, III IV auswählen kann. Drei der so erhaltenen Gleichungen bilden das neue System, und man erhält hiebei jedesmal ein richtiges System, wenn zu dessen Bildung jede der gegebenen Gleichungen wenigstens einmal benützt worden ist. Richtige Systeme sind also

I II, I III, I IV; I II, I III, III IV; I II, II III, III IV, u. s. w.

Bei noch mehr Unbekannten, bei welchen die Anzahl der möglichen Verbindungen der Gleichungen eine noch viel größere ist, entgeht man der Gefahr, falsche Systeme zu bilden am einfachsten dadurch, daß man eine Gleichung mit jeder anderen verbindet, oder daß man jede Gleichung mit der folgenden verbindet, denn jede dieser Arten liefert sicher ein richtiges System.

90.

Besondere Fälle.

1) Vereinfachungen. Die Additions- und Subtraktionsmethode kann in manchen Fällen auch noch angewandt werden, um eine oder mehrere Gleichungen zu vereinfachen. Ist etwa eine Gleichung ziemlich kompliziert inbezug auf die Zahlen oder Buchstabengrößen, welche in ihr enthalten sind, ist sie aber derart mit einer anderen verwandt, daß sie wesentlich einfacher wird, wenn man mit ihr die andere durch Addition oder Subtraktion verbindet, so kann man diese einfachere Gleichung an Stelle der komplizierteren setzen. Man hat „eine Gleichung mit Hülfe einer anderen vereinfacht." Man kann dabei zur Vereinfachung auch mehrere Gleichungen benützen, und verdirbt die Richtigkeit des Systemes nicht, wenn man stets die vereinfachte Gleichung an Stelle derjenigen Gleichung setzt, welche man vereinfachen wollte.

Beispiel: I. $34x + 53y = 140$

II. $37x + 56y = 149$

Vereinfacht man die zweite, indem man die erste von ihr subtrahiert, so hat man

II. $3x + 3y = 9$, oder $x + y = 3$, also

I. $34x + 53y = 140$, II. $x + y = 3$.

Beispiel: I. $17x + 24y - 31z = -25$

II. $18x + 25y - 29z = -12$

III. $19x + 27y - 28z = -1$

Vereinfacht man I, indem man es von II subtrahiert, so ist I'. $x+y+2z=13$, und das System besteht aus I', II, III. Vereinfacht man noch II, indem man es von III subtrahiert, so ist II' $x+2y+z=11$, und das System besteht aus I', II', III.

2. Unvollständige Gleichungen. Enthält eine Gleichung nicht alle Unbekannten, welche sie enthalten könnte, so nennt man sie eine unvollständige Gleichung. Das Vorhandensein einer solchen unvollständigen Gleichung vereinfacht das Verfahren der Elimination, indem man sie sofort als eine Gleichung desjenigen Systems nimmt, dem sie nach der Anzahl ihrer Unbekannten angehört; man hat also die Elimination nur noch mit den andern Gleichungen des Systems vorzunehmen.

Beispiel: I. $3x+4y+5z=1$;
II. $4x-7y+3z=-11$;
III. $5x+6y \qquad =1$.

Da III unvollständig ist und z nicht enthält, so eliminiert man z auch aus I und II; das gibt

I' $-11x+47y=58$; dies und III bilden das zweite System.

Beispiel: I. $4x+11y-16z=14$;
II. $3x-5y=-9$;
III. $7x+2z=59$.

In diesem besonderen Falle, wenn II und III blos je zwei Unbekannte, und x gemeinschaftlich besitzen, kann man aus ihnen y und z berechnen, also ausdrücken durch x, und beide Werte zugleich in I einsetzen; dann enthält I nur mehr die Unbekannte x. Also

II. $y=\frac{3x+9}{5}$; III. $z=\frac{59-7x}{2}$; beides in I gibt

$$4x+11\cdot\frac{3x+9}{5}-16\cdot\frac{59-7x}{2}=14;$$ hieraus $x=7$;

dies in II gibt $y=6$, und in III gibt $z=5$.

3. Einführung neuer Unbekannten.

In manchen Fällen ist es bequem, ja sogar notwendig, neue Unbekannte einzuführen. Dies ist stets dann möglich, wenn die Unbekannten blos in bestimmten Ausdrücken vorkommen, deren Anzahl gleich der Anzahl der Unbekannten ist. Man setzt dann jeden dieser Ausdrücke gleich einer neuen Unbekanten (diese Definitionsgleichungen der neuen Unbekannten heißen die Substitutionsgleichungen); dann setzt man statt dieser Ausdrücke die neuen Unbekannten in die gegebenen Gleichungen, und bestimmt aus ihnen ihre Werte. Die gefundenen Werte der neuen Unbekannten setzt man in die Substitutionsgleichungen, und bestimmt dann aus ihnen die Werte der gegebenen Unbekannten.

Beispiel: I. $11(5x+2y)+25(7x+5y)=19$;

II. $7(5x+2y)+30(7x+5y)=-2$.

Man setze: $\left.\begin{cases}5x+2y=u\\7x+5y=v\end{cases}\right\}$ Substitutionsgleichungen,

so ist I. $11u+25v=19$;

II. $7u+30v=-2$.

Hieraus $u=4$, $v=-1$. Dies in die Substitutionsgl., so ist

$\begin{cases}5x+2y=4;\\7x+5y=-1;\end{cases}$ hieraus $x=2$, $y=-3$.

Beispiel: I. $3x-7y+\frac{2}{x-2z}+\sqrt{2x+y+2z}=9$;

II. $6x-14y+\frac{6}{x-2z}-\sqrt{2x+y+2z}=4$;

III. $15x-35y-\frac{4}{x-2z}-2\sqrt{2x+y+2z}=3$.

Man setze $\begin{cases}3x-7y=u;\\\frac{1}{x-2z}=v;\\\sqrt{2x+y+2z}=w,\end{cases}$ so ist:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & u+2v+w=9\\\text{II.} & 2u+6v-w=4\\\text{III.} & 5u-4v-2w=3\end{array}\right\}\text{ hieraus }\begin{array}{l}u=3,\\v=\frac{1}{2},\\w=5.\end{array}$$

Dies in die Substitutionsgleichungen, gibt:

$$\begin{cases}3x-7y=3;\\x-2z=2;\\2x+y+2z=25;\end{cases}$$

Hieraus $x=8$, $y=3$, $z=3$.

4. **Gleichungen, welche keine endliche Auflösung haben.** Zwei Gleichungen von der Form I. $ax+by=c$, II. $ax+by=d$, bei denen die linken Seiten gleich, die rechten aber ungleich sind, haben **keine Auflösung durch endliche Zahlen**; denn, welche endlichen Wert man auch dem x und y geben mag, nie kann der Ausdruck $ax+by$, da er für jedes bestimmte endliche Wertepaar von x und y nur je einen Wert hat (eindeutig ist), die zwei Werte c und d zugleich annehmen. Eine Auflösung durch endliche Werte von x und y kommt also diesen Gleichungen nicht zu; wohl aber können **unendlich große Werte** von x und y den Gleichungen genügen, denn unendlich große Werte ax und by können, von einander subtrahiert (die Vorzeichen sind passend zu wählen) jeden beliebigen endlichen Wert haben. Man sagt auch, zwei solche Gleichungen enthalten einen Widerspruch, insofern als in ihnen ausgesprochen ist, daß ein und dieselbe eindeutige Größe $ax+by$ zwei verschiedenen Größen c und d gleich sein soll.

Ob Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten einen solchen Widerspruch enthalten, und infolge dessen eine Lösung durch endliche Werte nicht haben, läßt sich durch den Anblick der Gleichungen oft nicht ersehen. Die Elimination von Unbekannten führt aber dann auf Systeme von weniger Unbekannten, welche dies erkennen lassen. Z. B. das System:

$$\text{I. } 4x + 7y - 5z = 21,$$
$$\text{II. } 8x + 13y - 5z = 35,$$
$$\text{III. } 14x + 23y - 10z = 57,$$

liefert durch Elimination von z das System

$$\text{I}'.\ 2x + 3y = 5, \quad \text{II}'.\ 2x + 3y = 7,$$

oder durch Elimination von x das System

$$\text{I}'.\ y - 5z = 7, \quad \text{II}'.\ y - 5z = 11.$$

Jedes dieser Systeme zeigt, daß eine Lösung durch endliche Werte nicht möglich ist.

5. Gleichungen, welche nicht von einander unabhängig sind. Zwei Gleichungen, welche einander vollständig gleich sind, oder sich nur so wenig von einander unterscheiden, daß sie durch erlaubte Umformungen einander gleich gemacht werden können, können nicht als zwei Gleichungen eines Gleichungssystems aufgeführt werden. Denn ist dies der Fall, und sucht man das System durch Substitutionsmethode zu lösen, indem man aus der ersten von ihnen eine Unbekannte berechnet und in die zweite sowie in jede folgende einsetzt, so verschwindet die zweite Gleichung vollständig, und man hat nicht nur um eine, sondern um zwei Gleichungen weniger; das nächste System hat also eine Gleichung zu wenig, woraus folgt, daß, wenn man so fortfährt, man schließlich auf blos eine Gleichung mit zwei Unbekannten kommt. Da diese Gleichung keine Auftösung hat, vielmehr unzählig viele, insofern als sie zu jedem beliebigen Wert der einen Unbekannten einen bestimmten Wert der anderen Unbekannten ergibt, so hat auch das gegebene System keine Auflösung, vielmehr gibt es zu jedem beliebigen Wert einer Unbekannten ein bestimmtes System von Werten der anderen Unbekannten.

Da sonach die zwei Gleichungen, welche einander gleich sind, zur Lösung des Systems nur so viel beitragen, als wenn nur eine von ihnen da wäre, so ist die zweite als überflüssig aus dem System zu streichen.

Bei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten ist stets leicht zu sehen, ob sie vollständig einander gleich sind, denn dies ist stets dann und nur dann vorhanden, wenn die Koeffizienten der einen Gleichung sich alle um denselben Faktor von denen der andern Gleichung unterscheiden.

Beispiel: I. $5x + 7y = 8$; II. $10x + 14y = 16$.

Bei Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten ist oft nicht auf den ersten Blick zu erkennen, ob zwei Gleichungen ganz gleich sind, da möglicherweise eine derselben dadurch verändert ist, daß sie mit einer gewissen Zahl multipliziert und zu ihr eine oder mehrere andere Gleichungen, die auch mit beliebiger Zahl multipliziert sind, addiert sind.

Z. B. I. $2x + 3y - 4z = 9$
II. $3x + 2y - 5z = 7$
III. $11x - y - 15z = 4$.

In diesem System ist eigentlich die dritte gleich der zweiten, jedoch dadurch verändert, daß die zweite mit 7 multipliziert und von ihr 5 mal die erste subtrahiert ist. Ebenso kann man auch sagen, es ist die erste gleich der zweiten, nur dadurch verändert, daß die zweite 7 mal genommen, die dritte davon subtrahiert und das ganze durch 5 dividiert wurde. Allgemein diese drei Gleichungen sind derart mit einander verwandt, oder so von einander abhängig, daß eine, also jede, durch die beiden anderen dargestellt werden kann dadurch, daß man jede der beiden anderen mit je einer gewissen Zahl multipliziert und sie dann addiert. Man sagt kurz, die drei Gleichungen sind von einander abhängig.

Wenn auch nicht von vorn herein leicht erkenntlich ist, daß solche Gleichungen von einander abhängig sind, so zeigt dies doch bald der weitere Verlauf der Auflösung; denn man kommt bald zu einem System von Gleichungen, in welchem zwei Gleichungen einander gleich sind. Denn bringen wir die Gleichungspolynome durch Hinübersetzen des konstanten Gliedes auf o, und bezeichnen sie mit I, II, III, so ist, wenn die Gleichungen von einander abhängig sind, $III = m \cdot I + p \cdot II$, wo m und p bestimmte Zahlen bezeichnen. Berechnet man nun, indem man, das Substitutionsverfahren anwendet, eine Unbekannte aus I und setzt sie in II, so geht II über in die Gleichung $II' = o$, setzt man dieselbe Unbekannte in III, so verschwindet dabei dessen erster Teil $m \cdot I$, weil I dadurch verschwindet, und dessen zweiter Teil geht über in $p\,II'$, so daß die Gleichung III' die Form $p\,II' = o$ hat, also identisch ist mit $II' = o$.

Z. B. Wenn man in obigem System x aus I rechnet, so wird II' $-5y + 2z = -13$, und
III' $-35y + 14z = -91$.

Dieselbe Ableitung läßt sich ausdehnen auf Gleichungen von noch mehr Unbekannten. Sind in einem System 4 Gleichungen von einander abhängig (während die etwa noch vorhandenen nicht damit verwandt sind), so können die Gleichungen dargestellt werden als $I = o$, $II = o$, $III = o$, $a\,I + b\,II + c\,III = o$, $V = 0$ . . (und sie behalten diese Form, so lange eine der nicht damit verwandten Gleichungen zur Substitution den Wert einer Unbekannten

liefert). Nimmt man eine Unbekannte aus I und substituiert in die anderen, so entsteht das System:

$$II' = o,\ III' = o,\ b\,II' + c\,III' = o'\ V' = o, \ldots$$

Nimmt man nun die Unbekannte aus II', so erhält man durch Substitution:

$$III'' = o,\ c\,III'' = o,\ V'' = o, \ldots,$$

in welchem sich die Gleichheit der zwei ersten Gleichungen erweist. Dieselbe Ableitung gilt für noch mehr Gleichungen, nur zeigt sich die Gleichheit der Gleichungen erst in einem noch späteren System.

Wenn also in einem System von Gleichungen eine Gruppe enthalten ist, deren Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, so zeigt sich das im Verlauf der Auflösung dadurch, daß in irgend einem späteren System zwei Gleichungen identisch gleich werden. Man hat dann in jener Gruppe eine Gleichung als überflüssig zu entfernen und hat somit nur mehr ein unvollständiges System von Gleichungen, welches keine Lösung durch ein einziges bestimmtes Wertsystem der Unbekannten hat. Wohl aber hat dies unvollständige System unendlich viele Lösungen ganz bestimmter Wertsysteme der Unbekannten. Denn legt man einer Unbekannten einen beliebigen Wert bei, so enthält das System nur mehr so viele Gleichungen als Unbekannte, es können also die zugehörigen Werte dieser Unbekannten berechnet werden; indem man der einen Unbekannten nach und nach alle möglichen Werte beigelegt und die resultierenden Gleichungen aufgelöst denkt, erhält man die unzählig vielen Wertsysteme der Unbekannten.

91.

Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

1. $\begin{cases} x+y = 1011; \\ x-y = 297; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 1\frac{13}{28}; \\ x-y = \frac{1}{28}; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = s; \\ x-y = d; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+3y = 26{,}4; \\ 5y-x = 32{,}8; \end{cases}$ $\begin{cases} x+4y = 13\frac{1}{4}; \\ 3x+5y = 26\frac{5}{8}; \end{cases}$ [4,2; 7,4; $5\frac{3}{4}$; $1\frac{7}{8}$]

3. $\begin{cases} 4x-3y = 16; \\ 7x-5y = 33; \end{cases}$ $\begin{cases} 9x+4y = 25\frac{7}{24}; \\ 8x+9y = 37; \end{cases}$ [19; 20; $1\frac{5}{8}$; $2\frac{2}{3}$]

4. $\begin{cases} 6x+11y = 11{,}93; \\ 13x-7y = 12{,}59; \end{cases}$ $\begin{cases} 83x+142y = 592; \\ 127x-63y = 65; \end{cases}$ [1,2; 0,43; 2; 3]

5. $\begin{cases} 15x+7y = 140; \\ 18x-14y = 56; \end{cases}$ $\begin{cases} 7x+6y = 65; \\ 14x-9y = 11; \end{cases}$ [7; 5; $4\frac{3}{7}$; $5\frac{2}{3}$]

6. $\begin{cases} ax = by; \\ x+y = c; \end{cases}$ $\begin{cases} 12x-11y = 47; \\ 9x-5y = 71; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3y = \frac{1}{60}; \\ 4x+5y = \frac{7}{12}; \end{cases}$

7. $\begin{cases} 21x-20y = 46; \\ 18x-25y = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} 21x+55y = 71{,}3; \\ 28x-66y = -16{,}4; \end{cases}$ [6; 4; 1,3; 0,8]

8. $\begin{cases} x+y=(a+b)^2; \\ x-y=a^2-b^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x+3y=19a+37b; \\ 6x+11y=45a+74b; \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x+y=17a-52; \\ 5x-2y=57a-91; \end{cases}$ $\begin{cases} ax+y=2a^2+3a-1; \\ x+ay=2a^2+a+1; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 6x+4\frac{3}{4}=5y; \\ 9x+5\frac{3}{4}=7y; \end{cases}$ $\begin{cases} ax+by=a^2+2ab-b^2; \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2); \end{cases}$

11. $\begin{cases} x(a+1)-y(a-2)=6a-3; \\ x(a+2)+y(a-1)=2a^2+4; \end{cases}$ [a+1; a—2]

12. $\begin{cases} x(n-1)-y(n+1)=-n^2-1; \\ x(2n+1)-y(n-2)=n^2+16n-1; \end{cases}$ [2n+3; 3n—2]

13. $\begin{cases} (x+5)(y+7)=(x+1)(y-9)+112; \\ 2x+10=3y+1; \end{cases}$ [3; 5]

14. $\begin{cases} x(a+1)-y(a-1)=2ab; \\ x(b-1)-y(b+1)=2b^2-2a-2b; \end{cases}$ [a+b—1; a—b+1]

15. $\begin{cases} x(a+b)-y(a-b)=-2a^2+8ab-4a-2b; \\ x(2a+b)-y(a-2b)=-a^2+13ab-2b^2-7a-b; \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{x}{11}+\frac{y}{12}=20; \\ 11x-12y=35; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{12}+\frac{y}{48}=12; \\ \frac{x}{15}+\frac{y}{42}=12; \end{cases}$ [121; 108; 60; 336]

17. $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{36}; \\ \sqrt{x}:\sqrt{y}=3:4; \end{cases}$ $\begin{cases} x:y=2:5; \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=24; \end{cases}$ [81; 144; 24; 60]

18. $\begin{cases} 100x+y=1888; \\ 3(y-2)-2x=6(2x+1); \end{cases}$ $\begin{cases} 100x+y=1888; \\ 900x+9y=16992; \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{a}{b+y}=\frac{b}{3a+x}; \\ ax+2by=d; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x-1}{x+y}=\frac{1}{x+y}+\frac{2}{7}; \\ \frac{4}{1-3y}=\frac{1}{y-x-1}; \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{1}{3-x}+\frac{1}{2x-6}=\frac{1}{8x-6y}; \\ \frac{1}{3y-3x}+\frac{1}{2y-4x-2}=\frac{2-5y}{30(2x-y+1)(x-y)}; \end{cases}$ [$2\frac{4}{5}$; $3\frac{2}{3}$]

21. $\begin{cases} (x-46):(55-y)=3:2; \\ (5x-y-8):(3x+2y+10)=3:4; \end{cases}$ [52; 51]

22. $\begin{cases} \frac{1}{0{,}3y-0{,}3x+1{,}2}=\frac{4}{3y+3x-12}+\frac{y-2{,}4}{x^2-8x+16-y^2}; \\ 4(0{,}2x-0{,}1y)-0{,}5(0{,}1y+1)-1=-0{,}01; \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{5x-6y+7}{3}+y+5=x-\frac{1}{4}-\dfrac{y}{12}; \\ \dfrac{4x-3y-11}{4}+y-2x=3\frac{5}{6}y+35-\dfrac{2(4x+3y-1)}{3}; \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{4x+3y+2}{4(x+y)(5-3x)}=\dfrac{1}{12x+12y}+\dfrac{1}{9x-15}; \\ 25x+25y=-28; \end{cases}$ [2; −3]

25. $\begin{cases} \dfrac{3}{x-y+6}=\dfrac{5}{2y-x+6}; \\ 7(2y-(x+1))=2(3x-2(y-3)); \end{cases}$ [−7; −4]

26. $\begin{cases} a(x+y)-b(x-y)=2a(a-b^2); \\ \dfrac{x-y}{2b}-2+\dfrac{x+y}{a}=a; \end{cases}$ [a+ab; a−ab]

27. $\begin{cases} x+y=\frac{4}{3}(a+1); \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3a+1}{a+3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=(b-a)\left(1-\dfrac{1}{ab}\right); \\ ax-by=a-b; \end{cases}$

28. $\begin{cases} a(x-y+a)+b(x+y+b)=(a+b)^2; \\ (x-y-b)(2a+3b)=2b(a-b-2y); \end{cases}$ $\left[\dfrac{a+b}{2};\ \dfrac{a-b}{2}\right]$

29. $\begin{cases} x\left(a-1+\dfrac{1}{a}\right)+y\left(a+1-\dfrac{1}{a}\right)=2\left(a^2-\dfrac{1}{a}\right)-\dfrac{y-x}{a}; \\ \dfrac{x}{a^2+1}+\dfrac{y}{a^2-1}=\dfrac{2}{a}; \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{a}{y-x+1}=\dfrac{b}{x+y-1}; \\ \dfrac{2a}{bx+ay}=\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}+\dfrac{by+b}{ax+ay}=\dfrac{1}{x+y}; \\ \dfrac{x}{a-2b}=\dfrac{1}{a+2b}-\dfrac{y-1}{a}; \end{cases}$

31. $\begin{cases} x+y=\dfrac{(a+b)(a+b+1)-1}{ab}; \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{a+b-1}{(a+b)^2}; \end{cases}$ $\begin{cases} (a+b)(x+y)+1=0; \\ \dfrac{bx-1}{a}+\dfrac{ay-3}{b}=\dfrac{1}{a+b}; \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{2a^3}{x^2-y^2}=\dfrac{a}{x-y}-\dfrac{b}{x+y}; \\ \dfrac{x+y}{ab}-\dfrac{2b}{a}=\dfrac{2a}{b}-\dfrac{x-y-2ab}{b^2}; \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} a^2+ab+b^2 \\ a^2-ab+b^2 \end{matrix}\right]$

33. $\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{x+y}}=\dfrac{b}{0{,}5-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{y}}}$; $\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{\dfrac{a}{2b^2}-\dfrac{2}{a}}{\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{2}{a}}$;

34. $\begin{cases} 3(x-a)-2(y-b)=15-\dfrac{2(3a+2b)}{ab}; \\ bx+ay=2ab-3(a-b); \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} a-\dfrac{b}{2}+3 \\ \dfrac{2}{a}+b-3 \end{matrix}\right]$

35. $abx+y=2(a+b); \quad a^2x-y=\dfrac{a^2-b^2}{b};$ $\left[\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b};\ a+b\right]$

36. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{-a^2}{(2a-1)(3a-1)}; \\ x\left(3-\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{a}\right)-y\left(2-\dfrac{1}{a}\right)\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{5}{a}-1; \end{cases}$

37. $\begin{cases} (\frac{1}{2}a+b)(x+y)=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}; \\ a(x-y)-b(x+y)=\dfrac{2b}{a+2b} \end{cases}$; $\left[\dfrac{a+b}{(a-b)(a+2b)};\ \dfrac{a-b}{(a+b)(a+2b)}\right]$

38. $x+ay=\dfrac{1-a}{a}; \quad a^2x-y=a(1-a^2)-1+\dfrac{1}{a};$

39. $\begin{cases} (2x+3y+2)^2-(3x-2y+1)^2=24xy \\ \qquad -(x+y)(5x-5y+7)+15y+2; \\ 1\frac{2}{3}x+y=4\frac{1}{36}; \end{cases}$

40. $\begin{cases} (x-y-3)^2=(y-x+7)^2+y+9\frac{1}{2}; \\ 1{,}4x-1{,}5y=7{,}925; \end{cases}$ $[-4\frac{7}{8};\ -9\frac{5}{6}]$

41. $x^2-y^2-2x+2y=4; \quad x+y=3;$ $[3\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}]$

42. $y-x=3n-2a-1;$
$(a+n-1)x+y(a-2)=4(n+1)(a-1);$

43. $(6x-7y-1):(2x-3y-1):(y-x)=25:15:8;$

44. $(2x-3y-2):(y-x):(3x-4y-2)=19:16:13;$

45. $\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{y+\dfrac{1}{x-1}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{y-\dfrac{1}{1-x}}}; \quad 2y-\dfrac{1}{1-x}=2;$

46. $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{y-2}{6}=1; \quad \dfrac{y-2}{2}-\dfrac{3}{x+1}=1\frac{1}{2}.$ $[5;\ 6]$

---

47. $\begin{cases} \dfrac{4}{4x+3y+2}+\dfrac{5}{5x+4y+3}=1; \\ \dfrac{20}{4x+3y+2}+\dfrac{15}{5x+4y+3}=4; \end{cases}$ $[3;\ -2]$

48. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1}+\dfrac{1}{x-y+1}=1; \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{x+y-1}+\dfrac{2}{x-y+1}}=\frac{2}{3}; \end{cases}$ $[2;\ 1]$

49. $\begin{cases} \dfrac{16}{5x+12y-6} - \dfrac{7}{9x+8y+10} = 16; \\ \dfrac{4}{15x+36y-18} + \dfrac{3}{36x+32y+40} = -\frac{4}{3}; \end{cases}$ $[-3\frac{1}{2};\ 2\frac{5}{8}]$

50. $\begin{cases} \dfrac{7}{17x-5y-10} + \dfrac{19x-7y+7}{9} = 3; \\ \dfrac{6}{17x-5y-10} - \dfrac{19x-7y+5}{4} = 1; \end{cases}$ $[4;\ 11]$

51. $\begin{cases} \dfrac{5}{4x-5y} - \dfrac{5x-6y}{3} = 3; \\ \dfrac{4}{4x-5y} + \dfrac{5x-6y}{15} = 1\frac{1}{2}; \end{cases}$ $[2\frac{1}{2};\ \frac{4}{3}]$

52. $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y-3} - \dfrac{3}{2x+y-6} = 8; \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{x+y-3} + \dfrac{1}{2x+y-6}} = \frac{3}{8}; \end{cases}$ $[4;\ -\frac{1}{2}]$

53. $\begin{cases} \dfrac{1}{1+x-y} - \dfrac{1}{x-2y-1} = 4; \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{1+x-y} - \dfrac{1}{1-x+2y}} = 1\frac{1}{2}; \end{cases}$ $[-1\frac{19}{35};\ -\frac{34}{35}]$

54. $\begin{cases} 3(7x-8y+10)+2(9x-10y+8) = 10; \\ 3(7x-8y+10)-2(9x-10y+8) = 2; \end{cases}$ $[16;\ 15]$

55. $\begin{cases} \dfrac{12}{5x+2y-8} + \dfrac{28}{3x+4y-12} = 3; \\ \dfrac{5x+2y-8}{3} = \dfrac{3x+4y}{2} - 6; \end{cases}$ $[4;\ 3]$

56. $\begin{cases} \dfrac{9}{4x-3y-19} + 3x-5y-4 = 10; \\ \dfrac{5}{4x-3y-19} + 9x-15y-17 = 17\frac{2}{3}. \end{cases}$ $[7;\ 2]$

---

57. $\begin{cases} \sqrt{x-3}+\sqrt{y+5} = \sqrt{x+y+2+2\sqrt{(x+2)y}}; \\ \sqrt{x-y+1} = \sqrt{2y-4}; \end{cases}$ $[7;\ 4]$

58. $\sqrt{x^2-2xy+y^2+27} = x-y+3;\quad \sqrt{3(x-y)} = \sqrt{\frac{1}{2}(2x-y)};$

59. $\sqrt{x-y+1} = \sqrt{\frac{1}{2}x+y-8};\quad 3x-8 = 3\sqrt{x^2-7y+13}-2;$

60. $\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{1}{\sqrt{y-5}}=\frac{1}{12}$; $\sqrt{\frac{5-y}{x+4}}\sqrt{\frac{4+x}{4-x}}=1\frac{1}{3}$; [13; 21]

61. $\begin{cases}\frac{6}{\sqrt{x-y}}+\frac{10}{\sqrt{2x+y}}=1\frac{1}{6};\\ 4\sqrt{2x+y}+15\sqrt{x-y}=1\frac{1}{3}\sqrt{2x^2-xy-y^2};\end{cases}$ [123; —21]

62. $\begin{cases}\sqrt{x+2y+4}+2\sqrt{2x-y+2}=13;\\ 3\sqrt{x+2y+4}-5\sqrt{2x-y+2}=-10\frac{1}{2};\end{cases}$ [9,7; 1,15]

63. $\begin{cases}\sqrt{2(a-x)}+\sqrt{a-3y}=1\frac{1}{2}\sqrt{x+2y};\\ \sqrt{2(a-x)}-\sqrt{a-3y}=\frac{1}{2}\sqrt{x+2y};\end{cases}$ $[\frac{1}{2}a;\ \frac{1}{4}a]$

64. $\begin{cases}3\sqrt{x+2y}+2\sqrt{2x-2y}=5\sqrt{\frac{1}{2}x+y+a};\\ 4\sqrt{x+2y}-2\sqrt{2x-2y}=2\sqrt{\frac{1}{2}x+y+a};\end{cases}$ $\left[\frac{4a}{3};\ \frac{a}{3}\right]$

65. $\begin{cases}5\sqrt{x+3y}-\sqrt{7x+5y+\frac{1}{2}}=3\sqrt{5x-6y+\frac{1}{4}};\\ 7\sqrt{x+3y}-2\sqrt{7x+5y+\frac{1}{2}}=3\sqrt{5x-6y+\frac{1}{4}};\end{cases}$ $[2\frac{3}{4};\ 1\frac{1}{4}]$

66. $\begin{cases}\sqrt{2(x-a)}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{x+y-2a+2b};\\ 4\sqrt{2(x-a)}-\sqrt{x-y}=3\sqrt{x+y-2a+2b};\end{cases}$ [a+b; a—b]

67. $\frac{21}{74}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{1}{x+y}}}}$; $\frac{5}{17}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x-y}}}}$;

---

68. $\begin{cases}5x+3y+7z=12;\\ 4x+5y-3z=26;\\ 3x-6y-8z=-4;\end{cases}$ $\begin{cases}4x+9y+5z=-13;\\ 7x-y+6z=106;\\ 8x+6y-11z=-86;\end{cases}$

69. $\begin{cases}6x+5y+20z=53;\\ 4x-12y-9z=-24;\\ 9x-4y-4z=380;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y+z=29\frac{1}{4};\\ x+y-z=18\frac{1}{4};\\ x-y+z=13\frac{3}{4};\end{cases}$

70. $\begin{cases}19x-5y+2z=24;\\ 18x+6y-3z=-6;\\ -17x+4y+4z=147;\end{cases}$ $\begin{cases}25x-9y-11z=-27;\\ 15x-12y+17z=-71;\\ 9x+8y-30z=27;\end{cases}$

71. $\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y+\frac{1}{7}z=13;\\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}z=17;\\ \frac{1}{10}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{14}z=7;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-\frac{13x-8}{3y-2}=1\frac{5}{7};\\ y-\frac{2x-z}{6x-12}=2\frac{1}{2};\\ 3\frac{1}{2}y-3z=4\frac{1}{2};\end{cases}$

72. $\left\{\begin{array}{l} 5x + 3y - 6z = -8; \\ 9x - 6y + 7z = 25\frac{3}{4}; \\ 10x - 9y - 3z = -17\frac{1}{4}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{x} - \frac{5}{3y} + \frac{1}{z} = 3\frac{4}{27}; \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6\frac{11}{72}; \\ \frac{5}{6x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 12\frac{1}{36}; \end{array}\right.$

73. $\left\{\begin{array}{l} 6x - 7y + 11z = 5; \\ 15x + 10y - 7z = -20; \\ 21x + 13y + 10z = 1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 19x + 8y + 6z = 57; \\ 16x - 6y - 7z = 132; \\ 37x + 4y = 194{,}2; \end{array}\right.$

74. $\left\{\begin{array}{l} 3x - 18y - 25z = 113; \\ 4x + 16y - 63z = 241; \\ 7x - 18z = 430; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 5x + 15y + 4z = 4\frac{1}{2}; \\ 7x - 20y + 3z = 66\frac{1}{2}; \\ 37x + 30z = 352\frac{1}{2}; \end{array}\right.$

75. $\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y - \frac{7}{10}z = 4; \\ \frac{5}{6}x - \frac{7}{12}y + \frac{4}{15}z = 15; \\ \frac{3}{4}y - \frac{4}{5}z = -21; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x + \frac{1}{2}(y + z) = 102; \\ y + \frac{1}{3}(x + z) = 78; \\ z + \frac{1}{4}(x + y) = 61; \end{array}\right.$

76. $4x + 6y + 5z = 7;\quad 2x + 3y = 11;\quad 4x - 3z = 25;$

77. $7x + 13y + 10z = 3;\quad 4x + 3y = 8;\quad 6x - 5z = 20;$

78. $9x + 12y + 8z = 91\frac{1}{2};\quad 6x - 8y = 10\frac{3}{7};\quad 10z + 16y = 12\frac{4}{7};$

79. $x + 3y - 2z = 107;\quad 4x - 3z = 1;\quad 9y - 4z = 141;$

80. $y + \frac{1}{2}x = 41;\quad x + \frac{1}{4}z = 20\frac{1}{2};\quad y + \frac{1}{5}z = 34;$

81. $5x - 6y = 2\frac{5}{7};\quad 5y - 6z = 1\frac{4}{7};\quad 5z - 6x = 21;$

82. $11x + 6y = 63;\quad 9y + 16z = 151;\quad 15z - 14x = 75;$

83. $ax + by = c,\quad dx + ey = f,\quad gy + hz = l;$

84. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a;\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b;\quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c;$

85. $x + 2y = 2{,}4;\quad y + 2z = 2{,}76;\quad z + 2x = 2{,}4;$

86. $x + y = 1\frac{7}{15};\quad y + z = 1\frac{27}{40};\quad z + x = 1\frac{13}{24};$

87. $x + y = 24,\quad x + z = 14,\quad y + z = 4;$

88. $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{8}z;\quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 30;\quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 35;$

89. $\left\{\begin{array}{l} 29x + 4y - 23z = 41; \\ 29x - 11y + 23z = 246; \\ 51x + 17y - 59z = 56; \end{array}\right.$

---

90. $\frac{3}{x+y} + \frac{2}{x+z} = 1{,}1;\quad \frac{5}{x+y} + \frac{6}{y+z} = 3;\quad \frac{4}{y+z} + \frac{3}{x+z} = 2\frac{1}{12};$

91. $\left\{\begin{array}{l} \frac{7}{x+1} - \frac{5}{y-2} + \frac{2}{z} = 1; \\ \frac{6}{z} + \frac{2}{y-2} = 2; \\ \frac{6}{x+1} + \frac{4}{y-2} + \frac{2}{z} = 3; \end{array}\right.$ [3; 6; 4]

92. $$\begin{cases} \frac{25}{x+y+4} + \frac{7}{z} = 6; \\ \frac{3}{x-z-4} + \frac{8}{z} = 7; \\ \frac{35}{x+y+4} + \frac{6}{x-z-4} - \frac{3}{z} = 8; \end{cases}$$ [7; —1; 2]

93. $$\begin{cases} \frac{x+2}{y+z} + \frac{y}{x-z} + \frac{z}{x-y} = 6; \\ \frac{2x+4}{y+z} + \frac{y}{2x-2z} + \frac{z}{3x-3y} = 4; \\ \frac{3x+6}{y+z} + \frac{y}{4x-4z} + \frac{3z}{2x-2y} = 8; \end{cases}$$ [5; 4; 3]

94. $$\begin{cases} \frac{x+y}{z-1} - 3\,\frac{x+z}{y-1} + 2\,\frac{y+z}{x-1} = -1\tfrac{1}{2}; \\ 2\cdot\frac{x+z}{y-1} - \frac{y+z}{x-1} = \tfrac{1}{6}; \\ 3x+2y+2z = 3; \end{cases}$$ [3; —2; —1]

---

95. $$\begin{cases} x+y+2z-3u = 3; \\ 2x-y+z-u = 4; \\ 3x+2y-3z-2u = 11; \\ 4x-3y+2z+u = 11; \end{cases}$$ $$\begin{cases} x-2y+3z+u = -20; \\ 5x+3y-z-4u = -47; \\ 2x+4y-3z-2u = 0; \\ 3x-y+4z+5u = -6; \end{cases}$$

96. $$\begin{cases} x+y+z+u = 1; \\ 16x+8y+4z+2u = 9; \\ 81x+27y+9z+3u = 36; \\ 256x+64y+16z+4u = 100; \end{cases}$$ $$\begin{cases} 2x+3y = -2; \\ 2y-3z = 7; \\ 2z+3u = 2; \\ 2u-3x = -7; \end{cases}$$

97. $$\begin{cases} 4x+y+4z = -4; \\ 2y+5z = -12; \\ 3z-4u = 6; \\ u+x = -2; \end{cases}$$ $$\begin{cases} ax+by = l; \\ cx+du = m; \\ ex+fz = n; \\ gy+hz = p; \end{cases}$$

98. $$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58; \\ \frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76; \\ \frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79; \\ y+z+u = 248; \end{cases}$$ $$\begin{cases} 3x+2y+6z = -1; \\ 4x-5y+2z = -7\tfrac{3}{4}; \\ 9x+5u = 0; \\ 2y+3u = -1; \end{cases}$$

99. $$\begin{cases} 5x+2y+6z = 1; \\ 4x+5y+8u = 4; \\ 3x+2u = 17; \\ 4y+3u = 18; \end{cases}$$ $$\begin{cases} 5x+2y-z = 37; \\ 3x+4y+5u = 131; \\ 5x+3z = 29; \\ 6y+7u = -12; \end{cases}$$

100. $\begin{cases} 87x+44y+91z+69u = -1; \\ 93x+20y+36z = 1; \\ 62x+63y = -1; \\ 29x+14z = 1; \end{cases}$

101. $\begin{cases} 5x+3y-7z+u = 4; \\ 4x-7y+3z-4u = -8; \\ 8x-3u = 10; \\ 6y-5z = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x-5y-4z+3u = -\frac{2}{3}; \\ 5x-9y = -6\frac{1}{6}; \\ 3y+8z = 16; \\ 15u-7y = 15\frac{2}{3}; \end{cases}$

102. $\begin{cases} 3x+5y+7z+9u = 16; \\ 8x-7y = -20; \\ 6y-5z = -8; \\ 4z+3u = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 14x-15y+7z+6u = 1; \\ 13x-12y = 9; \\ 8y-7z = 2; \\ 10x+9u = 0. \end{cases}$

---

103. $\begin{cases} ax+by-(a-b)z = 2b^2; \\ x+y-z = 0; \\ (a-b)x+by-az = b^2-2ab; \end{cases}$ [a; b; a+b]

104. $\begin{cases} x+y+z = 4a+4b; \\ ax+by-(a+b)z = 2ab; \\ bx+ay-(a+b)z = a^2+b^2; \end{cases}$ [a+2b; b+2a; a+b]

105. $\begin{cases} x+y+z = 3a; \\ ax-2(a+1)y+az = -8a-4; \\ (2a-1)x+(2a+1)y-(3a-1)z = a^2+16a-2; \end{cases}$

106. $\begin{cases} x+z = a+b \\ ax-a^2y+bz = b^2 \\ bx-b^2y+az = 2ab-b^2 \end{cases}$ [a; 1; b]

107. $\begin{cases} (a-b)x+(a-b)y-(a+b)z = 0; \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 2a+2b; \\ (a+b)x-(a-b)z = 3a^2b+2ab^2-b^3; \end{cases}$ $\begin{bmatrix} a(a+b \\ b(a+b \\ a^2-b^2 \end{bmatrix}$

108. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y+az = 3a(a^2-b^2); \\ bx-by+az = a(a^2+b^2); \\ (a+b)x-(a-b)y-4bz = 4b^3; \end{cases}$ $\begin{bmatrix} a(a+b) \\ a(a-b) \\ a^2-b^2 \end{bmatrix}$

109. $\begin{cases} cx+ay+bz = 2(ab+ac+bc); \\ x+y+z = 2a+2b+2c; \\ (a-b)x+(b-c)y+(c-a)z = 0; \end{cases}$ $\begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix}$

110. $\begin{cases} x+y+z = 0; \\ ax+by = a^2-b^2; \\ bz-ay = b^2; \end{cases}$ [a; −b; b−a]

111. $\begin{cases} ax-by-b^2z = a^2; \\ bx+ay-a^2z = b^2; \\ y(b^2-a^2)+(a^3+b^3)z = ab(a+b); \end{cases}$ [a+b; a−b; 1]

112. $$\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y-az = -b^2; \\ ax-\frac{a-b}{2}z = ab; \\ -by+\frac{a+b}{2}z = \frac{a^2+b^2}{2}! \end{cases} \qquad \left[\frac{a+b}{2};\ \frac{a-b}{2};\ a;\right]$$

113. $$\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y-(a+b)z = 2b(a^2-b^2); \\ (a-b)x+(a+b)y+(a-b)z = 2a(a^2-b^2); \\ bx+ay+(a+b)z = 2a^3-a^2b-b^3; \end{cases}$$

114. $$\begin{cases} ax+(a+b)y-bz = 2a^2+2ab; \\ ax-(2a-b)y+bz = -a^2+3ab+2b^2; \\ (3a+b)x-(2a+3b)y+(a+3b)z = 3a^2+9ab+2b^2; \end{cases}$$

115. $$\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y-(a+b)z = 2b(a^2+b^2); \\ (a-b)x+(a+b)y+(a-b)z = 2a(a^2-b^2); \\ bx+ay = 2a^2b; \end{cases}$$

116. $$\begin{cases} 2x+2y-z = a+b; \\ ax+by-(a+b)z = -2ab; \\ (a+b)x+(a-b)y-(a-b)z = 2ab; \end{cases} \qquad \left[\begin{matrix} a;\ b; \\ a+b \end{matrix}\right]$$

Aufl.: **6.** $\frac{bc}{a+b}$; $\frac{ac}{a+b}$; 14; 11; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{20}$. **8.** a^2+ab; b^2+ab; $2a+5b$; $3a+4b$. **9.** $7a-15$; $-11a+8$; $2a+1$; $2a-1$. **10.** $1\frac{1}{2}$; $2\frac{3}{4}$; $a+b$; $a-b$. **15.** $a+2b-3$; $3a-2b+1$. **18.** 18; 88; 10; 888. **19.** $\frac{-6a^2+2b^2+d}{7a}$; $\frac{3a^2-b^2+3d}{7b}$; 4; 3. **22.** 3,1; 2,2. **23.** 100; 81. **27.** $\frac{3a+1}{3}$; $\frac{a+3}{3}$; $1-\frac{1}{a}+b$; $a-\frac{1}{b}+1$. **29.** $a+\frac{1}{a}$; $a-\frac{1}{a}$. **30.** $\frac{a}{a+b}$; $\frac{b}{a-b}$; $\frac{a-2b}{a}$; $\frac{a}{a+2b}$. **31.** $\frac{a+b-1}{ab}$; $\frac{(a+b)^2}{ab}$; $\frac{-4a+2b}{a^2-b^2}$; $\frac{3a+2b}{a^2-b^2}$. **33.** $\frac{a+b}{a-2b}$; $\frac{a-b}{a+2b}$. **36.** $\frac{2a}{3a-1}$; $\frac{3a}{2a-1}$. **38.** $\frac{1-a^2}{a}$; $1-\frac{1}{a}$. **39.** $7\frac{2}{3}$; $-8\frac{3}{4}$. **42.** $a+2$; $3n-a+1$. **43.** -1; -1. **44.** -2; -2. **45.** $\frac{1}{2}$; 2. **58.** 15; 12. **59.** 10; 7. **67.** 3; 2. **68.** 2; 3; -1; 7; -9; 8. **69.** 48; 33; -20; 16; $7\frac{3}{4}$; $5\frac{1}{2}$. **70.** 1; 11; 30; -5; -6; -4. **71.** 20; 24; 28; 4; 3; 2. **72.** $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{3}$; $3\frac{3}{4}$; 6; 9; $\frac{1}{3}$. **73.** $-1{,}1$; 0,7; 1,5; 5; 2,3; $-9{,}4$. **74.** 64; 3; 1; $-7\frac{1}{2}$; $-2\frac{4}{5}$; 21. **75.** 24; 36; 60; 62; 46; 34. **76.** 4; 1; -3. **77.** 5; -4; 2. **78.** $9\frac{4}{7}$; $5\frac{7}{8}$; $-8\frac{1}{7}$. **79.** 542; 337; 723. **80.** 18; 32; 10. **81.** $-9\frac{4}{7}$; $-8\frac{3}{7}$; $-7\frac{2}{7}$. **82.** 15; -17; 19. **85.** 0,72; 0,84; 0,96. **86.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{8}$. **87.** 17; 7; -3. **88.** 20; 30; 40. **89.** 7; 17; 10. **90.** 3; 2; 1. **95.** 4; 3; 1; 2; -7; 4; -4; 7. **96.** $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; 0; 5; -4; -5; 4. **97.** $1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $-2\frac{2}{3}$; $-3\frac{1}{2}$. **98.** 12; 30; 168; 50; $\frac{5}{6}$; $1\frac{3}{4}$; $-1\frac{1}{6}$; $-1\frac{1}{2}$. **99.** 23; 24; -27; -26; 37; -100; -52; 84. **100.** 1; -1; -2; 2. **101.** 2; 2;2; 2; $1\frac{1}{6}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{2}{3}$. **102.** 8; 12; 16; -20; 9; 9; 10; -10. **105.** $a+1$; $a+2$; $a-3$. **113.** $2b(a-b)$; a^2-b^2; $(a-b)^2$. **114.** $a+2b$; $a+b$; $2a+b$. **115.** $a(a+b)$; $b(a-b)$; a^2-b^2.

92.

Textgleichungen vom ersten Grad mit mehreren Unbekannten.

Über Textgleichungen mit mehreren Unbekannten gilt im allgemeinen dasselbe wie über solche mit einer Unbekannten. Ist nämlich nach mehreren Größen gefragt, die sich nicht alle leicht durch eine davon ausdrücken lassen, so definiert man jede derselben als eine Unbekannte und bezeichnet sie mit je einem Buchstaben; dann sucht man Gleichungssätze, welche die Gleichheit derjenigen Größen aussprechen, welche der Aufgabe gemäß einander gleich sein sollen. Durch Berechnung der in den Gleichungssätzen vorkommenden Größen mittels der in der Angabe enthaltenen Zahlen und der definierten Unbekannten bildet man die algebraischen Gleichungen. Die Anzahl der Gleichungssätze, also auch die Anzahl der aus ihnen gebildeten Gleichungen muß gleich der Anzahl der Unbekannten sein. Dann folgt die Auflösung der erhaltenen Gleichungen und die Diskussion des Resultates.

93.

1. Zwei Zahlen, deren Unterschied 19 ist, betragen zusammen 73; wie groß sind sie?

2. Zwei Zahlen zu suchen, deren Summe 162 und deren Verhältnis m : n ist. (Die Summe sei a, der Quotient sei b).

3. Zwei Stück Vieh, von denen das eine um 28 ℳ teurer ist, kosten zusammen 282 ℳ; was kostet jedes?

4. Zwei Arbeiter, von denen der eine 10 Tage, der andere 7 Tage arbeitet, erhalten zusammen 38,25 ℳ; wie viel gebührt davon jedem?

5. Der vierte Teil einer Zahl und $\frac{1}{3}$ einer anderen geben zusammen 16; $\frac{1}{6}$ der einen Zahl und $\frac{1}{5}$ der anderen sind zusammen um 4 größer als $\frac{1}{9}$ der Summe der Zahlen. Wie heißen die Zahlen?

6. Wird eine Zahl mit m und m′ multipliziert, so sind die Produkte um a bezüglich a′ größer als eine andere Zahl. Wie groß sind diese zwei Zahlen?

7. A sagte zu B: gib mir 100 ℳ, so habe ich so viel als du. Nein, sagte B zu A, gib du mir lieber 100 ℳ, so habe ich doppelt so viel als du. Wie viel hatte jeder? [500; 700 ℳ]

8. 6 ℔ Schinken und 8 ℔ Wurst kosteten 13,6 ℳ; 7 ℔ Schinken und 9 ℔ Wurst kosteten 15,6 ℳ; was wird dann eine Sendung von 8 ℔ Schinken und 5 ℔ Wurst kosten? [13,6 ℳ]

9. A tauscht 105 a Wald gegen 45 a Wiesen des B; als aber B 31 a Wiesen gegen 100 a ebensoguten Wald des C eintauschen wollte, mußte er noch 498 ℳ daraufzahlen. Wie hoch wurde 1 a Wald und 1 a Wiese berechnet? [18; 42 ℳ]

10. Verkauft der Bauer zwei Kühe, so hat er ebensoviel Kühe wie Ochsen; verkauft er aber zwei Ochsen, so hat er nur halb so viel Ochsen als Kühe. Wieviel Ochsen und Kühe hatte er?

11. Ein Bruch erhält den Wert $\frac{3}{4}$, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermehrt, dagegen den Wert $\frac{2}{3}$, wenn man um 1 vermindert. Wie heißt der Bruch? [$\frac{5}{7}$]

12. Zwei Knaben spielten um Nüsse; im ersten Spiele gewann B 7 Nüsse, hatte nun um $\frac{1}{5}$ mehr Nüsse als A und verzehrte deshalb 6 Stück. Im nächsten Spiele verlor er aber 10 Nüsse und hatte deshalb nur mehr halb so viel als A. Wieviel hatte jeder anfangs? [37; 29]

13. Der Umfang eines Rechteckes, dessen Seiten sich wie 9 : 13 verhalten, ist 3,74 m; wie lang sind die Seiten? [0,765; 1,105]

14. Man soll die Zahl a in drei Teile teilen, so daß der 1. zum 2. sich wie m : n, der 2. zum 3. sich wie p : p verhält; wie groß sind die Teile?

15. Zwei Bauern, von denen der eine 4 Soldaten auf 5 Tage, der andere 6 Soldaten 7 Tage im Quartier hatte, erhielten zusammen 14,26 ℳ Verpflegungsgelder; wieviel gebührt jedem?

16. Zwei Arbeiter, von denen der eine in jeder Stunde 12 Stck., der andere 13 Stck. fertigt, verdienen zusammen 9,5 ℳ; was trifft auf jeden? [4,94; 4,56 ℳ]

17. Zwei Arbeiter, von denen der eine 4 Std. zu einem Stück braucht, während der andere 5 Std. dazu braucht, verdienen zusammen 137,7 ℳ; wieviel trifft auf jeden? [76,5; 61,2 ℳ]

18. Zwei Zahlen, deren Summe = 34, haben die Eigenschaft, daß ihr Produkt ungeändert bleibt, wenn man die eine um 4 vermehrt und die andere um 4 vermindert. Wie heißen die Zahlen?

19. Vermindert man jede von zwei Zahlen um 5, so verhalten sie sich wie 4 : 5; vermehrt man jede um 7, so verhalten sie sich wie 6 : 7; wie heißen die Zahlen? [29; 35]

20. Jemand hat zwei Fässer und in jedem eine gewisse Menge Wein; gießt er die 20 *l*, welche sich in einem 3. Fasse befinden, in das erste, so hat er in ihm doppelt so viel als im zweiten; gießt er sie aber in das zweite, so hat er in ihm um $\frac{1}{4}$ mehr als im ersten; wieviel hat er in jedem Fasse? [40; 30 *l*]

21. Wenn man die erste von zwei Zahlen um a vergrößert, so ist sie m mal so groß als die zweite; vergrößert man aber die zweite um b, so ist sie n mal so groß als die erste. Wie heißen die Zahlen?

22. Um ein Spielzeug im Werte von einer Mark kaufen zu können, bedurfte entweder der eine Knabe zu seiner Barschaft noch die Hälfte von der des anderen, oder der andere zu seiner Barschaft noch $\frac{2}{3}$ von der des einen. Wieviel hatte jeder? [75; 50 ₰]

23. Als A und B mitsammen 2 Flaschen Niersteiner des A und 3 Flaschen Ungsteiner des B tranken, mußte B dem A 35 ₰ Entschädigung geben; als sie aber 4 Flaschen Niersteiner des A und 5 Flaschen Ungsteiner des B tranken, mußte B dem A 1 ℳ 45 ₰ Entschädigung geben; wie hoch wurde jede Flasche gerechnet?

24. A und B wollten zusammen 2 Flaschen Niersteiner des A und 1 Flasche Rüdesheimer des B trinken, und es hätte B dem A nur 90 ₰ zur Ausgleichung geben müssen; da sich aber noch C mit 2 Flaschen Ungsteiner einstellt und mittrinkt, so gibt A noch eine Flasche Niersteiner und B noch 1 Flasche Rüdesheimer dazu und es mußte schließlich C dem A 2 ℳ und dem B 1 ℳ 10 ₰ zur Abgleichung geben. Wie hoch rechnete jeder seine Flasche?

25. 2 Gemeinden müssen zu einem Straßenbau gleichmäßig Spanndienste thun. Wenn nun die erste mit 3 zweispännigen und 7 einspännigen Fuhren 12 Tage, die andere aber mit 4 zweispännigen und 8 einspännigen Fuhren 11 Tg. lang fährt und deshalb die zweite von der ersten 32 ℳ als Abgleichung erhält, so fragt sich, wie hoch jede Fuhre gerechnet wird, wenn die zweispännige nach Leistung und Bezahlung mit $1\frac{1}{2}$ der einspännigen angeschlagen wird? [6; 4 ℳ]

26. Ein Wasserbehälter von 210 *hl* Inhalt kann durch zwei Öffnungen gefüllt werden. Als die erste 4, die zweite 5 Stunden geöffnet wurde, lieferten sie 90 *hl*, und als die erste 7, die zweite $3\frac{1}{2}$ Std. geöffnet wurde, erhielt man 126 *hl*. Wieviel *hl* gibt jede Öffnung in der Stunde und wann wird der Behälter voll, wenn beide Öffnungen zugleich Wasser liefern? [15; 6 *hl*; 10 Std.]

27. Ein Jäger hatte Hasen und Rebhühner erbeutet, zusammen 19 Stück; da er aber seine Hasen gegen Rebhühner umtauschte, wobei er für je 4 Hasen 9 Rebhühner erhielt, so hatte er schließlich 34 Rebhühner; wieviel von jeder Sorte hatte er anfangs?

28. Als einer 35 *a* Ackerland gegen 29 *a* besseren Landes tauschte, mußte er 20 ℳ Aufgeld geben. Als er aber 42 *a* seines Landes gegen 34 *a* anderen Landes tauschte, bekam er 9 ℳ Aufgeld, da dieses andere eingetauschte Land um 50 ₰ für 1 *a* billiger gerechnet wurde als das früher eingetauschte. Zu wieviel ℳ wurde jede *a* gerechnet? [16; 20 ℳ]

29. Von zwei Meistern beschäftigte der eine 6 Gesellen 14 Tg. à 9 Std., der andere 8 Gesellen 12 Tg. à 10 Std. Zusammen erhielten sie 357,5 ℳ Lohn; wieviel trifft auf jeden?

30. Ein Bedienter sollte 7 Flaschen Weißwein und 6 Flaschen Rotwein holen, und bekam dazu 16 ℳ 40 ₰; als ihm aber der Händler 30 ₰ herausgeben wollte, merkte er, daß er den Auftrag verkehrt ausgerichtet hatte. Was kostete eine Flasche von jeder Sorte?

31. Zwei Zahlen geben addiert s, durch einander dividiert zum Quotienten q und zum Rest r; wie heißen sie?

32. Ein Kapital wächst in 5 Jahren mit den Zinsen ebensohoch an als in 4 Jahren, wenn der Zinsfuß um 1 % höher ist, nämlich jedesmal auf 6000 ℳ; wie groß ist Kapital und Zinsfuß?

33. Dividiert man die eine von zwei Zahlen durch 12, die andere durch 5, so erhält man als Summe 12; dividiert man aber die eine durch 5, die andere durch 7, so erhält man als Summe 17; wie heißen die Zahlen? [60; 35]

34. 3 Gesellen und 2 Handlanger verdienen zusammen 75,6 ℳ, wobei die Gesellen 8 Tg., die Handlanger 5 Tg. arbeiten. Wenn nun ein Geselle in 2 Tagen nur um 60 ₰ weniger Lohn erhält als ein Handlanger in 3 Tagen, wie groß ist der Taglohn eines Gesellen und eines Handlangers? [2,4; 1,8 ℳ]

35. Mischt man 3 ℔ Waizenmehl mit 5 ℔ Roggenmehl, so kostet das ℔ der Mischung 21 ₰; mischt man aber umgekehrt 5 ℔ Waizenmehl mit 3 ℔ Roggenmehl, so kostet das ℔ der Mischung 23 ₰; was kostet je 1 ℔ Waizen- und Roggenmehl? [26; 18 ₰]

36. Mischt man 7 *l* schlechten und 8 *l* guten Wein, so kostet die Mischung 1,76 ℳ pro *l*; mischt man aber 3 *l* schlechten und 7 *l* guten, so kostet der Liter 1,81 ℳ; wie teuer ist jede Sorte?

37. Jemand hat zwei Fässer und in jedem eine gewisse Quantität Wein. Um in beiden gleich viel zu bekommen, gießt er aus dem ersten Fasse so viel in das zweite, als schon darin ist, gießt hierauf wieder aus dem zweiten in das erste so viel als nun im ersten ist, und endlich wieder aus dem ersten in das zweite so viel als noch im zweiten übrig ist. Am Ende hat er in jedem Fasse 16 *l* Wein; wieviel war anfangs darin? [22; 10 *l*]

38. Eine Gesellschaft brachte bisher 660 ℳ auf. Als aber die Mitgliederzahl um 4 abnahm, mußte man den Beitrag um 10 % erhöhen, um dieselbe Summe zu erzielen. Wie groß war die Mitgliederzahl und der Beitrag? [44; 15 ℳ]

39. Die Summe zweier Zahlen soll 13 (a), der Unterschied ihrer Quadrate 39 (b) sein; welche Zahlen sind es? [8; 5]

40. A geht von hier nach M; eine Minute später folgt ihm B, der in jeder Minute 20 *m* mehr zurücklegt als A, und trifft den A 5 Minuten nach Abgang des A. B geht bis M, kehrt um und trifft den A zum zweitenmale 400 *m* vor M; wieviel *m* legt jeder in 1 Minute zurück, nach wieviel Minuten treffen sie sich zum zweitenmale, und wie weit ist von hier bis M?

41. Zwei Brüche, von denen der eine $2x+3$, der andere $3x+2$ als Nenner hat, geben addiert $\frac{12x+13}{(2x+3)(3x+2)}$; man suche die Zähler dieser Brüche? [2; 3]

42. 10300 ℳ Kapital, welche zum Teil zu 4 %, und zum Teil zu 5 % ausgeliehen sind, bringen jährlich 480 ℳ Zinsen. Welcher Teil steht zu 4 %, welcher zu 5 %? [3500; 6800 ℳ]

43. 7068 Stück wurden von 21 Arbeitern in 114 Stunden gefertigt; der eine Teil der Arbeiter, welcher Hülfsmaschinen hatte, fertigte pro Mann in 2 Std. 9 Stck.; der andere Teil der Arbeiter fertigte pro Mann in 3 Std. 7 Stck. Wieviel Arbeiter arbeiteten ohne und wieviel mit Maschinen? [15; 6]

44. Von zwei Sorten Spiritus enthält die eine in 7 *l* Spiritus 4 *l* Alkohol, die andere in 8 *l* Spiritus 7 *l* Alkohol; wieviel *l* jeder Sorte sind zur Herstellung einer Sorte verwendet worden, welche in 15 *l* Spiritus 11 *l* Alkohol enthält? [7; 8 *l*]

45. Zwei a Meter von einander entfernte Körper bewegen sich auf einander zu mit Geschwindigkeiten, die sich wie $c_1 : c_2$ verhalten; welche Wege legt jeder zurück, bis sie sich treffen?

46. Zwei Körper A und B, deren Abstand $= d\,m$, gehen einander entgegen. Geht A um a Min. früher fort, so treffen sie sich in t_1 Min. nach Abgang des A; geht aber B um b Min. früher fort, so treffen sie sich t_2 Min. nach Abgang des B. Wie groß sind ihre Geschwindigkeiten?

47. Zwei Knaben standen neben einander in einer Reihe mehrerer Knaben. „Ich habe doppelt so viel zu meiner linken als zu meiner rechten" sagte der eine. „Und ich, sagte sein Nachbar zur linken, habe links und rechts gleich viel." Wieviel Knaben waren es? [7]

48. Addiert man zum dritten Teil einer um 5 vergrößerten Zahl den 5. Teil einer zweiten um 4 vergrößerten Zahl, so erhält man die erste Zahl. Man erhält aber die zweite, wenn man zur Hälfte der um 7 vergrößerten ersten Zahl addiert das Viertel der um 5 vergrößerten zweiten Zahl. Wie groß ist jede Zahl? [7; 11]

49. Für 7 Zwanzigfrankstücke und 6 östr. Zehnguldennoten bekam ich 214,5 *M*; für 5 Zwanzigfrankstücke und 8 östr. Zehnguldennoten bekam ich 215,8 *M*; wie hoch wurde 1 Zwanzigfrankstück und 1 Zehnguldennote gerechnet? [16,2; 16,85 *M*]

50. Zwei Arbeiter fertigen zusammen 147 Stck., wobei der eine 36 Tage, der andere 28 Tg. arbeitet. Der zweite bringt in 4 Tg. nur 2 Stck. mehr fertig, als der erste in 3 Tg. Wieviel Stck. arbeitet jeder täglich? [$2\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{4}$ Stck.]

51. Als ein Standglas $\frac{5}{8}$ mit Wasser gefüllt war, wog es 335 *g*; als es $\frac{5}{7}$ mit Wasser gefüllt war, wog es 504,6 *g*; was wiegt es leer, und wieviel Wasser faßt es? [147,5; 500 *g*]

52. A und B, welche 61 *km* von einander entfernt wohnen, gehen einander entgegen; geht A $1\frac{1}{2}$ Std. früher fort, so treffen sie sich 6 Std. nach Abgang des B; geht aber B $4\frac{2}{7}$ Std. früher fort, so treffen sie sich $4\frac{5}{7}$ Std. nach Abgang des A; wieviel *km* legt jeder in 1 Std. zurück? [$4\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{3}$ *km*]

53. Ein Behälter, der 1680 *l* faßt, kann durch zwei Röhren gefüllt werden; er wird voll, wenn die erste 15 Min. und die zweite

16 Min. lauft, und auch, wenn die erste 20, die zweite 12 Min. lauft. Wieviel Liter liefert jede Röhre in einer Minute? [48; 60]

54. 37,8 Zentner Futter reichen für 6 Kühe und 4 Ochsen 35 Tage lang; hätte man 3 Ochsen 10 Tage vorher abgegeben, so hätte der Vorrat um 5 Tg. länger ausgereicht. Wieviel bekam jedes Stück Vieh täglich? [10; 12 ℔]

55. Zwei Knaben spielen um Nüsse. A gewinnt zuerst 7 Nüsse und da er nun $2\frac{1}{2}$ mal so viel hat als B, so verzehrt er einige. Nun verliert er 11 Nüsse und beide haben nun gleichviel. Nun verzehrt B ebensoviel Nüsse als vorher A, und gewinnt noch 4, so daß sie wieder gleichviel Nüsse haben. Wieviel hatte jeder anfangs, und wieviel wurden verzehrt? [A = 43; B = 27; verz. 8]

56. Vermindert man jede von 3 Zahlen um eine gewisse Zahl, so verhalten sie sich wie 4 : 5 : 6; vermehrt man aber jede um doppelt so viel, als man sie vorher vermindert hatte, so verhalten sich die zwei ersten wie 7 : 8, und die letzte ist 54. Wie heißen die Zahlen und um wieviel wurde jede vermindert? [30; 36; 42; 6]

57. Ein Fußgänger geht von A nach B; ein Reiter reitet gleichzeitig von B nach A, trifft den Fußgänger, nachdem dieser $\frac{2}{7}$ des Weges zurückgelegt hatte, kehrt in A um, reitet wieder nach B, holt den Fußgänger 300 *m* vor B ein und ist 2 Minuten darnach in B. Wieweit ist von A nach B, und wie lange braucht jeder?

58. Jemand hat zwei Sorten Silber; mischt er 8 *tt* der ersten mit 7 *tt* der zweiten, so wird die Mischung 832 fein; mischt er aber 13 *tt* der ersten mit 11 *tt* der zweiten, so wird sie 830 f.; wie fein ist jede Sorte? [720; 960]

59. Ein Kaufmann verkauft eine Ware mit Nutzen, eine andere mit Schaden, so daß, wenn er von der ersten für 33 *M*, von der anderen für 11,9 *M* verkauft, er im Ganzen 90 *ꝺ* Nutzen hat; wenn er aber von der ersten für 49,5 *M* und von der zweiten für 34 *M* verkauft, so hat er 1,5 *M* Schaden. Wieviel $^0/_0$ beträgt Nutzen und Schaden an jeder Sorte? (Die Werte 33; 11,9; 49,5; 34 *M* sind als Verkaufspreise gemeint). [10; 15]

60. Eine Metallegierung von 600 *kg*, welche aus 1 Teil Zinn 1 Tl. Zink und 8 Tl. Kupfer bestand, wurde mit 300 *kg* einer ähnlichen Legierung vermischt, so daß die entstandene Legierung auf 3 Tl. Zinn, 4 Tl. Zink und 23 Tl. Kupfer enthielt. In welchem Verhältnis standen die Metalle in der zugesetzten Legierung?

61. Eine Arbeit kann von einer gewissen Anzahl Arbeiter in einer bestimmten Zeit gefertigt werden. Nimmt man 10 Arbeiter mehr, so braucht man 8 Tg. weniger, nimmt man 5 Arbeiter weniger, so braucht man 7 Tage länger. Für wieviel Arbeiter und für wie lange war Arbeit vorhanden? [25 Arb. 28 Tg.]

62. Von A nach B braucht einer eine gewisse Zeit; macht er aber in jeder Stunde $\frac{2}{3}$ *km* weniger, so braucht er $1\frac{4}{5}$ Std.

länger; macht er aber $\frac{1}{2}$ *km* mehr, so braucht er 1 Std. weniger. Wieweit ist von A nach B? [36 *km*]

63. Zu einer gewissen Strecke braucht ein Fußgänger eine bestimmte Zeit; wenn er aber in der Stunde $\frac{1}{2}$ *km* weniger macht, braucht er $\frac{2}{3}$ Std. länger; wenn er aber in der Stunde $\frac{1}{2}$ *km* mehr macht, legt er in einer um $\frac{1}{3}$ Std. kürzeren Zeit doch einen um 1 *km* längeren Weg zurück. In welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit geht er in jedem dieser 3 Fälle? [$5\frac{1}{3}$ Std.; $4\frac{1}{2}$ *km* i. 1. F.]

64. Eine Dampfpumpe hebt in jeder Sekunde eine bestimmte Menge Wasser auf eine gewisse Höhe. Soll sie das Wasser 2 *m* höher heben, so kann sie nur um 30 *l* weniger Wasser fördern; soll sie es um noch 2 *m* höher heben, so kann sie nur um noch 20 *l* weniger Wasser heben. Wieviel Wasser hebt die Pumpe und wie hoch?

65. Ein Knecht beackerte einen Acker in gewisser Zeit; als er einen um 20 *m* kürzeren Acker pflügte, brachte er in derselben Zeit in der Breite 5 *m* mehr fertig, und als er einen um 50 *m* kürzeren Acker pflügte, brachte er in der Breite um 15 *m* mehr fertig. Wie lang und breit war der erste Acker? [200; 45 *m*]

66. Ein Vater war vor 3 Jahren 3mal so alt als seine zwei Söhne damals waren, und nach einem Jahre wird er 2mal so alt sein, als sie dann sein werden. Wie alt ist jetzt der Vater und jeder Sohn, wenn von diesen der eine 4 Jahre älter ist als der andere? [39; 11; 7]

67. Drei Knaben spielen um Nüsse. Zuerst verliert A an B und C so viel, als jeder schon hat; dann verliert B an A und C ebenso (so viel als A und C hat); dann verliert C ebenso an A und B. Nun hat jeder gleichviel, nämlich 32 Nüsse. Wieviel hatte jeder anfangs? [52; 28; 16]

68. Drei Knaben spielen um Nüsse. Zuerst gewinnt A die Hälfte von B und C und hat nun doppelt so viel, als jetzt B und C zusammen haben. Nun gewinnt C und zwar auch die Hälfte von A und von B, hat aber nun 10 Nüsse weniger als das Doppelte von A. Nun gewinnt A nochmal die Hälfte von B und von C, und hat nun 90 Nüsse. Wieviel hatte jeder anfangs? [45; 40; 50]

69. A ackert mit 4 Pferden und 2 Ochsen, B mit 3 Pferden und 4 Ochsen. Zusammen verdienen sie 187 *M*. Wieviel gebührt jedem, wenn 2 Pferde so viel arbeiten wie 3 Ochsen? [$90\frac{2}{3}$; $96\frac{1}{3}$]

70. Zwei Freunde, welche 41 *km* von einander entfernt wohnen, gehen einander entgegen. Der erste, welcher 5 *km* in der Stunde geht, geht etwas später fort, als verabredet war, und trifft deshalb seinen Freund nach 4 Std. 20 Min. Das nächstemal geht er um doppelt so viel vor der verabredeten Zeit fort und trifft seinen Freund nach 5 Stunden. Wie läßt sich hieraus die Geschwindigkeit seines Freundes berechnen? [4 *km*. Verspät. $\frac{1}{2}$ Std.]

71. Zwei Freunde, welche $23\frac{1}{2}$ *km* von einander entfernt

wohnen, gehen einander entgegen, der erste macht 4 *km* in der Stunde, der andere $4\frac{1}{2}$ *km*; doch hatte sich diesmal der erste beim Aufbruch etwas verspätet. Das nächstemal verspätete er sich um 2mal mehr Zeit beim Aufbruch, und machte deshalb 5 *km* in der Stunde; da aber der zweite diesmal nur 4 *km* in der Stunde gemacht hatte, so mußte der zweite diesmal um $\frac{1}{6}$ Std. länger marschieren als das erstemal. Wie lange marschierte jeder jedesmal?

72. Zwei Körper, die 700 *m* von einander entfernt sind, bewegen sich hintereinander; geht der hintere 4 Min. früher fort, so holt er den vorderen in 46 Min. ein; geht er nur 1 Min. früher fort, so holt er ihn in 64 Min. ein; welche Geschwindigkeit hatte jeder? [Vordere 60 *m*; hintere 70 *m*]

73. Ein Arbeiter hatte schon 65 Stck. fertig, als ein zweiter anfing; da aber der zweite fleißiger war, und der erste einen Tag durch Arbeit versäumte, holte der zweite den ersten in 16 Tagen ein. Hätte jeder täglich ein Stück mehr gemacht, so hätte der zweite den ersten (der ja einen Tag versäumte) in 14 Tg. bis auf 5 Stück eingeholt. Wieviel fertigt jeder täglich? [17; 20]

74. Zwei Waren kosten zusammen im Einkauf 28 ℳ; da der Kaufmann die eine nur mit 9 % Gewinn verkaufen kann, so muß er die andere mit 13 % Gewinn verkaufen, um im Ganzen 10 % zu gewinnen. Was kostet jede Ware einzeln? [21; 7 ℳ]

75. Um einen Weg von $31\frac{1}{2}$ *km* in $5\frac{1}{3}$ Std. zurückzulegen, will einer die ersten $\frac{2}{3}$ des Weges zu Wagen und den Rest zu Fuß zurücklegen; da aber schon nach dem ersten Drittel der Wagen schadhaft wird, und er zu Fuß weiter gehen muß, so braucht er im ganzen $6\frac{1}{6}$ Std. Wieviel legt er zu Fuß und wieviel zu Wagen in einer Stunde zurück? [7 *km* z. W. $4\frac{1}{2}$ *km* z. F.]

76. 189 Stck. wären durch gemeinsame Maschinen- und Handarbeit in 9 Tagen fertig geworden; da aber nach 4 Tagen die Maschine schadhaft wird, so werden sie erst nach 25 Tagen fertig. Wieviel Stück lieferte die Maschine, wieviel die Handarbeit täglich?

77. Wenn einer ein Beet von 30 *m* Länge und $1\frac{1}{2}$ *m* Breite zu $\frac{2}{3}$ mit Salat und $\frac{1}{3}$ mit Blumenkohl bepflanzt, braucht er 990 Pflanzen; bepflanzt er aber $\frac{1}{3}$ mit Salat und $\frac{2}{3}$ mit Blumenkohl, so braucht er 855 Pflanzen. Wieviel Pflanzen von jeder Sorte kommen auf den Quadratmeter? [25 S. 16 B.]

78. Auf 9 *qm* pflanzte einer 120 Salat- und 60 Blumenkohlpflanzen; als er 600 Pflanzen und zwar $\frac{3}{5}$ davon Salat- und $\frac{2}{5}$ Blumenkohlpflanzen pflanzte, brauchte er 31 *qm*; wieviel Pflanzen von jeder Sorte stehen auf 1 *qm*? [24 S. 15 B.]

79. Zum Besäen eines Feldes braucht man 42 *l* Samen; besät man aber dasselbe Feld mit einem anderen Samen, bei welchem der Liter für 4 *a* mehr reicht, als beim ersten Samen, so

braucht man nur 36,4 *l*. Wie groß ist das Feld, und für wieviel *a* reicht 1 *l*? [1092 *a*; 1 *l* f. 26 *a*]

80. In drei Geldbeuteln befindet sich je eine Summe Geldes. Legt man 20 *M* aus dem 1. in den 2., so enthält er 4mal so viel Geld als im 1. übrig ist. Legt man aber aus dem 2. in den 3. 60 *M*, so ist in ihm $1\frac{3}{4}$mal so viel, als im 2. übrig ist. Legt man aber aus dem 3. in den 1. 40 *M*, so bleibt im 3. doch noch $2\frac{1}{7}$mal so viel, als nun im 1. ist. Wieviel ist in jedem Beutel?

81. Drei Maurer, A, B, C, sollen gemeinsam eine Mauer aufführen. A und B würden gemeinschaftlich die Mauer in 12 (a) Tagen vollenden, B und C würden in 20 (b) Tg., A und C in 15 (c) Tg. fertig werden. Wie lange braucht jeder einzeln, und wie lange würden alle drei gemeinschaftlich brauchen?

82. Man soll 36 in 3 Teile zerlegen, so daß der zweite das arithmetische Mittel aus den beiden andern ist, und das erste um 10 kleiner ist als das dritte. [7; 12; 17]

83. Man soll 28 in vier Teile zerlegen, so daß der zweite das arithmetische Mittel aus dem 1. und 3., der dritte das arithmetische Mittel aus dem 2. und 4. ist, und die Summe aus dem 1. und 2. sich zur Summe aus dem 3. und 4. wie 5 : 9 verhält?

84. Ein Wasserbehälter kann durch 3 Röhren gefüllt werden. Durch die 1. und 2. gemeinsam geschieht das in 70 Min. durch die 1. und 3. in 84 Min. und durch die 2. und 3. in 140 Min. Wann wird er voll, wenn die Röhren gemeinsam fließen? [60]

85. Zwei Körper A und B folgen einem vorangehenden C, der 30 *m* Vorsprung hat; nach 10″ wird C von B und nach 30″ von A eingeholt; hätte A seine Bewegung nur um 1″ später begonnen, so wäre B schon nach 5″ ebensoweit hinter C als vor A gewesen. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich jeder Körper?

86. Zwei Körper A und B folgen einem Körper C, der einen Vorsprung von 30 *m* hat. Nach 10″ ist B ebensoweit hinter C als vor A, nach 20″ ist B ebensoweit vor C, als A hinter C; hätte aber A seine Bewegung nur um eine Sekunde später begonnen, so hätte B diese letzte Stellung erst nach 21″ erhalten. Welche Geschwindigkeit hat jeder? [3; 4; 2 *m*]

87. Drei Körper bewegen sich hinter einander in derselben Richtung; der vorderste ist C, 30 *m* hinter ihm ist B, und 20 *m* hinter B ist A; A holt B in 20″, B den C in 30″ ein; hätte aber C um $2\frac{1}{2}$″ später sich zu bewegen angefangen, so wäre er von A und B zugleich eingeholt worden. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich jeder Körper? [A = 6; B = 5; C = 4 *m*]

88. Drei Gemeinden A, B, C, deren Beiträge zu den gemeinsamen Lasten sich wie 5 : 4 : 3 verhalten, bauen zusammen ein Pfarrhaus, ein Schulhaus und ein Feuerhaus. Da nun A das Pfarrhaus, B das Schulhaus, C das Feuerhaus baut, so muß zum

Abgleich C dem A 800 ℳ und dem B 1100 ℳ zahlen; hätte aber B das Feuerhaus und C das Schulhaus gebaut, so hätte B dem C 3000 ℳ (und B dem A 800 ℳ) geben müssen. Wie hoch wurde jeder Neubau gerechnet?

Aufl.: **5.** 24; 30. **10.** 8 K. 6 Ochs. **15.** 4, 6; 9,66 ℳ. **18.** 15; 19. **23.** N. = 2,6 ℳ; U. = 1,5 ℳ. **24.** 2,7; 3,6; 1,5 ℳ. **27.** 12 H. 7 R. **29.** 157,5; 200 ℳ. **30.** W. = 1,4; R. = 1,1 ℳ. **32.** 5000 ℳ 4%. **36.** 1,6; 1,9 ℳ. **40.** 80 *m*; 100 *m*; 40 Min.; 4000 *m*. **57.** 900 *m*; F. = 20 Min. R. = 16 Min. hin u. zurück. **60.** 30; 60; 210. **64.** 150 *l*; 8 *m*. **71.** Das 1. mal $2\frac{1}{2}$ Std. 3 Std.; das 2. mal $2\frac{1}{6}$ Std. $3\frac{1}{3}$ Std. **76.** 16 Stck. d. Maschine, 5 Stck. d. H. **80.** 120; 380; 500. **81.** 20; 30; 60 Tg. 10 Tg. **83.** 4, 6, 8, 10. **85.** 5; 7; 4. **86.** Pfarrh. 10300, Schulh. 8700, Feuerh. 3800 ℳ.

3. Abschnitt. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

94.

Ist eine Gleichung nach den Regeln von **82** und **84** vereinfacht, sind also Wurzeln, Nenner und Klammern beseitigt, und diejenigen Glieder, welche die Unbekannte in gleich hoher Potenz enthalten, in je ein Glied vereinigt, und enthält die Gleichung die Unbekannte höchstens in der zweiten Potenz, so nennt man sie eine Gleichung zweiten Grades oder eine quadratische Gleichung.

Die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades ist $ax^2 + bx = c$.

Ist hiebei $b = o$, fehlt also das Glied mit x, so heißt die Gleichung eine rein quadratische. Ihre allgemeine Form ist $ax^2 = c$, oder, wenn man mit a dividiert, $x^2 = m$. Hieraus ist $x = \pm\sqrt{m}$. Sie hat also die zwei Wurzeln $x_1 = +\sqrt{m}$, $x_2 = -\sqrt{m}$. Beide Wurzeln sind algebraisch gleich berechtigt, denn jede genügt der Gleichung.

Enthält die Gleichung alle drei Glieder, so nennt man sie eine gemischt quadratische.

Sie hat die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = o$ oder, wenn man mit a wegdividiert:

$$x^2 + px + q = o.$$

Um sie aufzulösen, verwandelt man die linke Seite in ein vollständiges Quadrat, indem man q auf die rechte Seite schafft und dann beiderseits addiert $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, das Quadrat des halben Koeffizienten von x, die quadratische Ergänzung genannt. Man hat dann:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4}, \text{ also}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=-q+\frac{p^2}{4},\text{ hieraus}$$

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}},\text{ also}$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}.$$

Man hat demnach die zwei Wurzeln:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}.$$

Beide Wurzeln sind gleichberechtigt, denn jede genügt der gegebenen Gleichung.

Steht das konstante Glied (q) der Gleichung auch auf der linken Seite, so sagt man, die Gleichung ist auf Null gebracht.

Die Gleichung $(x-a)(x-b)=0$ hat die Wurzeln a und b. Denn da, wenn ein Produkt $=0$ sein soll, stets entweder der eine Faktor $=0$ sein muß, oder der andere, so zerspaltet sich die Gleichung in die zwei linearen Gleichungen

$$x-a=0,\qquad x-b=0;$$

und diese liefern $x_1=a$, $x_2=b$.

Die vorgelegte Gleichung gibt, ausmultipliziert,

$$x^2-(a+b)x+ab=0,$$

vergleicht man diese Form mit

$$x^2+px+q=0,\text{ so sieht man, daß}$$

$$p=-(a+b),\quad q=ab.$$

Das heißt: In jeder (reduzierten) quadratischen, auf Null gebrachten Gleichung ist der Koefficient (p) von x gleich der negativen Summe der Wurzeln, und das konstante Glied (q) gleich dem Produkt der Wurzeln.

Aus dieser Eigenschaft der Koeffizienten der Gleichung kann man auf das Vorzeichen der Wurzeln schließen, und häufig deren Werte selbst finden auf folgende Art.

a. Ist q positiv, ist also das Produkt der Wurzeln positiv, so haben die Wurzeln gleiches Zeichen, sie sind also entweder beide positiv, oder beide negativ, oder beide imaginär (komplex), doch schließen wir letzteren Fall vorläufig aus.

Ist hiebei p positiv, so heißt das, die negative Summe der Wurzeln ist positiv, also ist die Summe der Wurzeln negativ, also sind beide Wurzeln negativ. Ist aber p negativ, so folgt ebenso, daß beide Wurzeln positiv sind.

Beispiel: $x^2+5x+6=0$ gibt $x_1=-2$, $x_2=-3$;
$x^2-7x+12=0$ gibt $x_1=4$, $x_2=3$.

b. Ist q negativ, ist also das Produkt der Wurzeln ne=

gativ, so haben die Wurzeln *verschiedenes Zeichen*, die eine $+$, die andere $-$.

Ist hiebei p *positiv*, so heißt das, die negative Summe der Wurzeln ist positiv, also ist die Summe selbst negativ, und da sie aus einem positiven und negativen Gliede besteht, so ist die *größere Wurzel negativ*. Ist hiebei p negativ, so ergibt sich ebenso, daß die *größere Wurzel positiv* ist.

Beispiel: $x^2 + 3x - 10 = 0$ gibt $x_1 = -5$, $x_2 = 2$;
$x^2 - x - 20 = 0$ gibt $x_1 = 5$, $x_2 = -4$.

c. Aus $x^2 + px + q = 0$ folgt

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}.$$

Soll die Wurzel imaginär werden, so muß der Radikand der Quadratwurzel negativ sein. Da aber $\frac{1}{4}p^2$ stets positiv, und $-q$ nur dann negativ ist, wenn q selbst positiv ist, so ist der Radikand nur dann negativ, wenn $q > \frac{1}{4}p^2$, oder $p^2 < 4q$. Also folgt: Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung sind nur dann imaginär, wenn q positiv und wenn zugleich $p^2 < 4q$. Die Wurzeln sind dann, wenn p und q reelle Größen bedeuten, stets konjugiert imaginär.

Beispiel: $x^2 - 2x + 5 = 0$ gibt $x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$;
$x^2 - 5x + 8 = 0$ gibt $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7}$.

95.

Besondere Arten quadratischer Gleichungen.

Fehlt in der allgemeinen quadratischen Gleichung das konstante Glied, hat sie also die Form

$$x^2 + bx = 0,$$

so kann man links den Faktor x ausscheiden, also

$$x(x + b) = 0;$$

sie zerfällt dann, da entweder der eine Faktor gleich Null sein muß oder der andere, in die zwei Gleichungen

$$x = 0, \quad x + b = 0, \text{ und liefert}$$
$$x_1 = 0, \quad x_1 = b.$$

Dasselbe gilt allgemein: *Wenn eine auf Null gebrachte Gleichung den Faktor x hat, so hat sie die Wurzel* $x = 0$; die anderen Wurzeln findet man, indem man den anderen Faktor gleich Null setzt, und diese Gleichung auflöst.

Beispiel: $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$ gibt
$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 4.$
$x^4 + 3x^3 - 18x^2 = 0$ gibt
$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = -6, \; x_4 = 3.$

Dasselbe gilt, wenn das Gleichungspolynom anstatt x einen anderen gemeinschaftlichen Faktor hat: man scheidet diesen Faktor

aus, und setzt dann sowohl den einen als den anderen Faktor gleich Null; dadurch hat sich die Gleichung in zwei Gleichungen niedrigeren Grades zerspalten, deren Wurzeln die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

Beispiel: $x^2(x-2)-11x(x-2)+28(x-2)=0$ gibt
$x-2=0$ und $x^2-11x+28=0$, also
$x_1=2 \qquad x_2=7, \quad x_3=4.$

$x^3(x^2+x-12)-5x^2(x^2+x-12)=0$ gibt
$x^2=0, \quad x-5=0, \quad x^2+x-12=0$, also
$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=5, \quad x_4=-4, \quad x_5=3.$

Daraus folgt ferner: Wenn man eine Gleichung mit einem Faktor, welcher x enthält, multipliziert, so hat die neue Gleichung 1) die Wurzeln der alten und 2) auch noch diejenigen Wurzeln, welche der zugesetzte Faktor gleich Null gesetzt gibt.

Beispiel: $x^2-6x-7=0$ enthält $x_1=7$, $x_2=-1$.

Multipliziert man die Gleichung noch mit x^2-3x, so hat die neue Gleichung
$(x^2-6x-7)(x^2-3x)=0$ oder
$x^4-9x^3+11x^2+21x=0$ die Wurzeln.
$x_1=7, \; x_2=-1$ und $x_3=0, \; x_4=3.$

Eine Gleichung bekommt also dadurch, daß man sie mit einem Faktor, welcher x enthält, multipliziert, einen größeren Umfang, sie enthält auch noch Wurzeln, welche ihr eigentlich nicht angehören. Soll also eine Gleichung nur diejenigen Wurzeln enthalten, welche ihr eigentümlich sind, so darf man sie nicht mit einem ihr fremden Faktor multiplizieren, weil sie sonst auch noch diejenigen Wurzeln enthält, welche der Faktor gleich Null gesetzt gibt.

Dies ist zu beachten beim Wegschaffen der Nenner. Man darf in das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner (Generalnenner), womit man die Gleichung multipliziert, keinen Faktor aufnehmen, der durch gewöhnliche Vereinfachung der Brüche wegfallen würde; man muß vielmehr solche Faktoren zuerst durch Vereinfachen der Brüche wegschaffen.

Beispiel: $7x-\frac{6x-8}{3x-4}=5$ gibt $7x-2=5$ also $x=1$;
mit $3x-4$ multipliziert gäbe sie die quadratische Gleichung
$21x^2-28x-6x+8=15x-20,$
$21x^2-49x=-28$ mit den Wurzeln
$x_1=1, \quad x_2=1\frac{1}{3}$, von denen die letzte der gegebenen Gleichung fremd ist.

Umgekehrt: Wenn man weiß, daß eine Gleichung eine Wurzel $x=a$ hat, so folgt, daß das auf 0 gebrachte Gleichungspolynom durch $x-a$ teilbar ist, denn es enthält den Faktor $x-a$.

Beispiel: Die Gleichung $x^3-3x^2-x+3=0$ wird be-

friedigt durch $x = 1$, also ist die dividierbar durch $x - 1$, und gibt $x^2 - 2x - 3 = 0$; dies gibt die noch fehlenden Wurzeln $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

$x^3 - 1 = 0$ hat ebenso die Wurzel $x = 1$, ist dividierbar durch $x - 1$, und gibt dann

$x^2 + x + 1 = 0$; dies gibt die fehlenden Wurzeln

$x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

$x^3 = a$ gibt ebenso die drei Werte:

$$x_1 = \sqrt[3]{a}, \quad x_{2,3} = \tfrac{1}{2}\,(-1 \pm \sqrt{-3}) \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung löst auch die Aufgabe, aus einer Zahl die dritte Wurzel zu ziehen. Man sieht, daß jeder dritten Wurzel dreierlei Werte zugehören, welche algebraisch gleichberechtigt sind, und nur, wenn bei praktischen Aufgaben imaginäre Werte keine Verwendung finden können, können die zwei letzten als imaginär außer acht gelassen werden.

Enthält eine Gleichung vierten Grades nur die quadratischen Glieder, hat sie also die Form:

$x^4 + ax^2 + b = 0$, so kann man x^2 als die Unbekannte ansehen, $x^2 = y$ setzen, und dadurch die Gleichung auf eine quadratische reduzieren:

$y^2 + ay + b = 0$; dies gibt

$y = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$, also $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}}$.

Ähnlich wird $x^6 + ax^3 + b = 0$ behandelt.

Wenn bei Wurzelgleichungen die Wurzeln durch Quadrieren weggeschafft werden, so ist zu beachten, daß die durch Quadrieren erhaltene Gleichung einen größeren Umfang hat als die gegebene, also Wurzeln enthalten kann, welche der gegebenen nicht angehören. Es ist dann stets durch Einsetzen zu prüfen, welche Wurzeln der gegebenen Gleichung angehören.

Beispiel: $x - 3 = \sqrt{x + 3}$. Durch Quadrieren wird: $x^2 - 6x + 9 = x + 3$; hieraus $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. Von diesen Wurzeln genügt x_1 der gegebenen Gleichung, x_2 aber nicht; x_2 würde nur dann genügen, wenn $\sqrt{x + 3}$ mit negativen Zeichen genommen würde.

Die Gleichung $x^2 - 6x + 9 = x + 3$, welche wir durch Quadrieren an Stelle der gegebenen gesetzt haben, kann angesehen werden als

$(x - 3 - \sqrt{x + 3})\,(x - 3 + \sqrt{x - 3}) = 0$; sie enthält also die gegebene Gleichung als Faktor in sich, hat also einen größeren Umfang als die gegebene, und enthält in ihrem zweiten Faktor $x - 3 + \sqrt{x - 3} = 0$ die fremde Wurzel $x = 1$.

Beispiel: $\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10-x^2}=2$. Durch Quadrieren wird $10+x^2-2\sqrt{100-x^4}+10-x^2=4$

$$-2\sqrt{100-x^4}=-16$$
$$100-x^4=64$$
$$x^4=36;\quad x=\pm\sqrt{\pm 6}.$$

Die Wurzeln $x=\pm\sqrt{6}$ genügen der gegebenen Gleichung, die Wurzeln $x=\pm\sqrt{-6}$ genügen der Gleichung $\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10-x^2}=-2$; beide Gleichungen sind enthalten in der durch Quadrieren erhaltenen Gleichung, da diese angesehen werden kann als $(\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10-x^2}-2)(\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10-x^2}+2)=0$.

Beispiel: $\sqrt{5x^2+a^2}+\sqrt{5x^2-a^2}=a$. Quadriert und gelöst gibt $x=\pm\frac{1}{2}a$; keine dieser Wurzeln genügt der gegebenen Gleichung; jede würde genügen, wenn die zweite Wurzelgröße negativ zu nehmen wäre.

96.

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

1. $9x^2=2601$; $a^2+x^2=b^2$; $5(x^2-1)=4200$;

2. $x^2-a=0$; $a:x=x:b$; $(x+a):a=b:(x-a)$;

3. $9a^2+b^2=4x^2+6ab$; $118=360-\frac{9x^2}{2}$; [$\pm 7\frac{1}{3}$]

4. $7-\frac{28+x}{x^2}=3\frac{1}{2}-\frac{x-28}{x^2}$; [$\pm 4$]

5. $(x-a)^2+(x-b)^2=2(a+b)(a+b-x-2)+a^2+b^2+2$;

6. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=3\frac{1}{3}$; $\frac{2a+x}{2a-x}+\frac{2a-x}{2a+x}=\frac{2(5a^2-2a+1)}{(a+1)(3a-1)}$;

7. $\frac{x-12}{x+12}+\frac{x-75}{x+75}=0$; $\frac{24}{15}(x-\frac{3}{4})^2=2\frac{1}{2}$;

8. $\sqrt{3x^2+4}-\sqrt{3x^2-4}=2$; $\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}=2$;

9. $\sqrt{5x^2+a^2}-2\sqrt{5x^2-a^2}=a-\sqrt{5x^2-a^2}$; [$\pm\frac{1}{2}a$]

10. $x+\sqrt{x^2+5a}=\frac{15a}{\sqrt{x^2+5a}}$; [$\pm 2\sqrt{a}$]

11. $\frac{1}{2-\sqrt{3-x^2}}-\frac{1}{2+\sqrt{3-x^2}}=\frac{3}{1+x^2}$; [$\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$]

12. $\sqrt{\frac{8}{x^2}+25}-\sqrt{\frac{8}{x^2}-25}=5$; [$\pm\frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}$]

13. $\frac{6}{x-5}+5-x=\frac{3}{5-x}$; [8; 2] 5]

14. $\dfrac{2x+3a}{2x-3a}+\dfrac{2x-3a}{2x+3a}=2\cdot\dfrac{4b^2+9a^2}{4b^2-9a^2}$; $[\pm b]$

15. $\sqrt{a^2+b^2+x^2}-\sqrt{a^2+b^2-x^2}=2a$; $[x=\pm\sqrt{\pm 2ab}]$

16. $\sqrt{17+x}+\sqrt{17-x}=8$. $[\pm 8]$

16α. $\dfrac{1}{2x+\sqrt{9-5x^2}}+\dfrac{1}{2x-\sqrt{9-5x^2}}=\dfrac{x}{10}$; $[0; \pm\frac{7}{3}]$

16β. $\dfrac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}}+\dfrac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}}=x$ $[0; \pm 2a]$

---

17. $x^2-6x=-8$; $x^2-4x=12$; $x^2+6x=27$;
18. $x^2+18x=-77$; $x^2-38x=-352$; $x^2-136x=1937$;
19. $x^2-6x=-5$; $x^2-4x=32$; $x^2+6x=55$;
$x^2+298x=4695$; $x^2+432x=-5040$;
20. $x^2-116x=218477$; $[529; -413]$
21. $x^2-7x=-10$; $x^2-5x=66$; $x^2+11x=152$;
22. $x^2+51x=-594$; $x^2-109x=-1914$;
23. $x^2-2623x=346374$; $x^2+2889x=333000$;
24. $x^2-2\frac{3}{4}x=-1\frac{7}{8}$; $x^2-5\frac{3}{4}x=18$;
25. $x^2-1\frac{1}{2}x=3\frac{7}{9}$; $x^2+6\frac{1}{10}x=10\frac{1}{2}$;
26. $3x^2-2x=65$; $x^2+4\frac{11}{18}x=-5\frac{1}{27}$;
27. $x^2+3\frac{1}{6}x=8\frac{1}{18}$; $622x=15x^2+6384$;
28. $9\frac{3}{5}x-21\frac{15}{16}=x^2$; $11\frac{3}{4}x-3\frac{1}{2}x^2=-41\frac{1}{4}$;
29. $x^2-7\frac{7}{12}x=-12$; $x^2-3\frac{17}{30}x=2\frac{1}{2}$;
30. $x^2+3\frac{17}{21}x=4$.

---

31. $x^2-ax+b=0$; $x^2-ax-b=0$; $x^2+ax+b=0$;
$x^2+ax-b=0$;
32. $x^2+x-1=0$; $x^2-x-\frac{1}{2}=0$; $x^2-4x+1=0$;
33. $x^2-8x=14$; $x^2+6x+3=0$; $x^2-3x+\frac{1}{2}=0$;
34. $3x^2+x=7$; $x^2-5\frac{1}{3}x+6\frac{2}{9}=0$;
35. $x^2+5\frac{1}{2}x+4\frac{15}{16}=0$; $x^2+2\frac{1}{2}x-\frac{1}{144}=0$.

---

36. $x^2+2x+2=0$; $x^2-3x+3\frac{1}{4}=0$; $x^2+5x+8\frac{1}{2}=0$;
37. $x^2-8x+20=0$; $6x-30=3x^2$; $x^2+14x+74=0$;
38. $x^2-22x+122=0$; $x^2-26x+170=0$.

---

39. $x^2-0,07x+0,0012=0$; $x^2+0,10172x-022748=0$;
40. $x^2-8,6273x+18,2736=0$; $x^2+15,195x-54,076=0$;

---

41. $6x^2-23x+20=0$; $4x^2-9x=5x^2-255\frac{3}{4}-8x$;
42. $3x(8x+7)=31(6+x)$;

43. $\frac{x}{45} = \frac{2}{x} - \frac{1}{5}$; $\frac{12}{x} = \frac{32}{3x^2} + 3\frac{3}{8}$;

---

44. $x^2 - 6x = 0$; $3x^2 + 4\frac{1}{2}x = 0$; $4\frac{1}{2}x^2 = 6\frac{3}{4}x$;
45. $12x = 17x^2$; $18x^2 = 24x^3$; $35x^3 + 14x^4 = 0$; $17x^2 - 12x = 0$
46. $ab^2(a - x) = a^2b(b + x) - ax^2$; $[0;\ b(a+b)]$
47. $x^3 - 10x^2 + 22x = 0$; $[0;\ 5 \pm \sqrt{3}]$
48. $x^4 - (a^4 + b^4)x^3 - a^2b^2x^2(a^4 - b^4) = 0$;
49. $(x - 3)(x + 4\frac{1}{2}) = 0$; $(6x - 2\frac{1}{2})(5x - 4\frac{1}{2}) = 0$;
50. $\left(x + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 0$;
51. $(x + 1)^2 - 3(x + 1) = 0$; $(x - 2)^2 - 2(x - 2) = 0$;
52. $(x - 1)^2 - 3(x - 2) = 0$;
53. $(x - 4)^2 + \frac{x - 4}{3} + (x - 7) = \frac{x - 4}{4} - x + 1$;
54. $(x - a - b)^2 + a(x - a) = ab$; $[b;\ a+b]$
55. $(x - b)^2 + c(b - x) = b(b - x)$; $[b;\ c]$
56. $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$; $\frac{40}{x - 5} + \frac{27}{x} = 13$; $[14;\ -10;\ 9;\ 1\frac{2}{13}]$
57. $\frac{8x}{x + 2} - 6 = \frac{20}{3x}$; $\frac{48}{x + 3} = \frac{165}{x + 10} - 5$; $[10;\ -\frac{2}{3};\ -5;\ -5\frac{2}{5}]$
58. $\frac{2x + 3}{10 - x} = \frac{2x}{25 - 3x} - 6\frac{1}{2}$; $[8;\ 13\frac{22}{31}]$
59. $\frac{3x + 1}{4x - 6} + \frac{7x + 2}{6x + 9} = \frac{8x^2 - 3x + 3}{4x^2 - 9}$; $[7;\ 1\frac{1}{2}]$
60. $\frac{2}{x - 1} - \frac{2}{x - 3} = \frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x - 5}$; $[7;\ 3\frac{2}{3}]$
61. $\frac{2 - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{x}} = 1$; $\frac{a + \frac{1}{a}}{x + \frac{1}{x}} = 1$; $\left[2;\ \frac{1}{2};\ a;\ \frac{1}{a}\right]$
62. $x^2 - c^2 = b^2 + 2ax - a^2 + 2bc$; $[a \pm (b+c)]$
63. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$; $[a;\ b]$
64. $(x + 1)(x - 1) = x\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$; $\left[\sqrt{\frac{a}{b}};\ -\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$
65. $x^2 - 2ax = b - a(a + 1)$; $x^2 - x\sqrt{a - b} = \frac{1}{4}b$;
66. $x^2 - 2x\sqrt{a + b} + 2b = 0$; $adx - acx^2 = bcx - bd$;
67. $2\sqrt{a\left(\frac{a}{b} + 1\right)} = x\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{x}$; $[\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}]$

68. $\frac{\sqrt{b}}{x^2} = \frac{2}{x}\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a\sqrt{b}}}$; $[\sqrt{a(a+b)} \pm a]$

69. $\frac{x}{a^2 - 4b^2} + \frac{a^2 - 4b^2}{x} = 2 \cdot \frac{a^2 + 4b^2}{a^2 - 4b^2}$; $[(a \pm 2b)^2]$

70. $(b + c)^2\left(\frac{1}{cx} - \frac{1}{bx}\right) = \frac{x}{b^2c - bc^2} + \frac{4}{c - b}$;

71. $x^2 - (a^2 + b^2)x - ab(a^2 - b^2) = 0$; $[a(a+b);\ b(b-a$

72. $x^2 - (a^2 + b^2)x + ab(a^2 - b^2) = 0$; $[a(a-b);\ b(a+b)]$

73. $x^2 = x(a + b)^2 - b(a^3 + bx) + b^2(ab - x)$;

74. $\left(\frac{4x}{a + b}\right)^2 = 4x - ab$; $\left[\frac{a(a+b)}{4};\ \frac{b(a+b)}{4}\right]$

75. $x^2(a - b) - \frac{b^2}{a}x = a + b$; $(a - x)^2 + (x - b)^2 = (a - b)^2$;

76. $x^2 - 4x = 4\sqrt{-1} - 7$; $x^2 - (2 - 2\sqrt{-1})x = 3 + 6\sqrt{-1}$;

77. $\frac{\sqrt{x - a} + \sqrt{x - b}}{\sqrt{x - a} - \sqrt{x - b}} = \frac{\sqrt{x - a}}{\sqrt{x - b}}$; $[\frac{1}{2}(a+b) \pm \frac{1}{2}(a-b)\sqrt{2}]$

78. $\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a + x} = \frac{x^2 - 4}{a^2 - x^2}$; $\frac{1}{a - bx} - \frac{1}{a + bx} = \frac{x^2 - 4b^2}{a^2 - b^2x^2}$;

79. $\frac{x + a}{x - 2a} + \frac{x - 2a}{x + a} = 3\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{x}}{4 - \sqrt{x}} + \frac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 14$;

80. $\frac{2x + 7a}{3x - 2a} + \frac{3x - 2a}{2x + 7a} = 10$; $\frac{\sqrt{x}}{12 - \sqrt{x}} + \frac{12 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 3\frac{1}{3}$;

81. $\frac{2x + 3a}{3x - 4a} + \frac{3x - 4a}{2x + 3a} = \frac{13b^2 - 12ab + 25a^2}{6b^2 + ab - 12a^2}$;

82. $\frac{2x + 3a}{3x - 2a} + \frac{3x - 2a}{2x + 3a} = \frac{13(a^2 + b^2)}{6b^2 + 5ab - 6a^2}$;

83. $\frac{a + 2x}{a - 2x} - \frac{a - 2x}{a + 2x} = \frac{8a(a - 1)}{(2 - a)(3a - 2)}$;

84. $\frac{(a - x)^2 + (b + x)^2}{(a - x)(b + x)} = \frac{10}{3}$;

85. $\frac{a + b + x}{a - b + x} - \frac{a - b + x}{a + b + x} = \frac{2ab + b^2}{a(a + b)}$;

86. $\frac{a + b + x}{a + b - x} - \frac{a + b - x}{a + b + x} = \frac{4a^2 + 4ab}{b(2a + b)}$;

87. $\frac{a + b + x}{a + b - x} - \frac{a + b - x}{a + b + x} = \frac{8(a^2 - b^2)}{3a^2 + 10ab + 3b^2}$;

88. $abx^2 + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2 + ab - 2b^2}{c^2} - \frac{b^2x}{c}$;

89. $9a^4b^4x^2 - 6a^6b^2x - b^2 = 0$; $cx + \frac{ac}{a+b} = (a+b)x^2$;

90. $x^2 - \frac{6b^2 - 17ab}{6a^2b^2} = \frac{x}{6a} + \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}$;

91. $x^2 + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2b^2} = \frac{(12a + b)x - 1}{6ab}$;

92. $6a^2x^2 + \frac{49a}{6b} = \frac{a + x}{b^2}(abx + 2(a + b))$;

93. $2a^2b^2x^2 - (a+b)(abx + (a+b)) = \frac{1}{2}c^2 - \frac{3}{2}(3ab - c(b-a))$;

94. $(6x + 7) : \left(1 - \frac{3}{a}\right) = \left(1 - \frac{2}{a}\right) : (x - 1)$;

95. $abx^2 - 2x(a + b)\sqrt{ab} = (a - b)^2$;

96. $\frac{4(x - \sqrt{b})}{4x - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{x + \sqrt{b}}$; $\frac{a^2}{x - b} + \frac{b^2}{x - a} = a + b$;

97. $3x\sqrt{a}(1 - x\sqrt{b}) - x\sqrt{b}(1 - x\sqrt{a}) = \frac{a - 3b}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{2}$;

98. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7 + 10x}{x^2(x^2 + 7)} = \frac{2}{x + \frac{3}{x + \frac{4}{x}}}$;

99. $cx^2 - 2cx\sqrt{d} = dx^2 - cd$;

100. $x^2\sqrt{6ab} = \sqrt{\frac{a}{3}}\left(x + \sqrt{\frac{2}{b}}\right) + \sqrt{\frac{b}{2}}\left(x + 2\sqrt{\frac{3}{a}}\right) - 3$;

101. $\frac{x - 2}{1 - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{1 - x}$; $x^2 = \frac{b(1 + x)}{a} - \frac{a(1 - x)}{b}$;

102. $12x^2 + 2(2\sqrt{a} - \sqrt{b})(x - 4\sqrt{a} + 2\sqrt{b}) = 7x\sqrt{a} - a$;

103. $(4a^2 - 9cd^2)x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)x + (ac^2 + bd^2)^2 = 0$;

104. $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = 0$; $x^3 - 8 = 0$; $x^4 - 16 = 0$; $x^6 - 1 = 0$;

105. $x^4 - 74x^2 = -1225$; $x^4 - \frac{73}{36}x^2 + \frac{4}{9} = 0$;

106. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$; $x^4 - 4\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0$;

107. $x^4 - 3x^2(a-1) + 2(a-1)^2 = 0$; $x^4 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x^2 + 1 = 0$;

108. $x^4 - 3x^2(a - 1) + 2(a - 1)^2 = a$;

109. $x^4 - 5(a^2 + 1)x^2 + 4(a + 1)^4 = 28a^3 + 23a^2 + 4a$;

110. $(a + b + x)(a + b - x)(a - b + x)(-a + b + x) = 4m^2$;

111. $\left(\frac{a^2}{b}-1\right)^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=2\left(\frac{a^2}{b}+1\right)^2+\frac{8a^2}{b}$;

112. $(x^4+1)(a^4+1)-4(2a^2x^2-1)=2(a^2x^2+1)(x^2+a^2+2)$;

113. $3x^6+42x^3=3321$;

114. $(x^2-8x+11)^2+5(x-4)^2-21=0$;

115. $(x^2-6x+7)^2=(x-3)^2$;

116. $(x^2-6x+6)^2+(x-3)^2=5$;

117. $(x^2-x+3\frac{3}{4})^2-15\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+1\frac{13}{16}=0$;

118. $x^6-133x^3+1000=0$;

119. $2x^2-2x-3=3\sqrt{x^2-x+1}$;

120. $(x^2+2x+3)^2-8x(x+2)=537$.

---

121. $x+a=\sqrt{a^2+x\sqrt{2x^2-a^2}}$;

122. $4\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}$; $4\frac{1}{2}x\sqrt{1-2x^2}=1$;

123. $5\frac{1}{3}x\sqrt{2-3x^2}=\sqrt{5}$;

124. $x+\sqrt{x}=30, =42, =56, =110$;

125. $x-\sqrt{x}=30, =42, =56, =110$;

126. $\sqrt{x}-x=\frac{2}{9}$; $\sqrt{x}-x=\frac{3}{16}$; $\sqrt{x}-x=\frac{4}{25}$; $=\frac{6}{25}$;

127. $\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}=4\sqrt{x}$; $ax=b+\sqrt{cx}$;

128. $\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a}{x}$;

129. $x+6(a-b)^2=5(a-b)\sqrt{x}+ab$;

130. $x(x+3)=\sqrt{346+3x(x+3)}-2$;

131. $x(x+3)=\sqrt{2x(x+3)-11}+13$;

132. $x(x-2)=\sqrt{33-3x(x-2)}+5$;

133. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{8x+9}$;

134. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+2}=\sqrt{12x-3}$;

135. $\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+2}=\sqrt{12x-3}$;

136. $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$;

137. $\sqrt{x+\sqrt{10}}+\sqrt{x-\sqrt{10}}=\sqrt{6x-11}$;

138. $\sqrt{4x+1}+\sqrt{6x-\frac{1}{2}}=\sqrt{12x+7}$;

139. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{2x+19}$;

140. $x+\sqrt{x+4}=16$; $x-\sqrt{x+4}=16$;

141. $x+\sqrt{x+4}=8$; $x-\sqrt{x+4}=8$;

142. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$;

143. $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-\frac{1}{3}}=2+2\sqrt{x-\frac{4}{3}}$;

144. $\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{a+1}{a^2+a+1}$; $\frac{x-1}{x^2-x-1}=\frac{a-1}{a^2-a-1}$;

---

145. $(x-5)^2+11=6\sqrt{x^2-10x+28}$;

146. $(x-7)^2+8\sqrt{x^2-14x+154}+72=0$;

147. $\sqrt[4]{x+21}+3\sqrt{x+21}=30$;

148. $5\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x^2+4x+4}=6$;

149. $\sqrt[5]{x+1000}-\sqrt[10]{x+1000}=2$;

150. $\sqrt{(x-2)(x-5)}+\sqrt{(x-6)(x-9)}=2$;

151. $\sqrt{x+\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{x}}$;

152. $\frac{x-2a}{x+2a}+\frac{2ab}{(a-b)(x-2a)}=\frac{4b(2a^2-b^2)}{(a-b)(x^2-4a^2)}$;

153. $(x-4)(x-3)(x-2)+24=0$;

154. $(x+4)(x-3)(x-2)-24=0$;

155. $\sqrt{\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a}{x}}}-\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{a}{x}}}$;

156. $x^2+3ab-(a+b)\sqrt{x^2-2bx+2ab}=2bx$;

157. $\sqrt[3]{\frac{x^2+a-1}{x^2-a+1}}+\sqrt[3]{\frac{x^2-a+1}{x^2+a-1}}=\frac{1+a^2}{a}$;

158. $\frac{2x}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{2x}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}}=\frac{2(b+2x)}{\sqrt{x}}$;

159. $x+3-3\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}=\frac{4}{x-3}$;

160. $x-2-2\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=\frac{15}{x+2}$;

161. $4x\sqrt{7x-5}-2x\sqrt{4x-3}=10x\sqrt{3x-8}$;

162. $\sqrt{\frac{2}{3}-\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}=2\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}$;

163. $(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)=24$;

164. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{2x}$; [a; ± a]

165. $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$; [$\pm\sqrt{2}$]

166. $2\sqrt[4]{\frac{x-10}{x+10}}+2\sqrt[4]{\frac{x+10}{x-10}}=5;$ $[\pm 11\tfrac{1}{3}]$

167. $\frac{20-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}-20}+\frac{5}{6}=0;$ $[40^4;\ 12^4]$

168. $\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}}=\sqrt{\frac{x-3}{x-4}};$ $\tfrac{1}{2}(7\pm\sqrt{2})$

169. $\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a-b};$ $[a;\ b]$

170. $\frac{16-4\sqrt{x}}{8-3\sqrt{x}}=\frac{88+33\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}+\frac{x^2-5x+11}{(8-3\sqrt{x})(4+\sqrt{x})};$ $[7;\ 93]$

171. $x-4-\frac{6}{x-4}=\frac{1}{x-4}\sqrt{2+8x-x^2};$ $[7;\ 1;\ 4\pm\sqrt{2}]$

172. $\frac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}}=\frac{a}{b};$ $\left[\pm\sqrt{\frac{a^2+ab-b^2}{a^2-ab+b^2}}\right]$

173. $\frac{\sqrt{3+x^2}+\sqrt{3x^2-1}}{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3x^2-1}}=3+2\sqrt{2};$

174. $\sqrt{(4+x)(x+9)}+\sqrt{(4-x)(x-9)}=4\sqrt{x};$

175. $\frac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)^2+(x-b)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2};$

176. $(3x-2)^2-(2x-3)^2=5\sqrt{x^2+5};$

177. $\sqrt{2-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{5-\frac{4}{x^2}}=3;$ $[\pm 2]$

178. $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}+\sqrt{x}=2\sqrt{2};$ $[(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)^2]$

179. $\frac{12x^3-11x^2+10x-78}{8x^2-7x+6}=1\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2};$ $[5;\ -4\tfrac{2}{7}]$

180. $2\tfrac{1}{24}-\frac{2x+3}{x^2-1}=x-\frac{x^2-4}{x+1};$ $[5;\ -\tfrac{1}{5}]$

181. $\frac{2x+3\sqrt{x}}{2x-3\sqrt{x}}=\frac{x(4x-9)}{1225}.$

Aufl.: **5.** $\pm(a+b-1)$; **6.** $\pm 2a$; $\pm(a-1)$; **7.** ± 30; 2; $-\tfrac{1}{2}$; **8.** $\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{15}$; $\pm 2\sqrt{6}$; **22.** -18; -33; 87; 22; **23.** 2749; -126; -3000; 111. **24.** $1\tfrac{1}{2}$; $1\tfrac{1}{4}$; 8; $-2\tfrac{1}{4}$. **25.** $2\tfrac{5}{6}$; $-1\tfrac{1}{3}$; $1\tfrac{2}{5}$; $-7\tfrac{1}{2}$. **26.** 5; $-4\tfrac{1}{3}$; $-1\tfrac{7}{9}$; $-2\tfrac{5}{6}$. **27.** $1\tfrac{2}{3}$; $-4\tfrac{5}{6}$; $22\tfrac{4}{5}$; $18\tfrac{2}{3}$. **28.** $5\tfrac{17}{20}$; $3\tfrac{3}{4}$; $5\tfrac{1}{2}$; $-2\tfrac{1}{7}$. **29.** $5\tfrac{1}{3}$; $2\tfrac{1}{4}$; $4\tfrac{1}{6}$; $-\tfrac{3}{5}$. **30.** $\tfrac{6}{7}$; $-4\tfrac{2}{3}$. **32.** $\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$; $\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{3})$; $2\pm\sqrt{3}$. **33.** $4\pm\sqrt{30}$; $-3\pm\sqrt{6}$; $\tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{7})$. **34.** $\tfrac{1}{6}(-1\pm\sqrt{85})$; $\tfrac{2}{3}(4+\sqrt{2})$. **35.** $\tfrac{1}{4}(-11\pm\sqrt{42})$; $\tfrac{1}{12}(-15\pm\sqrt{226})$. **36.** $-1+\sqrt{-1}$;

$\frac{3}{2} \pm \sqrt{-1}$; $\frac{1}{2}(-5 \pm 3\sqrt{-1})$. **37.** $2(2 \pm \sqrt{-1})$; $1 \pm 3\sqrt{-1}$; $-7 \pm 5\sqrt{-1}$. **38.** $11 \pm \sqrt{-1}$; $13 \pm \sqrt{-1}$. **39.** 0,04; 0,03. **41.** $2\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; $15\frac{1}{2}$; $-16\frac{1}{2}$. **42.** 3; $-2\frac{7}{12}$. **43.** 6; -15; $1\frac{7}{9}$. **48.** 0; 0; $a^2(a^2+b^2)$; $b^2(b^2-a^2)$. **51.** -1; 2; 2; 4. **52.** $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{-3})$. **53.** 4; $1\frac{1}{12}$. **65.** $a \pm \sqrt{b-a}$; $\frac{1}{2}(\sqrt{a-b} \pm \sqrt{a})$. **66.** $\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}$; $\frac{d}{c}$; $-\frac{b}{a}$. **70.** $(b+c)^2$; $-(b-c)^2$. **73.** $a(a+b)$; $b(a-b)$. **75.** $\frac{a}{a-b}$; $-\frac{a+b}{a}$; a; b. **76.** $3+2\sqrt{-1}$; $1-2\sqrt{-1}$; 3; $-1-2\sqrt{-1}$. **78.** $1 \pm \sqrt{5}$; $b(1 \pm \sqrt{5})$. **79.** $-\frac{5}{2}a$; $\frac{7}{2}a$; $2 \pm \sqrt{3}$. **80.** $\frac{a}{47}(-77 \pm 50\sqrt{6})$; 81; 9. **81.** b; $a \cdot \frac{7a-18b}{18a-5b}$. **82.** b; $a \cdot \frac{5a+12b}{5b-12a}$. **83.** $a-1$; $\frac{-a}{4(a-1)}$. **84.** $\frac{a-3b}{4}$; $\frac{3a-b}{4}$. **85.** $a+b$; $-\frac{2a^2+ab+b^2}{2a+b}$. **86.** a; $-\frac{(a+b)^2}{a}$. **87.** $\frac{a-b}{2}$; $-2 \cdot \frac{(a+b)^2}{a-b}$. **88.** $\frac{3a+2b}{bc}$; $\frac{b-2a}{ac}$. **89.** $(a^4 \pm \sqrt{b^2+a^8}) : 3a^2b^2$; $(c \pm \sqrt{4ac+c^2}) : 2(a+b)$. **90.** $\frac{3a-4b}{3ab}$; $\frac{3b-2a}{2ab}$. **91.** $\frac{2a+3b}{2ab}$; $\frac{3a-4b}{3ab}$. **92.** $\frac{4a-3b}{6ab}$; $\frac{-3a+4b}{6ab}$. **93.** $\frac{2a-b-c}{2ab}$; $\frac{-a+2b+c}{2ab}$. **94.** $\frac{3a-2}{2a}$; $\frac{2a+3}{3a}$. **95.** $\frac{a+b \pm \sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{ab}}$. **96.** $\frac{1}{2}\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$; $a+b$; $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. **97.** $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}$; $\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}$. **98.** 0; 4. **99.** $\frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{c} \pm \sqrt{d}}$. **100.** $\frac{2\sqrt{3a}-3\sqrt{2b}}{2\sqrt{6ab}}$; $\frac{-2\sqrt{3a}+6\sqrt{2b}}{3\sqrt{6ab}}$. **101.** $1+\sqrt{a}$; $2-\sqrt{a}$, $\frac{a-b}{b}$; $\frac{b-a}{a}$. **102.** $\frac{5\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{4}$; $\frac{-3\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{3}$. **103.** $-\frac{ac^2+bd^2}{2a \pm 3d\sqrt{c}}$. **104.** $-1 \pm \sqrt{-3}$; 2; $-1 \pm \sqrt{-3}$; ± 2; $\pm 2i$; ± 1; $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{-3})$. **105.** ± 7; ± 5; $\pm \frac{4}{3}$; $\pm \frac{1}{2}$. **106.** $\pm(a \pm b)$; ± 2; $\pm \frac{1}{2}$. **107.** $\pm\sqrt{a-1}$; $\pm\sqrt{2(a-1)}$; $\pm\sqrt{a}$; $\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$. **108.** $\pm\sqrt{2a-1}$; $\pm\sqrt{a-2}$. **109.** $\pm(2a+1)$; $\pm(a-2)$. **110.** $\pm\sqrt{a^2+b^2 \pm \sqrt{4a^2b^2-4m^2}}$. **111.** $\pm\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$; $\pm\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$. **112.** $\pm\frac{a+1}{a-1}$; $\pm\frac{a-1}{a+1}$. **113.** 3; $-\sqrt[3]{41}$. **114.** 6; 2; 5; 3. **115.** 4; 2; 5; 1. **116.** 4; 2; 5; 1. **117.** 3; -2; 2; -1. **118.** 5; 2. **119.** 0; 1; $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{22})$. **120.** 4; -6; $-1 \pm \sqrt{-21}$. **121.** 0; 5a; $-a$. **122.** $\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{2}{3}$; $\pm\frac{1}{6}\sqrt{2}$. **123.** $\pm\frac{3}{4}$; $\pm\frac{1}{12}\sqrt{15}$. **128.** $+a$; $-a$; 0. **129.** $(3a-2b)^2$; $(2a-3b)^2$. **130.** 3; -6; $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{-67}$. **131.** 3; -6; 2; -5. **132.** 4; -2; 1; 1. **133.** 5; $-1\frac{2}{15}$. **134.** 7; 1. **135.** 7; 1; ? **136.** 9; $-3{,}6$. **137.** 4; $3\frac{1}{3}$. **138.** $\frac{3}{4}$; $-\frac{59}{92}$. **139.** 15; -10. **140.** 12; 21; 21; 12. **141.** 5; 12. **142.** 3; $-\frac{4}{11}$. **143.** $\frac{5}{3}$; $\frac{13}{3}$. **144.** a; $-\frac{a}{a+1}$; a; $\frac{a-2}{a-1}$. **145.** 6; 4; $5 \pm \sqrt{13}$. **146.** $7 \pm 4\sqrt{-6}$; 11; 3.

147. $60;\ 102\frac{37}{81}$. **148.** $25;\ 6$. **149.** $24;\ -999$. **150.** $5;\ 6$. **151.** $0;\ \frac{4}{3}$. **152.** $2(a-b);\ \frac{2(a^2-ab-b^2)}{a-b}$. **153.** $0;\ \frac{9}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-23}$. **154.** $0;\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{57})$. **155.** $0;\ \frac{3a}{4}$. **156.** $a;\ 2b-a;\ b\pm\sqrt{2b(b-a)}$. **157.** $\pm\sqrt{\frac{a^3+1}{a^2+a+1}};\ \pm\sqrt{-\frac{a^3+1}{a^2+a+1}}$. **158.** $\frac{a-b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. **159.** $\pm 5;\ \pm\sqrt{10}$. **160.** $\pm\sqrt{29};\ \pm\sqrt{13}$. **61.** $0;\ 3;\ 7\frac{556}{1401}$. **162.** $(-\frac{7}{3}\pm\frac{1}{15}\sqrt{220})^3$. **163.** $-1;\ -6;\ -\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{-15})$. **173.** ± 1. **174.** ± 6. **175.** $\frac{a^2+b^2}{2a};\ \frac{b^2+2ab-a^2}{2b}$. **176.** $\pm 2;\ \pm\sqrt{-1}$. **181.** $2\frac{1}{4};\ 25;\ 12\frac{1}{4};\ \frac{1}{16}(262\pm 6\sqrt{-271})$.

Reziproke Gleichungen.

97.

Haben die Wurzeln einer Gleichung alle die Eigenschaft, daß jede der reziproke Wert einer (und nur einer) andern Wurzel ist, so heißt die Gleichung eine **reziproke**.

Eine Gleichung ist reziprok, wenn in dem auf 0 gebrachten Gleichungspolynom die von den Enden gleich weit abstehenden Koeffizienten je einander gleich sind, wenn sie also die allgemeine Form hat:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + 1 = 0.$$

Denn wenn dieser Gleichung irgend eine Wurzel $x = \alpha$ genügt, wenn also

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 \alpha^2 + a\,\alpha + 1 = 0,$$

so genügt ihr auch der reziproke Wert $x = \frac{1}{\alpha}$; denn setzt man diesen ein, so ist zu beweisen, daß

$$\frac{1}{\alpha^n} + a_1 \frac{1}{\alpha^{n-1}} + a_2 \frac{1}{\alpha^{n-2}} + \cdots\cdots + a_2 \frac{1}{\alpha^2} + a_1 \frac{1}{\alpha} + 1 = 0;$$

multipliziert man aber mit α^n, so hat man hieraus

$$1 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots\cdots + a_2 \alpha^{n-2} + a_1 \alpha^{n-1} + \alpha^n = 0,$$

was der Voraussetzung nach richtig ist.

Hat die reziproke Gleichung die Werte 0 oder $+1$ oder -1 als Wurzeln, so sind dieselben leicht zu erkennen und durch Division des Gleichungspolynoms mit x oder $x-1$ oder $x+1$ zu entfernen. Die so vereinfachte reziproke Gleichung enthält dann die Wurzeln nur mehr paarweise, so daß in jedem Paare jede der reziproke Wert der anderen ist; sie ist also von geradem Grade.

Wir können reziproke Gleichungen auch noch vom vierten Grade auflösen, wie an folgendem Beispiele ersichtlich ist.

$$x^4 - 5\tfrac{5}{6}x^3 + 10\tfrac{1}{3}x^2 - 5\tfrac{5}{6}x + 1 = 0.$$

Man dividiert mit x^2 und ordnet, so ist

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\tfrac{5}{6}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10\tfrac{1}{3} = 0;$$

man setzt $x + \frac{1}{x} = z$, so ist $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$, also

$$z^2 - 2 - 5\tfrac{5}{6}z + 10\tfrac{1}{3} = 0,$$
$$z^2 - 5\tfrac{5}{6}z = -8\tfrac{1}{3}; \text{ hieraus}$$
$$z_1 = 3\tfrac{1}{3},\ z_2 = 2\tfrac{1}{2}.$$

Setzt man jeden dieser Werte in die Substitutionsgleichung, so hat man

$$x + \frac{1}{x} = 3\tfrac{1}{3} \text{ und } x + \frac{1}{x} = 2\tfrac{1}{2},$$

welche $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$ und $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$ als die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung liefern.

98.

1. $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$; $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$;
2. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$; $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$;
3. $x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$;
4. Wie groß muß in $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ der Koeffizient c sein, damit die Gleichung reziprok wird? Man löse sie dann auf. Anleitung: Setze $x = dy$ in die Gleichung und bestimme d so, daß die mittleren Koeffizienten gleich werden, und bestimme dann c so, daß die äußeren Koeffizienten gleich werden.
5. $x^3 - \frac{13}{36}x^2 - \frac{13}{118}x + \frac{1}{27} = 0$; $[-\frac{1}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{1}{4}]$
6. $x^3 - 5x^2 + 10x - 8 = 0$; $[2;\ \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-7})$
7. $x^3 + 3\frac{1}{30}x^2 + 3\frac{1}{30}x + 1 = 0$; $[-1;\ -\frac{5}{6};\ -\frac{6}{5}]$
8. $x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x - 1 = 0$; $[1;\ 2;\ \frac{1}{2}]$
9. $x^3 + 1\frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{4}x - 1 = 0$; $[1;\ \frac{1}{8}(-9 \pm \sqrt{17})]$
10. $x^3 + 1{,}1x^2 + 1{,}1x + 1 = 0$; $[-1;\ \frac{1}{20}(-1 \pm \sqrt{-399})]$
11. $x^3 + 2{,}2x^2 - 2{,}2x - 1 = 0$; $[1;\ \frac{1}{5}(-8 \pm \sqrt{39})]$
12. $x^3 - (a-1)x^2 + (a-1)x - 1 = 0$; $[1;\ \frac{1}{2}(a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a})]$
13. $x^3 - (2\sqrt{2} - 1)x^2 - (2\sqrt{2} - 1)x + 1 = 0$; $[-1;\ \sqrt{2} \pm 1]$
14. $x^3 - \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}x^2 + \frac{a^2 + ab + b^2}{ab}x - 1 = 0$; $\left[1;\ \frac{a}{b};\ \frac{b}{a}\right]$
15. $x^3 - \frac{a^2 + 3b^2}{a^2 - b^2}x^2 - \frac{a^2 + 3b^2}{a^2 - b^2}x + 1 = 0$; $\left[-1;\ \frac{a+b}{a-b};\ \frac{a-b}{a+b}\right]$
16. $x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 6\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 1 = 0$: $[2;\ \frac{1}{2};\ -3;\ -\frac{1}{3}]$
17. $x^4 - 4\frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - 4\frac{1}{4}x + 1 = 0$; $[4;\ \frac{1}{4};\ \pm\sqrt{-1}]$
18. $x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + 1 = 0$; $[-1;\ -1;\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{3}]$
19. $x^4 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{181}{72}x^2 - \frac{1}{12}x + 1 = 0$; $[\frac{2}{3};\ \frac{3}{2};\ -\frac{3}{4};\ -\frac{4}{3}]$
20. $x^4 - \frac{253}{60}x^3 + \frac{773}{120}x^2 - \frac{253}{60}x + 1 = 0$; $[\frac{2}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{4}]$
21. $x^4 - 14x^3 + 50x^2 - 14x + 1 = 0$; $[4 \pm \sqrt{15};\ 3 \pm 2\sqrt{2}]$

22. $x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{62}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$; $[-3: -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}(4 \pm \sqrt{7})]$

23. $x^4 + 7x^3 - 12x^2 + 7x + 1 = 0$;

24. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$;

25. $x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{3}x^2 - 2\frac{1}{3}x + 1 = 0$; $[\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}); \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{-5})]$

26. $x^4 - 2\frac{1}{6}x^3 + 3x^2 - 2\frac{1}{6}x + 1 = 0$; $[\frac{1}{3}(1+2\sqrt{-2}; \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{-7})]$

27. $x^4 - 2\frac{2}{3}x^3 + 3\frac{17}{25}x^2 - 2\frac{2}{5}x + 1 = 0$; $[\frac{1}{5}(2 \pm \sqrt{-21}); \frac{1}{5}(4 \pm 3\sqrt{-1})]$

28. $x^4 - 4\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 4\frac{1}{3}x + 1 = 0$; $[\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}); \frac{1}{3}(2 \pm \sqrt{-5})]$

29. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$; $[1; 1; \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})]$

30. $x^4 - 3\frac{1}{2}x^3 + 4\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x + 1 = 0$; $[2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})]$

31. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$; $[1; 1; \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})]$

32. $x^4 + \frac{1}{6}x^3 + 1\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$; $[\frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{-15}); \frac{1}{3}(-1 \pm 2\sqrt{-2})]$

33. $x^4 - (2\frac{1}{2} + 2\sqrt{2})x^3 + (2 + 5\sqrt{2})x^2 - (2\frac{1}{2} + 2\sqrt{2})x + 1 = 0$;

34. $x^4 - \frac{(a+b)(ab+1)}{ab}x^3 + \frac{a^2b^2 + (a+b)^2 + 1}{ab}x^2 - \frac{(a+b)(ab+1)}{ab}x + 1 = 0$;

35. $x^4 - \frac{a^2+3}{a^2-1}x^3 - \frac{4}{a^2-1}x^2 - \frac{a^2+3}{a^2-1}x + 1 = 0$;

36. $x^4 - 4\frac{a^4+b^2}{a^4-b^2}x^3 + 6x^2 - 4\frac{a^4+b^2}{a^4-b^2}x + 1 = 0$;

37. $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$;

38. Wie groß muß in $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ der Koeffizient d sein, damit die Gleichung reziprok wird? Man löse sie dann auf. Anleitung: Man setze $x = ey$ in die Gleichung, bestimme e so, daß die mittleren Koeffizienten gleich werden, und dann d so, daß die äußeren Koeffizienten gleich werden.

39. $x^4 - 22x^3 + 138x^2 - 198x + 81 = 0$; $[3; 1; 6 \pm 3\sqrt{3}]$

40. $x^4 + 6\frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 26x + 16 = 0$; $[-8; -\frac{1}{2}; 1 \pm \sqrt{-3}]$

41. $x^4 - \frac{29}{4}x^3 + \frac{35}{2}x^2 - \frac{261}{16}x + \frac{81}{16} = 0$. $[1; \frac{9}{4}; 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-7}]$

Aufl.: **23.** $\frac{1}{4}[-7 + \sqrt{105} \pm \sqrt{138 - 14\sqrt{105}}]$; $\frac{1}{4}(-7 - \sqrt{105} \pm \sqrt{138 + 14\sqrt{105}})$; **24.** $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}})$; $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\sqrt{2}})$; **33.** $2; \frac{1}{2}; \sqrt{2} \pm 1$; **34.** $a; \frac{1}{a}; b; \frac{1}{b}$; **35.** $\frac{a+1}{a-1}; \frac{a-1}{a+1}; \frac{1}{2}(- \pm \sqrt{-3})$; **36.** $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}; \frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}$.

99.

Textgleichungen vom zweiten Grade mit einer Unbekannten.

Inbezug auf die Lösung von Textgleichungen zweiten Grades gelten dieselben Anleitungen wie für Textgleichungen ersten Grades. Oft kann man erst aus der angesetzten Gleichung erkennen, daß die Textaufgabe auf eine quadratische Gleichung führt.

Bei der Diskussion des Resultates ist stets nachzusehen, ob beide Werte, welche sich für die Unbekannte ergeben, der Natur der Aufgabe nach brauchbar sind, oder ob einer derselben, oder sogar alle zwei auszuschließen sind.

Imaginäre Wurzeln zeigen an, daß die Aufgabe durch reelle Werte der Unbekannten überhaupt nicht befriedigt werden kann.

---

1. Eine Zahl zu finden, deren Dreifaches mit ihrem Siebenfachen multipliziert 7581 gibt.

2. $\frac{7}{50}$ von einer Zahl geben mit $\frac{1}{18}$ derselben Zahl multipliziert 40733; wie heißt die Zahl?

3. Länge und Breite eines Rechteckes verhalten sich wie 7 : 5, während sein Flächeninhalt = 2240 *qm* ist. Wie lang und breit ist das Rechteck?

4. Die Zahl 11532 in zwei Faktoren zerlegen, welche sich wie 3 zu 4 verhalten.

5. Die Zahl p in zwei Faktoren zerlegen, welche sich wie b : c verhalten.

6. Es soll eine Zahl von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß, wenn eine gegebene Zahl c sowohl durch jene als auch durch eine um a größere Zahl dividiert wird, der Unterschied beider Quotienten = d sei.

7. Zwei Zahlen, von denen die eine um 8 größer ist als die andere, geben multipliziert 240. Wie heißen die Zahlen?

8. Vergrößert man die Länge eines Quadrates um $2\frac{1}{2}$ *m*, und vermindert man die Breite um ebensoviel, so ist das erhaltene Rechteck nur $\frac{3}{4}$ des Quadrates. Wie groß war das Quadrat?

9. Ein rechteckiges Feld von 422,6 *m* Länge und 27,4 *m* Breite soll gegen ein anderes vertauscht werden, bei welchem sich Länge und Breite wie 9 : 4 verhalten; wie lang und breit muß dies werden?

10. Vergrößert man die Seite des Quadrates um 3 *m*, so wächst seine Fläche um 21%; wie groß war es?

11. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 17,2 *m* lang, während die Katheten sich wie 15 : 22 verhalten. Wie lang sind sie?

12. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete 11,5 *m* lang, während sich die Hypotenuse zur andern Kathete wie 8 : 5 verhält; wie lang ist jede Seite?

13. Zerlegt man ein Quadrat durch Parallele zu den Seiten in Quadrate von $1\frac{3}{4}$ *m* Länge, so erhält man 45900 Quadrate mehr als wenn man es in Quadrate von $2\frac{1}{2}$ *m* Seitenlänge zerlegt. Wie lang ist das Quadrat? [525 *m*]

14. Zum Besäen von zwei quadratischen Feldern, von denen

das eine 30 *m* breiter war als das andere, brauchte man 615 *l* Samen; wie groß ist jedes Feld, wenn 5 *l* Samen für 3 a ausreichen? [120; 150 *m*]

15. In ein Rechteck von 84 *m* Länge und 63 *m* Breite soll ein anderes von halbem Inhalt eingezeichnet werden, dessen Seiten von denen des ersten gleich weit abstehen. Wie lang sind dessen Seiten? [63; 42 *m*]

16. Das Quadrat einer Zahl nebst dem 9fachen der Zahl gibt 220. Wie heißt die Zahl? [11; —20]

17. Sechs gleich große Quadrate und drei Rechtecke, welche je dieselbe Breite aber je eine um 4 *m* größere Länge haben als die Quadrate, geben zusammen 3132 *qm*. Wie lang ist eine Quadratseite? [18 *m*]

18. Drei Quadrate, von denen jedes folgende eine um 2 *m* größere Seite hat, haben zusammen 251 *qm* Inhalt; wie groß ist jede Quadratseite? [7 *m*]

19. Ein Quadrat von 10 *m* Seitenlänge, ein Rechteck von derselben Länge aber geringerer Breite und ein Quadrat, das die kleinere Seite des Rechteckes als Seite hat, haben zusammen 244 *qm* Fläche; wie groß ist die Seite dieses Quadrates? [8 *m*]

20. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produktes $7 \cdot 48$ vermehren, damit das Produkt um 56 größer wird? [1; —56]

---

21. Man soll eine Strecke a so teilen, daß der größere Teil die mittlere geometrische Proportionale wird zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Teile. [gr. T. $= \frac{a}{2}(-1+\sqrt{5})$]

22. Man soll eine Strecke a um ein Stück verlängern, so daß die Strecke a die mittlere geometrische Proportionale wird zwischen der verlängerten Strecke und der Verlängerung. [Verl. $= \frac{a}{2}(-1\pm\sqrt{5})$]

23. Man soll eine Strecke a um ein Stück verlängern, so daß die Verlängerung die mittlere geometrische Proportion wird zwischen der Strecke und der verlängerten Strecke. [Verl. $= \frac{a}{2}(1\pm\sqrt{5})$]

24. Auf einer Geraden sind hinter einander 3 Punkte A, B, C, so daß $AB = a$, $BC = b$ $(a > b)$. Es soll ein Punkt D auf der Geraden so gefunden werden, daß er die Strecke AB ebenso teilt, wie B die Strecke DC teilt (BD soll das geometrische Mittel aus AD und BC werden). Diskussion?

25. Auf der Verlängerung der Strecke $AB = a$ soll über B hinaus ein Punkt C so gefunden werden, daß die Mitte D von AC die Strecke AB ebenso teilt wie B die Strecke DC (im Sinne der vorigen Aufgabe). [$BC = -2a \pm a\sqrt{5}$]

26. Auf der Verlängerung der Strecke $AB = a$ soll über B

hinaus ein Punkt C und über A hinaus ein Punkt D so bestimmt werden, daß A die Mitte von DC ist und daß A die Strecke DB ebenso teilt, wie B die Strecke AC. $[BC = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5})]$

27. Auf der (jeder) Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und b, soll ein Punkt gefunden werden, der von dem auf der Kathete liegenden Endpunkt der Hypotenuse 2 mal weniger weit entfernt ist als vom andern Endpunkt der Hypotenuse.

---

28. 35 Personen machen eine Landpartie, zu deren Kosten jede Dame um 1 *M* weniger beiträgt als ein Herr; wenn nun doch der Gesamtbeitrag der Damen ebensogroß ist als der der Herren, nämlich 60 *M*, wieviel Herren waren beteilt, und was zahlte jeder?

29. Ein Vermögen von 84000 *M* (46800 *M*) sollte unter die hinterbliebenen Kinder gleichmäßig verteilt werden; da aber kurz darauf 2 Kinder starben, bekam jedes der überlebenden um 3500 *M* (1950 *M*) mehr. Wieviel Kinder waren es? [8]

30. Man soll 7 um eine Zahl vergrößern und um dieselbe Zahl verkleinern, so daß der Quotient aus der größeren durch die kleinere und der Quotient aus der kleineren durch die größere zusammen $2\frac{9}{10}$ ausmachen. [$\pm$ 3]

31. Eine Arbeit, bei welcher der Geselle 3 Stck. fertigt, während der Lehrling 2 Stck. fertigt, wird von beiden zusammen in $7\frac{1}{5}$ Stunden gefertigt. Wie lange würde jeder allein brauchen? [12; 18]

32. Zu 900 Stück braucht ein Arbeiter 10 Tage weniger als ein anderer, weil er täglich 3 Stck. mehr fertigt. Wie lange braucht jeder? [50; 60 Tg.]

33. Als das *kg* einer Ware um 20 ₰ aufschlug, bekam ich für 10,5 *M* um $1\frac{1}{4}$ *kg* weniger als früher; was kostete die Ware und wieviel *kg* kaufte ich? [$8\frac{3}{4}$ *kg* à 1,2 *M* früher.]

34. Zwei Röhren liefern zusammen 12 *l* in der Minute; wenn nun die eine zur Füllung eines Behälters von 420 *l* 24 Minuten länger braucht als die andere, wie viel liefert jede einzeln in der Minute? [5; 7 *l*]

35. Ein Behälter wird in 8 Stunden durch zwei Röhren gefüllt, von denen die eine allein 3 Std. länger brauchen würde als die andere. In welcher Zeit würde jede allein den Behälter füllen?

36. 1 Arbeiter und 1 Lehrjunge fertigen täglich 11 Stck.; zu 3000 Stck. brauchen 3 Arb. und 2 Lehrl. um 20 Tg. weniger Zeit als 2 Arb. und 3 Lehrl.; wieviel Stück fertigt jeder täglich?

37. Da A in 7 Std. 3 *km* mehr zurücklegt als B, so braucht er zu 40 *km* um $\frac{3}{4}$ Std. weniger als B; wieviel *km* legt jeder in der Stunde zurück? [5; $4\frac{4}{7}$ *km*]

38. Ein Bräuer hat zweierlei Sorten Fäßchen; von der ersten Sorte faßt jedes 6 Liter weniger als von der zweiten Sorte; des-

halb braucht er, um 6 *hl* abzuzapfen, 5 Fäßchen der ersten Sorte mehr als von der zweiten Sorte. Wieviel faßt jedes?

39. A schöpft mit einem um 2 Liter kleineren Gefäß als B, braucht aber, da er in der Minute 15mal schöpft, und nur 66 *hl* zu schöpfen hat, um 5 Minuten weniger als B, der in der Minute 14mal schöpft und 84 *hl* zu schöpfen hat; wie groß ist jedes Schöpfgefäß? [22; 24 *l*; oder 8 *l*; 10 *l*]

40. Von meiner bisherigen Wohnung brauchte ich eine Stunde zum Dorfe B; um aber von meiner neuen Wohnung auch in einer Stunde nach B zu kommen, muß ich, da der Weg um 1 *km* länger ist, bei jedem *km* 3 Minuten durch rascheres Gehen einsparen. Wieviel *km* sind nach B? [4 *km* bisher]

41. Um einen Vorangehenden, der a Meilen Vorsprung hat, in b Stunden einzuholen, muß einer jede Meile in einer um 1/c Std. kürzeren Zeit zurücklegen als der Vorangehende. Wo holt er ihn ein?

42. Mit einem Vorrat von 26 Ztr. reichen ein Ochse und eine Kuh 84 Tage; wenn nun der Ochse mit einem Zentner einen Tag weniger ausreicht als die Kuh, wie lange reicht jedes mit einem Zentner? [6; 7 Tg.]

43. Ein Jäger erbeutet 6 Hasen und 10 Rebhühner, und tauscht sich schließlich lauter Hasen ein; hätte er lauter Rebhühner eingetauscht, so hätte er im Ganzen 15 Stck. Wild mehr, als wenn er lauter Hasen eingetauscht hätte; wieviel Rebhühner erhält er für einen Hasen, und wieviel Hasen hat er schließlich? [$2\frac{1}{2}$ R. 10 H.]

44. Es kauft einer 60 ℔ Roggenmehl und 40 ℔ Waizenmehl. Hätte er um dasselbe Geld nur Roggenmehl gekauft, so hätte er um 18 ℔ mehr bekommen, als wenn er nur Waizenmehl gekauft hätte. Wie verhält sich der Preis des Roggenmehles zu dem des Waizenmehles? [$= 5 : 6$]

---

45. Eine Ware stieg zuerst im Preis und fiel dann wieder um ebensoviel Prozente; wenn sie nun um 4 % billiger ist, als sie anfangs war, um wieviel % war sie gestiegen? [$\pm$ 20 %]

46. Es hatte einer sein Geld in einem Geschäfte stehen und gewann damit im ersten Jahre eine gewisse Anzahl Prozente; das durch den Gewinn vergrößerte Kapital ließ er im zweiten Jahre wieder im Geschäfte stehen und die Prozente des Gewinnes waren um 5 größer als im ersten Jahre. Sein Vermögen ist dadurch um 26,5 % gestiegen. Um wieviel % stieg es im ersten Jahre?

47. Von seinem Geld bekam einer im ersten Jahre einen gewissen Gewinn, von dem dadurch vergrößerten Kapital im zweiten Jahre um 2 % weniger Gewinn, und doch betrug der Gewinn im zweiten Jahre ebensoviel Mark als im ersten. Wieviel % betrug der Gewinn? [15,2 % ca.]

48. Aus einem 40 Liter Weingeist enthaltenden Fasse wird

eine bestimmte Menge herausgenommen und durch Wasser ersetzt; hierauf wird von dieser Mischung eine um 3 Liter größere Menge herausgenommen und durch Wasser ersetzt; die entstehende Mischung enthält nun 28 Liter Weingeist. Wieviel Liter wurden zuerst herausgenommen? [5 *l*]

49. Von 50 ℔ Roggenmehl à 20 ₰ nimmt einer eine gewisse Menge weg und ersetzt sie durch Waizenmehl à 24 ₰. Von der Mischung nimmt er ebensoviel Pfunde weg und ersetzt sie wieder durch Waizenmehl; wenn nun das ℔ der Mischung 21,44 ₰ kostet (22 ₰ kosten soll), wieviel ℔ Waizenmehl wurden jedesmal zugesetzt?

50. Wieviel Liter muß ich zweimal nacheinander von 150 Liter 80 prozentigen Spiritus wegnehmen und jedesmal durch ebensoviel Wasser ersetzen, um schließlich 60 prozentigen Spiritus zu haben?

51. Von 12 *l* Spiritus à 72 % Gehalt nehme ich eine gewisse Menge weg und ersetze sie durch Wasser; die Mischung hat dann 6 % weniger Gehalt als wenn ich zuerst das Wasser zugegossen (und dann ebensoviel weggenommen) hätte. Wieviel Liter habe ich weggenommen? [4; —3]

52. Ein Fußgänger geht von A nach B und trifft nach 5 Stunden mit dem von B kommenden Postwagen zusammen; er erfährt von dessen Kutscher, daß der Postwagen vor einer Stunde in B fortgefahren sei und zur selben Zeit in A sein werde, wann der Fußgänger in B sein werde, wobei der Fußgänger noch $\frac{1}{2}$ Std. ausrasten dürfe. Wann kommt der Fußgänger nach B? [nach $2\frac{1}{2}$ Std.]

53. Ein Dampfschiff fährt von A stromabwärts; gleichzeitig fährt ein anderes Dampfschiff von B stromaufwärts; als sie sich trafen, hatte das erste Schiff 20 *km* mehr zurückgelegt als das zweite. Von da an braucht das erste Schiff noch 4 Stunden nach B, das zweite noch 9 Std. nach A; wie weit ist von B nach A? [100 *km*]

54. Zwei Kaufleute hatten zu einem gemeinsamen Geschäfte 6200 ℳ (2000 ℳ) hergegeben; der eine, welcher sein Geld 9 (7) Monate im Geschäfte ließ, erhielt 2947 (1710) ℳ an Einlage und Gewinn, der andere für 12 Monate 3638 (1040) ℳ Einlage und Gewinn. Wie groß war jede Einlage? [2800; 3400]

55. Zwei Kreise, deren Radien 30 *cm* ($= r_1$) und 20 *cm* ($= r_2$) sind, bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels gegen den Scheitel zu; der Mittelpunkt des einen ist vom Scheitel 124 *cm* ($= a$) entfernt und bewegt sich mit 7 *cm* ($= v_1$) Geschwindigkeit gegen den Scheitel hin; der Mittelpunkt des zweiten ist vom Scheitel 102 *cm* ($= b$) entfernt und bewegt sich mit 6 *cm* ($= v_2$) Geschwindigkeit gegen den Scheitel; wann werden sich die Kreise von außen, wann von innen berühren?

56. In einem Kreise vom Radius r ist ein vertikaler Durchmesser gezogen. Auf einem Punkte desselben im Abstande a vom Mittelpunkte nach aufwärts befindet sich der Mittelpunkt eines klei=

neren Kreises vom Radius ϱ; dieser bewegt sich und zwar sowohl in vertikaler Richtung nach abwärts mit der Geschwindigkeit c als auch in horizontaler Richtung nach rechts mit der Geschwindigkeit c'; wann werden sich die Kreise von innen, wann von außen berühren?

57. Zwei Räder von den Radien 12 *cm* und 5 *cm* rollen einander entgegen; der Abstand der Punkte, in welchen sie den Boden berühren, beträgt anfangs 6,4 *m* und bei 6 Umdrehungen des ersten Rades macht das zweite deren 11. Nach wieviel Umläufen stoßen die Räder mit ihren Rändern zusammen? [4,7 ca.]

58. Bei einem Bau bekamen die Gesellen täglich 35 ℳ, die Handlanger 20 ℳ, die Lehrlinge 5 ℳ. Dabei waren die Handlanger um 2 weniger als die Gesellen und um 3 mehr als die Lehrlinge, und es bekam ein Geselle soviel als ein Handlanger und ein Lehrling zusammen. Wieviel Arbeiter von jeder Art waren es?

59. Ein Kapitalist bezog aus seinen Bergwerksaktien jährlich 2860 ℳ, aus den Eisenbahnaktien 1250 ℳ und aus den Zinshäusern 1540 ℳ Einnahme, und hatte dabei in den Zinshäusern um 17000 ℳ und in den Bergwerkaktien um 8000 ℳ mehr angelegt als in den Eisenbahnaktien. Wenn er nun aus je 100 ℳ Bergwerkaktien ebensoviel Gewinn zieht, wie aus je 100 ℳ Eisenbahnaktien und je 100 ℳ der Zinshäuser zusammen; wie groß ist sein Vermögen? [100000 ℳ]

60. Man soll eine Strecke a so teilen, daß das Rechteck aus den Teilen gleich ist der Summe der Quadrate der Teile (gleich ist der Hälfte dieser Summe). $\left[\text{Teil} = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{-\tfrac{1}{3}}\right)\right]$

61. Eine Strecke a soll auf einer Seite um soviel verlängert werden, daß das Rechteck aus der Strecke und der Verlängerung gleich ist der Summe der Quadrate über diesen beiden Strecken.

62. In wieviel Stunden müßte einer 30 *km* zurücklegen, damit er in jeder Stunde um 1 *km* mehr macht als ein anderer, der zu 21 *km* um eine Stunde weniger braucht als der erste zu 30 *km*? [In $5 \pm \sqrt{-5}$ Std.]

63. Zwei Strecken von 24 *m* und 36 *m* sollen so geteilt werden, daß die Teile der 24 *m* der Anzahl nach um 2 weniger und der Größe nach um je 1 *m* kleiner sind, als die Teile der 36 *m*. Wieviel Teile sind zu machen? [$5 \pm \sqrt{-23}$]

64. Die Geschwindigkeit zweier Eisenbahnzüge soll so bestimmt werden, daß der eine zum Durchlaufen von 100 *km* eine Stunde weniger braucht als der andere zum Durchlaufen von 150 *km*, und daß dabei der erste stündlich 5 *km* weniger macht als der zweite. Wie lange braucht jeder zum Durchlaufen seiner Strecke? Wie stellt sich die Lösung, wenn der erste stündlich 6 *km* weniger machen soll als der zweite? [5; 4 Std.; $\frac{1}{6}(22 \pm \sqrt{-116})$]

Aufl.: **27.** Abstand des Punktes vom Endpunkte d. Kathete $a = \frac{1}{3}$

$(-a \pm \sqrt{3b^2 + 4a^2})$. **28.** 15 H. à 4 M. **36.** 8; 3. **46.** 10 %. **49.** 10 ℔ ca. **50.** 20 l ca. **55.** Nach 12″, $22\frac{4}{17}$″ v. außen. **58.** 10 Ges. 8 H. 5 L. **61.** Verl. $= \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$.

4. Abschnitt. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

100.

Wir betrachten zunächst Gleichungen mit 2 Unbekannten.

Sind die Gleichungen beide quadratisch, so wird im allgemeinen, wenn man eine Unbekannte aus einer Gleichung berechnet und ihren Wert in die andere einsetzt, die entstehende Gleichung vom vierten Gerade, und deshalb im allgemeinen mit den bisherigen Mitteln unauflösbar sein.

Man wird deshalb die Auflösungsmethode so zu wählen haben, daß entweder eine Gleichung vierten Grades nicht entsteht, oder daß dieselbe eine einfache, die Auflösung ermöglichende Form besitzt. Es gibt hiefür keine allgemein giltige Regel, sondern nur eine Reihe von Verfahrungsarten, unter welchen man je nach der Natur der gegebenen Gleichungen mit Geschick die passenden auszuwählen hat.

1. Ist eine Gleichung linear, so berechnet man aus ihr eine Unbekannte, setzt sie in die zweite Gleichung, welche dabei quadratisch bleibt, und löst diese auf; aus den Werten dieser Unbekannten berechnet man die Werte der ersten Unbekannten. Man erhält allgemein zwei Paare zusammengehöriger Werte der Unbekannten.

Beispiel: I. $x^2 + 3xy - y^2 - 3x + 3y = 16$;

II. $2x - y = 1$;

aus II ist $y = 2x - 1$; dies in I gibt

$$\text{I. } x^2 + 6x^2 - 3x - 4x^2 + 4x - 1 - 3x + 6x - 3 = 16$$
$$3x^2 + 4x = 20$$
$$x = -\tfrac{2}{3} \pm \tfrac{8}{3};$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3\tfrac{1}{3}; \text{ beide in II gibt}$$
$$y_1 = 3, \quad y_2 = -7\tfrac{2}{3}.$$

2. Sind beide Gleichungen quadratisch, so läßt sich hie und da die eine in zwei lineare Gleichungen zerspalten, und man hat dann jede der linearen Gleichungen mit der anderen quadratischen zu verbinden; man erhält daher im allgemeinen 4 Paare zusammengehöriger Werte der Unbekannten.

Das Zerspalten kann auf verschiedenartige Weise geschehen: a) indem das auf Null gebrachte Gleichungspolynom sich als Produkt linearer Faktoren darstellt, und man deshalb jeden Faktor $= 0$ setzen kann, oder b) indem man die eine Unbekannte (x) aus der Gleichung berechnet, und zusieht, ob die Quadratwurzel herausgeht; in diesem Falle hat man für x zwei getrennte lineare Ausdrücke

durch die andere Unbekannte, was zwei linearen Gleichungen entspricht, oder c) wenn die Unbekannten blos in einem linearen Ausdruck vorkommen, inbezug auf welchen die Gleichung quadratisch ist; man bestimmt dann, indem man diesen Ausdruck als Unbekannte ansieht, seine Werte aus der Gleichung, und diese zwei Werte liefern die zwei linearen Gleichungen, in welche die eine Gleichung zerfällt.

Beispiele: a) die Gleichung I. $x^2-y^2-2x+2y=0$ zerfällt in Ia) $x-y=0$, Ib) $x+y-2=0$.

b) I) $x^2-y^2+4x-6y=5$ gibt nach x aufgelöst:

$$x^2+4x=y^2+6y+5,\quad x=-2\pm(y+3),$$

sie zerfällt also in Ia) $x-y-1=0$, Ib) $x+y+5=0$

c) I) $x^2-10xy+25y^2-4x+20y=12$ läßt sich darstellen als: $(x-5y)^2-4(x-5y)-12=0$ und zerfällt in

Ia) $x-5y-6=0$, Ib) $x-5y+2=0$;

oder $\left(\frac{2x-3y}{x+y}\right)^2-10\left(\frac{2x-3y}{x+y}\right)+13=0$ gibt für $\frac{2x-3y}{x+y}=v$:

$v^2-10v+13=0$, also $v=5\pm2\sqrt{3}$. Dies gibt die zwei linearen Gleichungen:

$$\text{Ia)}\ \frac{2x-3y}{x+y}=5+2\sqrt{3}\ \text{ oder }\ x=-\tfrac{2}{3}y(5\sqrt{3}-6);$$

$$\text{Ib)}\ \frac{2x-3y}{x+y}=5-2\sqrt{3}\ \text{ oder }\ x=\tfrac{2}{3}y(5\sqrt{3}+6).$$

Anmerkung. Den Vorteil des Zerspaltens der quadratischen Gleichung läßt man sich, wenn dasselbe überhaupt möglich ist, oft auch dann nicht entgehen, wenn die andere Gleichung linear ist, also das Zerspalten der quadratischen Gleichung gar nicht notwendig ist.

3. Ist eine der gegebenen Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade, so suche man sie in mehrere Gleichungen niedrigeren Grades zu zerlegen auf ähnliche Weise wie in 2 angegeben: a. indem man einen Faktor abspaltet, b. indem man eine Unbekannte oder das Quadrat einer Unbekannten berechnet, c. indem die Gleichung als quadratische Gleichung eines aus den Unbekannten gebildeten Ausdruckes ansieht und für diesen Ausdruck als Unbekannte auflöst.

4. Sind beide Gleichungen quadratisch, und läßt sich keine direkt zerspalten, so suche man die zwei Gleichungen so mit einander zu verbinden, daß die resultierende Gleichung entweder selbst von niedrigerem Grade wird, oder doch in zwei lineare Gleichungen zerspaltet werden kann. Auf welche Weise die Gleichungen verbunden werden müssen, läßt sich allgemein nicht angeben, da je nach der Art der Gleichungen die allerverschiedensten Mittel angewandt werden müssen. In jedem Falle ist die resultierende Gleichung, oder sind die resultierenden Gleichungen an Stelle einer der gegebenen Gleichungen zu setzen (man hat die eine Gleichung vereinfacht mit Hilfe

der anderen). Als zweite Gleichung ist die gegebene zweite Gleichung zu benützen, oder man kann versuchen (hie und da muß man versuchen), aus den zwei gegebenen Gleichungen durch eine andere Art von Verbindung noch eine andere neue Gleichung herzustellen, welche sich zerspalten läßt, und diese an Stelle der zweiten gegebenen Gleichung zu stellen.

An folgenden Beispielen mögen die gewöhnlichsten Arten der Vereinfachung einer Gleichung durch die andere dargestellt sein.

$$\text{I. } x^2 + xy = 10; \qquad \text{II. } xy + y^2 = 15.$$

Division von I durch II liefert Ia) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

$$\text{I. } x^2 + 3y = 5; \qquad \text{II. } 2xy + 3y = 5.$$

Subtraktion I—II liefert $x^2 - 2xy = 0$, also

$$\text{Ia. } x = 0; \qquad \text{Ib. } x - 2y = 0;$$

jede ist mit II zu verbinden.

$$\text{I. } x^2 + y^2 = 52; \qquad \text{II. } xy = 24.$$

Nimmt man II doppelt und addiert zu I, so ist $x^2 + 2xy + y^2 = 100$, also

$$\text{Ia. } x + y = 10; \qquad \text{Ib. } x + y = -10.$$

Hiezu nimmt man beidesmal II. $xy = 24$; oder, um auch diese zu vereinfachen, nimmt man II doppelt und subtrahiert von I, so hat man $x^2 - 2xy + y^2 = 4$, also

$$\text{IIa. } x - y = 2; \qquad \text{IIb. } x - y = -2.$$

Jede Gleichung des ersten Systems ist mit jeder Gleichung des zweiten Systems zu verbinden, also hat man die vier Systeme:

$x + y = 10$	$x + y = 10$	$x + y = -10$	$x + y = -10$
$x - y = 2$	$x - y = -2$	$x - y = 2$	$x - y = -2$

Diese liefern der Reihe nach die 4 Wertepaare:

$x_1 = 6$	$x_2 = 4$	$x_3 = -4$	$x_4 = -6.$
$y_1 = 4$	$y_2 = 6$	$y_3 = -6$	$y_4 = -4.$

$$\text{I. } x^2 + y^2 - xy = 13; \qquad \text{II. } 6(x + y) - xy = 26.$$

Subtrahiert man von I die dreifache II, so ist $(x + y)^2 - 18(x + y) = -65$, hieraus

$$\text{Ia. } x + y = 5; \qquad \text{Ib. } x + y = 13.$$

Vereinfacht man hiemit auch II, so ist

$$\text{IIa. } xy = 4; \qquad \text{IIb. } xy = 52.$$

Ein solches System von Gleichungen wie Ia und IIa, bei welchem gegeben ist die Summe zweier Zahlen und das Produkt derselben Zahlen, löst man auf, indem man eine quadratische Gleichung bildet, bei welcher der Koeffizient der Unbekannten gleich der negativen Summe und das konstante Glied gleich dem Produkt der Zahlen ist, also

$$v^2 - 5v + 4 = 0,$$

die Wurzeln dieser Gleichung haben dann dieselben Eigenschaften

wie die gesuchten Zahlen, sind also gleich den gesuchten Zahlen. Diese Gleichung liefert nun $v_1 = 4$, $v_2 = 1$, also ist

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1;$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = 4;$$

ebenso liefert für das zweite System die Gleichung

$$w^2 - 13w + 52 = 0$$

die Wurzeln $w = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-39}$, also ist

$$x_3 = \tfrac{13}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-39}; \quad x_4 = \tfrac{13}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-39};$$
$$y_3 = \tfrac{13}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-39}; \quad y_4 = \tfrac{13}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-39}.$$

I. $x^2 - 2xy + 3y^2 + 3x - y = 64.$

II. $\quad 2xy - y^2 + 5y = -44.$

Subtrahiert man II von I, so hat man

$$(x - 2y)^2 + 3(x - 2y) = 108;$$

dies liefert für $x - 2y$ als Unbekannte

I a. $x - 2y = 9, \qquad$ I b. $x - 2y = -12.$

Jede ist mit II zu verbinden.

4. Sind beide Gleichungen quadratisch, kommen aber in jeder nur die quadratischen Glieder der Unbekannten vor, so bildet man aus ihnen eine neue Gleichung, indem man die konstanten Glieder eliminiert; da diese neue Gleichung nur mehr quadratische Glieder der Unbekannten enthält, so kann man sie mit y^2 dividieren, dann enthält sie $\frac{x}{y}$, was aus ihr berechnet werden kann. Die neue Gleichung hat sich dadurch in zwei lineare Gleichungen zerspaltet, und diese sind mit einer der gegebenen Gleichungen zu verbinden.

I. $4x^2 - 2xy + y^2 = 36;$

II. $3x^2 - 5xy + 2y^2 = 9.$

Multipliziert man II mit 4 und subtrahiert I, so ist $8x^2 - 18xy + 7y^2 = 0$, dividiert mit $8y^2$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{18}{8}\frac{x}{y} = -\frac{7}{8}; \text{ dies gibt}$$

II a. $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \quad$ II b. $\frac{x}{y} = \frac{7}{4}.$

Jede ist mit I zu verbinden.

6. Sind in beiden Gleichungen alle Glieder, welche die Unbekannten enthalten, blos in zwei Ausdrücken enthalten, so daß es möglich ist, mit diesen zwei Ausdrücken alle Unbekannten zu umfassen, so setzt man jeden dieser Ausdrücke gleich einer neuen Unbekannten (Substitutionsgleichungen), berechnet diese Unbekannten aus den entstehenden Gleichungen, setzt ihre Werte in die Substitutionsgleichungen und berechnet aus diesen die gesuchten Unbekannten.

I. $(x + y^2)^2 + (x + 2y)^2 = 89;$

II. $y^2 - 4y - x = -2.$

Die Gleichung II läßt sich in der Form schreiben

II. $x + y^2 - 2x - 4y = -2$.

Man kann also setzen:

A. $x + y^2 = u$, B. $x + 2y = v$ (Substitutionsgleichungen), so ist: I. $u^2 + v^2 = 89$, $u - 2v = -2$.

Dies gibt $u_1 = 8$; $u_2 = -\frac{64}{15}$;

$v_1 = 5$; $v_2 = -\frac{17}{15}$.

Beides in die Substitutionsgleichungen eingesetzt, gibt die zwei Systeme von Gleichungen:

A_1. $x + y^2 = 8$; A_2. $x + y^2 = -\frac{64}{15}$;

B_1. $x + 2y = 5$; B_2. $x + 2y = -\frac{17}{15}$.

7. Ist eine Gleichung von höherem als dem zweiten Grade, so sucht man sie zu zerspalten, oder unter Zuhilfenahme der zweiten Gleichung zu zerspalten oder wie in 6 neue Unbekannte für beide Gleichungen aufzustellen.

Zur Auflösung von quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten hat man also hauptsächlich die drei Hilfsmittel: Zerspalten einer Gleichung in mehrere Gleichungen niedrigeren Grades, Verbindung (Kombination) der zwei Gleichungen, um dadurch eine einfachere oder eine zerspaltbare Gleichung zu bekommen, und die Einführung neuer Unbekannten. Der Erfolg der Anwendung dieser Hilfsmittel ist dann der, daß das gegebene System von zwei Gleichungen zerlegt worden ist in mehrere Systeme von je zwei einfacheren Gleichungen.

101.

Quadratische Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

1. Ein System von Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten ist im allgemeinen nur dann auflösbar, wenn nur eine Gleichung quadratisch, die andern alle aber linear sind. Ist dies der Fall, so betrachtet man in den $(n-1)$ linearen Gleichungen eine Unbekannte, etwa x, als bekannt, und berechnet aus den $(n-1)$ linearen Gleichnngen die übrigen $(n-1)$ Unbekannten. Es sind dann alle $(n-1)$ übrigen Unbekannten durch eine Unbekannte (x) linear ausgedrückt. Diese Ausdrücke setzt man alle auf einmal in die quadratische Gleichung, wodurch man eine quadratische Gleichung mit nur einer Unbekannten (x) erhält. Aus ihr berechnet man die Werte dieser Unbekannten, und durch Substitution derselben in die linearen Ausdrücke erhält man die Werte der anderen Unbekannten.

Beispiel: I. $x^2 - 5xy + y^2 - yz + z^2 + 9x = -1$;

II. $5x - 2y + 3z = 20$:

III. $6x - 4y + 3z = 18$;

Eliminiert man z aus II und III, so ist:

$-x + 2y = 2$, also $y = \frac{1}{2}(x + 2)$ (II').

Eliminiert man y aus II und III, so ist:

$$4x + 3z = 22, \text{ also } z = \tfrac{1}{3}(22 - 4x) \text{ (III')},$$

Setzt man die Werte von y und z in I, so ist:

$$x^2 - 5x \cdot \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(x+2)(22-4x)}{6} + \frac{(22-4x)^2}{9} + 9x = -1;$$

$$43x^2 - 608x = -1744,$$

$x_1 = 4$, $x_2 = 10\frac{6}{43}$; dies in II' und III' gibt:
$y_1 = 3$, $y_2 = 6\frac{3}{43}$; $z_1 = 2$, $z_2 = -6\frac{8}{43}$.

2. Sind außer einer quadratischen Gleichung noch eine oder mehrere quadratische Gleichungen vorhanden, so suche man dieselben in lineare Gleichungen zu zerspalten. Dies geschieht nach den im vorigen Paragraphen angegebenen Methoden; indem man dann jede der durch Zerspalten erhaltenen Gleichungen mit den andern gegebenen Gleichungen verbindet, erhält man Systeme, welche nach 1) auflösbar sind.

Beispiel: I. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;
II. $(x + z)y = 0$;
III. $(x + y)^2 + 3(x + y) = 10$.

Hiebei zerfällt II von selbst in

IIa·) $x + z = 0$, IIb·) $y = 0$.

Löst man III nach $x + y$ auf, so zerfällt es in

IIIa) $x + y = 2$, IIIb·) $x + y = -5$.

Man erhält also folgende vier Systeme:

A. I, IIa, IIIa; B. I, IIa, IIIb;
C. I, IIb, IIIa; D. I, IIb, IIIb.

Jedes System liefert zwei Systeme von Wurzeln, und man erhält:

A. $x_1 = 1$; $y_1 = 1$; $z_1 = -1$;
$x_2 = \frac{1}{3}$; $y_2 = 1\frac{2}{3}$; $z_2 = -\frac{1}{3}$.
B. $x_{3,4} = -\frac{5}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{-41}$, $y_{3,4} = -3\frac{1}{3} \mp \frac{1}{3}\sqrt{-41}$, $z_{3,4} = -x_{3,4}$.
C. $x_{5,6} = 2$, $y_{5,6} = 0$, $z_{5,6} = \pm\sqrt{-1}$.
D. $x_{7,8} = -5$, $y_{7,8} = 0$, $z_{7,8} = \pm\sqrt{-22}$.

Beispiel: I. $x^2 + xy + y^2 + yz = -5$;
II. $xy - yz = 6$;
III. $y^2 + 4z^2 - 4xy = 97$.

Aus I + II erhält man $x + y = \pm 1$, was man an Stelle von I setzen kann als

I a) $x + y = +1$, I b) $x + y = -1$.

Aus III + 4 · II erhält man $y - 2z = \pm 11$ was man statt III nehmen kann als

IIIa) $y - 2z = +11$, IIIb) $y - 2z = -11$.

Man erhält also folgende vier Systeme:

A. Ia, II, IIIa; B. Ia, II, IIIb;
C. Ib, II, IIIa; D. Ib, II, IIIb.

Jedes System liefert zwei Systeme von Wurzeln.

3. Manchmal läßt sich leicht eine Unbekannte eliminieren, wodurch das System auf ein System von weniger Unbekannten zurückgeht.

Manchmal läßt sich durch passende Vereinigung der Gleichungen eine Gleichung herstellen, welche bloß eine Unbekannte enthält; indem man diese daraus berechnet und ihren Wert in die anderen Gleichungen einsetzt, erhält man auch ein System von wewenigen Unbekannten.

Beispiel: I. $x^2 + y^2 + 3yz = 2$;
II. $x^2 + 2yz + z^2 - z = 4$;
III. $3y - 2z = 5$.

Aus I—II erhält man

II′ $y^2 + yz - z^2 + z = -2$, III $3y - 2z = 5$.

Dies System liefert $y_1 = 1$, $z_1 = -1$; $y_2 = -27$, $z_3 = -43$.

Setzt man diese Werte in I, so erhält man

$$x_1 = \pm 2,\ x_2 = \pm\sqrt{-4210}.$$

Beispiel: I. $x + y + z = 2$;
II. $x^2 + y^2 + z = 14$;
III. $xz + y = 1$.

II + 2·III gibt $(x + z)^2 + y^2 + 2y = 16$
aus I ist $(x + z)^2 = (2 - y)^2$; dies eingesetzt gibt
II′ $4 - 4y + y^2 + y^2 + 2y = 16$, hieraus
II′a $y = 3$, II′b $y = -2$.

Vereinfacht man mittels dieser Werte durch Einsetzen auch I und III, so hat man die Systeme:

A. $y = 3$, $x + z = -1$, $xz = -2$;
B. $y = -2$, $x + z = 4$, $xz = 3$.

Sie geben die Wertsysteme

$$y_{12} = 3 \quad \begin{matrix} x_1 = 1,\ z_1 = -2; \\ x_2 = -2,\ z = 1; \end{matrix} \qquad y_{34} = -2, \quad \begin{matrix} x_3 = 3,\ z_3 = 1. \\ x_4 = 1,\ z_4 = 3. \end{matrix}$$

4. Man sucht sämtliche vorhandenen Unbekannten durch Einführung neuer Unbekannten auszudrücken. Man bestimmt die Werte oder Wertsysteme der neuen Unbekannten, setzt diese in die Substitutionsgleichungen ein und bestimmt aus ihnen die Werte der ursprünglichen Unbekannten.

Beispiel: I.) $(x + y)^2 - 2(x^2 - yz) = 11$;
II) $(x + y)^2 - 3(y^2 + xz) = 4$;
III) $(x^2 - yz)(y^2 + xz) = 49$.

Man setzt: $x^2 - yx = u$, $y^2 + xz = v$, $x + y = w$ (Substitutionsgleichungen), so hat man das System:

I. $w^2 - 2u = 11$;
II. $w^2 - 3v = 4$;
III. $uv = 49$;

I—II liefert $3v - 2u = 7$; $u = \frac{3v-7}{2}$; dies in III gibt

$$v_1 = 7; \quad u_1 = 7; \quad w_1 = \pm 5;$$
$$v_2 = -4\tfrac{2}{3}; \quad u_2 = -10\tfrac{1}{2}; \quad w_2 = \pm\sqrt{-10}.$$

Das sind 4 Wertsysteme der neuen Unbekannten. Jedes derselben ist in die Substitutionsgleichungen einzusetzen. Wir setzen zuerst das erste ein, so ist:

1) $x^2 - yz = 7$
2) $y^2 + xz = 7$
3) $x + y = 5$,

1) — 2) gibt $(x+y)(x-y) - z(x+y) = 0$, oder mittels 3).

2′) $x - y - z = 0$; 3) $x + y = 5$;

hieraus $x = 5 - y$, $z = 5 - 2y$; beides in 1) gibt

$25 - 10y + y^2 - 5y + 2y^2 = 7$;

$y_1 = 2$, $x_1 = 3$, $z_1 = 1$;

$y_2 = 3$, $x_1 = 2$, $z_1 = -1$.

Das sind zwei Wertsysteme; da man aber jedes der 4 Wertsysteme der Hülfsunbekannten einzusetzen hat, so bekommt man im Ganzen 8 Wertsysteme der gesuchten Unbekannten.

Es soll durch vorstehende Bemerkungen und Beispiele nur auf die gebräuchlichsten Wege hingewiesen sein, auf denen man zu auflösbaren Gleichungssystemen gelangen kann, und es soll dabei durch die Beispiele gezeigt sein, wie man bei Zerspaltung von Gleichungen oder bei Einführung neuer Unbekannten die neuen Systeme bildet; keineswegs aber können damit die ungemein verschiedenartigen Wege, welche bei der unendlichen Mannigfaltigkeit der möglichen Gleichungen zum Ziele führen, auch nur annähernd vollständig bezeichnet sein. Es bleibt dem eigenen Scharfsinn überlassen, sich in jedem besonderen Falle zurecht zu finden. Eine allgemeine Auflösungsart kann schon deshalb nicht gegeben werden, weil schon zwei allgemeine Gleichungen zweiten Grades zu einer Gleichung vierten Grades führen, die sich nicht auf quadratische Gleichungen reduzieren läßt, und weil schon 3 allgemeine Gleichungen zu einer Gleichung achten Grades führen, die überhaupt nicht allgemein auflösbar ist.

102.

Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

1. $x^2 + y^2 = 6{,}8$; $x^2 - y^2 = 2{,}88$;

2. $(5x)^2 + 3y^2 = 273$; $45y^2 + 25x^2 = 945$;

3. $\left\{\begin{array}{l} xy = p; \\ \frac{x}{y} = q; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} (x-2)(y-3) = 50; \\ \frac{x-2}{y-3} = 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 12; -8 \\ y = 8; -2 \end{array}\right]$

4. $(x+y):(x-y) = 15:13$; $9:\frac{1}{8}x = \frac{1}{9}y:7$;

5. $x^2+y^2=68-8(x-y)$; $x=14-y$; [$x=2;\ 4;\ y=12;\ 10$]

6. $7x^2+6y^2=229$; $3x=5y$; [$x=\pm5;\ y=\pm3$]

7. $x^2+2xy+3y^2+4x=51$; $3x-y=3$; [$x=2;\ -\frac{6}{17};\ y=3;\ -4\frac{1}{17}$]

8. $\dfrac{5x-3y}{11x-7y}=\frac{4}{7}$; $y^2-x^2=32$; [$x=\pm7;\ y=\pm9$]

9. $x^2-2xy+4y^2-6y=18$; $5x-4y=11$; [$x=5;\ 1\frac{4}{19};\ y=3\frac{1}{2};\ -1\frac{9}{38}$]

10. $x^2-2y^2-2x+3y=1$; $x+y=3$; [$x=2;\ 5;\ y=1;\ -2$]

11. $\begin{cases} x^2+xy-y^2+2ay-2bx=3a^2+7ab-3b^2 \\ x+y=3a+b; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+xy=a; \\ xy+y^2=b; \end{cases}$ **13.** $\dfrac{x-3}{8-y}+\dfrac{y-8}{x-3}=\frac{16}{15}$; $x+y=13$;

14. $\begin{cases} x^2+xy=a; \\ 3xy+4y^2=b; \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x^2-xy=7; \\ 4x^2-3xy=18; \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} x=\pm2;\ \pm7 \\ y=\mp1\frac{1}{2};\ \pm6 \end{matrix}\right]$

16. $\begin{cases} x^2-y^2-x+y=\frac{1}{8}; \\ x^2-y^2+x+y=\frac{3}{8}; \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} x^2+2xy=3a^2-4ab; \\ xy+2y^2=-a^2+2ab; \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}+3y^2=48; \\ \dfrac{5}{x^2}-4y^2=29; \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} 3x^2+4y^2=4(35+4y)-18x; \\ 3x=2(y+1); \end{cases}$

20. $x-y=8\sqrt{x}-4\sqrt{5y}$; $\sqrt{4x}-\sqrt{5y}=1$;

21. $\begin{cases} x^2-y^2=4a; \\ x^2+xy=2a(a+1); \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-y^2=4ab; \\ \dfrac{y}{x}-y^2=2b(a-b); \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3(x-8)^2+5(y-10)^2=93; \\ 8(x-8)^2-9(y-10)^2=47; \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} x=4;\ 12;\ y=13;\ 7 \\ y=7;\ 13 \end{matrix}\right]$

24. $\begin{cases} 3(3x-4y-3)^2+7(4x-7y+8)^2=75; \\ 7(3x-4y-3)^2-2(4x-7y+8)^2=10; \end{cases}$

25. $\left(\dfrac{3}{x}\right)^2-24=\left(\dfrac{4}{y}\right)^2$; $\frac{15}{28}y^2=\frac{28}{15}x^2$;

26. $(x-2)(y+3)=4+2\sqrt{3}$; $\dfrac{x-2}{y+3}=1$;

27. $\left(\dfrac{18}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{y-1}{3}\right)^2=5$; $\left(\dfrac{24}{x+1}\right)^2+(2y-2)^2=160$;

28. $\begin{cases} x=a\sqrt{x+2y}; \\ y=b\sqrt{x+2y}; \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=162; \\ y^2+x\sqrt{xy}=81; \end{cases}$

30. $x^3-xy^2=756$; $x^2y-y^3=567$;

31. $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=b; \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x+y=7; \\ xy=12; \end{cases}$

33. $\begin{cases} x+y=a; \\ x^2+y^2=b; \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x+y=2a; \\ xy=a^2-b^2; \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2+y^2=17545; \\ x+y=187; \end{cases}$ [x=88; 99; y=99; 88]

36. $\begin{cases} x+y=1\frac{1}{2}(a-b); \\ xy=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-1\frac{1}{4}ab; \end{cases}$ **37.** $\begin{cases} x+y=1\frac{1}{24}; \\ xy=\frac{1}{4}; \end{cases}$

38. $\begin{cases} x-y=a; \\ xy=b; \end{cases}$ **39.** $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2\frac{1}{6}; \\ xy=1; \end{cases}$

40. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3; \\ \frac{9}{xy}=20; \end{cases}$ **41.** $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{7}{24}; \\ 4:\sqrt{x}=\sqrt{y}:12; \end{cases}$

42. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{a^2+b^2}{ab}; \\ \frac{1}{xy}=\frac{a^2-b^2}{ab}; \end{cases}$ **43.** $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{y-2}}=\frac{3}{2}; \\ \frac{1}{\sqrt{(x+2)(y-2)}}=\frac{1}{2}; \end{cases}$

44. $\begin{cases} (x+4)(y-3)=1; \\ x-y=1; \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^2+y^2=a; \\ xy=b; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=13; \\ xy=6; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+4)(y-3)=1; \\ x+y=1; \end{cases}$

46. $\begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2=32; \\ x+y=12; \end{cases}$ **47.** $\begin{cases} (3x+2y)^2+(5x-4y)^2=221; \\ (3x+2y)(5x-4y)=70; \end{cases}$

48. $x^2+xy+y^2=a; \quad xy=b;$

49. $x^2+y^2=\frac{2a^2+2ab+b^2}{a^2}; \quad xy=\frac{a+b}{a};$

50. $x^2+xy+y^2=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2}; \quad xy=\frac{b-a}{a};$

51. $x^2-xy+y^2=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}; \quad xy=\frac{1}{ab};$

52. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=4\frac{1}{4}; \quad x^2+y^2=34;$

53. $\frac{ax-by}{bx+ay}=1; \quad x^2-2y^2+3xy=2a^2+6ab-4b^2;$

54. $\frac{ax-by}{bx+ay}=1; \quad x^2+y^2-ax-by=a^2-2ab+3b^2;$

54 α. $x^3+y^3=b; \quad x+y=a;$

55. $x^2-y^2=11; \quad (x+y+1)^2+(x-y+1)^2=148;$

56. $\frac{a(x+y)-b(x-y)}{(a+b)x+(a-b)y}=1; \quad x^2-y^2-ax-by=a^2+2ab+b^2;$

57. $x^2 - y^2 + xy = 59; \quad (x+y)^2 = 81.$

58. $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{ab}; \quad x^2 - y^2 = a^4;$

59. $\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = 5a^2 + 2ab + 2b^2; \\ xy + y^2 = 2a^2 - ab - b^2; \end{cases}$

60. $\begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = 6a^2 - 3ab + 6b^2; \\ \quad xy - y^2 = a^2 + ab - 2b^2; \end{cases}$

61. $\begin{cases} xy = 4b^2; \\ x^2 + y^2 + xy = 4a^2 - \dfrac{x^2y^2}{4b^2}; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10; \\ xy = 576; \end{cases}$

62. $\begin{cases} xy + x = \dfrac{a}{2}(a - b + 2); \\ xy + y = \dfrac{a+1}{2}(a - b); \end{cases}$

63. $\begin{cases} (2x-1)(3x+y) - 2x + y = 42; \\ (2x-1)(3x+y) + 3x - 4y = 17; \end{cases}$

64. $\begin{cases} x+y = xy; \\ x+y+x^2+y^2 = a; \end{cases}$ **65.** $\begin{cases} xy = a(x+y); \\ x^2+xy+y^2 = b(x+y); \end{cases}$

66. $\begin{cases} xy = ab(x+y); \\ x^2+y^2 = xy + (a+b)^2(a^2-ab+b^2); \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} : (a+2b) = \dfrac{1}{y} : (a-2b); \\ (x^2+xy+y^2)(a^2-4b^2) = a(x+y) + \dfrac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2}; \end{cases}$

68. $\begin{cases} x^2 - y^2 = ay; \\ x(x+y) = by; \end{cases}$ **69.** $\begin{cases} x^2 - y^2 = ax; \\ x(x+y) = ay; \end{cases}$

70. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 6; \\ x(x-y) = 3\frac{1}{2}; \end{cases}$ **71.** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 22; \\ (x+y)(x-4) = (x+y)(y-1) - 11; \end{cases}$

72. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 22; \\ (x+y)(x-1) = (x+y)(2y-5) + 16\frac{1}{2}; \end{cases}$

73. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5(a^2 - b^2); \\ (x+y)(x-3a) + (x+y)(y-3b) = 10(a+b)^2; \end{cases}$

74. $x+y = xy = x^2+y^2;$

75. $x-y = xy = x^2+y^2;$

76. $x+y = xy = x^2-y^2;$

77. $x^2+y^2-8 = x+y = xy+2;$

78. $x^2+y^2 = (x+y)\frac{3}{2}\sqrt{2} = xy+5;$

79. $\begin{cases} ax^2+bxy = c; \\ dx+ey = f; \end{cases}$ **80.** $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2 = d; \\ mx+ny = p; \end{cases}$

81. $\begin{cases} x^2 = ax+by; \\ y^2 = bx+ay; \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2+3x-6y = 28; \\ x^2+3xy+y^2-4x-3y = 150; \end{cases}$

83. $\begin{cases} 2x^2-4y^2+6x+24y-60=100; \\ 3x^2-5(y-3)^2+4x=155; \end{cases}$

84. $\begin{cases} x^2+ay^2-2ax-a^2y=(1-a)(1+2a); \\ (a-1)(x-a)^2+(a+1)y^2-(a^2-1)y=a-1; \end{cases}$

85. $\begin{cases} x^3+y^3=855; \quad (=1\tfrac{1}{8}) \\ xy = 56; \quad (=\tfrac{1}{2}) \end{cases}$

86. $\begin{cases} 4x^2-y^2=12x-6y; \\ 8xy=35; \end{cases}$ **87.** $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=7; \\ \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=37; \end{cases}$

88. $\begin{cases} u^3+v^2=3u^2; \\ u+v^2=u^2; \end{cases}$ **89.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}-3\dfrac{x}{y}=-\tfrac{20}{9}; \\ 2x-3y=1; \end{cases}$

90. $\begin{cases} x^2-1=4\sqrt{x^2-5y+4}+5y; \\ 3y-4x=16; \end{cases}$

91. $\begin{cases} 2x^2+3xy-3=2\sqrt{2x^2+3xy-4}; \\ xy+2y^2=3; \end{cases}$

92. $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2=8; \\ 3x^2-2xy+y^2=24; \end{cases}$ **93.** $\begin{cases} 4x^2-11xy+5y^2=32; \\ 7x^2+3xy-3y^2=16; \end{cases}$

94. $\begin{cases} 5x^2+7xy+2y^2=-144; \\ 3x^2-4xy-4y^2=0; \end{cases}$ **95.** $\begin{cases} x^2+3xy-2y^2=325; \\ 4x^2-6xy+3y^2=300; \end{cases}$

96. $\begin{cases} 9x^2+5xy-9y^2=76; \\ 8x^2-15xy+7y^2=12; \end{cases}$ **97.** $\begin{cases} 2x^2+6xy+y^2=15; \\ 3x^2+4xy+4y^2=30; \end{cases}$

98. $\begin{cases} x^3y+xy^3=795; \\ x^2y^2=144; \end{cases}$ **99.** $\begin{cases} x+y=1; \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=247; \end{cases}$

100. $\begin{cases} x+y=a; \\ xy(x^2+y^2)=b; \end{cases}$

101. $\begin{cases} (2x-3y)(4x-y)=2(4-xy); \\ 3x+5-\dfrac{8}{3x-5}=3y\dfrac{4x-y}{3x-5}; \end{cases}$

102. $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=a; \\ m(x+y)+n(x^2+y^2)=b; \end{cases}$

103. $\begin{cases} 6x^2+y^2=72+3(6y-5x); \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{6}{x}-5\right); \end{cases}$

104. $\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)+\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)=\sqrt{xy}+20; \\ \sqrt{x}-1=\sqrt{y}; \end{cases}$

105. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x+2y}{4y}}+\sqrt{\dfrac{4y}{3x+2y}}=2; \\ 1-\dfrac{4}{y}-\dfrac{5}{x}=\dfrac{4}{xy}; \end{cases}$

106. $\begin{cases} x+y+3\sqrt{x+y}=18; \\ x^3+y^3=4401; \end{cases}$

107. $\begin{cases} x^4+y^4=b; \\ x+y=a; \end{cases}$ **108.** $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=2x-26\frac{1}{2}; \\ 2y(y+2)=97\frac{3}{4}+xy; \end{cases}$

109. $\begin{cases} x-y-5\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{84}{x+y}; \\ x^2+xy=360; \end{cases}$ **110.** $\begin{cases} \frac{3}{4}\sqrt{x-y}-\dfrac{5}{\sqrt{x-y}}=\frac{7}{4}; \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=9; \end{cases}$

111. $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y+1{,}5}=6; \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=16\frac{1}{2}; \end{cases}$ [$x=7;\ 9\frac{1}{2};\ y=\frac{1}{2};\ -2$]

112. $\begin{cases} (x^2-3x+5)(y-4)=27; \\ x^2-3(x+y)+17=0; \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x=4;\ -1;\ \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-47}) \\ y=7;\ 7;\ 1;\ 1 \end{bmatrix}$

113. $\begin{cases} 4x^2-7(y+5)=\frac{1}{2}; \\ 7(x-8)=4y(2x-y)+\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x=2\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4};\ \frac{1}{8}(7\pm\sqrt{1261}) \\ y=-1\frac{1}{2};\ -4\frac{3}{4};\ \frac{1}{8}(53\pm\sqrt{1261}) \end{bmatrix}$

114. $\begin{cases} x^2+y^2-xy=2\frac{1}{3}; \\ 13(x+y)-xy=36\frac{4}{9}; \end{cases}$ **115.** $\begin{cases} x+y+xy=34; \\ x^2+y^2-(x+y)=42 \end{cases}$

116. $\begin{cases} x^2+y^2=8\frac{8}{9}; \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}+1}=\sqrt{\dfrac{10}{y}-\dfrac{3}{\sqrt{y}}\sqrt{1+\dfrac{x}{y}}}; \end{cases}$

117. $\begin{cases} xy-x^2=3y^2+45(x-y); \\ xy=2(162-y^2); \end{cases}$

118. $\begin{cases} x^2-3y^2+6x=64\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{9}x^2=y^2+x-5y+4; \end{cases}$ **119.** $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=160; \\ (x+y)(x^2+y^2)=580; \end{cases}$

120. $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-1\frac{3}{4}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=\frac{25}{36}; \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=10; \end{cases}$

121. $\begin{cases} x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2+3}=3; \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=\sqrt{4+2\sqrt{(x+1)(y+1)}}; \end{cases}$

122α. $\begin{cases} (2x-y^2)^2+(3x+y)^2=125; \\ (2x-y^2)(3x+y)=50; \end{cases}$

122β. $\begin{cases} x^4-y^4=15; \\ \dfrac{5\sqrt{x^2+y^2+4}}{3}+\dfrac{3}{5\sqrt{x^2+y^2+4}}=5\frac{1}{5}. \end{cases}$

---

123. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+xy=35; \\ 2x+y-z=3; \\ 5x+4y-3z=10; \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x=2;\ -\frac{5}{4};\ y=3;\ -\frac{1}{4}; \\ z=4;\ -5\frac{3}{4} \end{bmatrix}$

124. $\begin{cases} x^2 + x(y+z) = 2a^2; \\ (a+b)x - 2ay + 2bz = ab - b^2; \\ (a-b)x + 2by - 2az = ab + b^2; \end{cases}$ [$x = a$; $y = \frac{1}{2}(a+b)$; $z = \frac{1}{2}(a-b)$; noch 1 System]

125. $\begin{cases} (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 77; \\ 3x + 4y - 5z = -3; \\ 4x + 5y - 6z = -2\frac{1}{2}; \end{cases}$ [$x = 1{,}5$; $5{,}9$; $y = 2{,}5$; $-6{,}3$; $z = 3{,}5$; $-0{,}9$]

126. $\begin{cases} (x+y)^2 - (y+z)^2 + (z-x)^2 + 2a(y-z) = 2ab; \\ (a+b)x - (a-b)y - 4bz = 0; \\ (a-b)x - (a+b)y = 0; \end{cases}$

127. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 486; \\ x : y : z = 2 : 3 : 5; \\ 7x + 5y = 8u - 9; \end{cases}$

128. $\begin{cases} y^2 + 2z^2 - 3yz = 14; \\ xy = 132; \\ xz = 143; \end{cases}$ **129.** $\begin{cases} x^2 + xz + z = 19; \\ y^2 + yz + x = 5; \\ x + y + z = 5; \end{cases}$

130. $\frac{x^2 + y^2}{xyz} = \frac{25}{24}$; $\frac{x^2 + z^2}{xyz} = \frac{5}{6}$; $\frac{y^2 + z^2}{xyz} = \frac{13}{24}$;

131. $\begin{cases} x - y + z = 4; \\ x^2 + z^2 = 5y^2 + 5y + 3; \\ xz = 4 - 8y; \end{cases}$ **132.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 83; \\ y^2 + xz - 2z^2 = 28; \\ 5z - 2x = 1; \end{cases}$

133. $\begin{cases} x^2 + 2xy = 3y^2; \\ z^2 + yz = y^2; \\ x + y + z = 1; \end{cases}$ **134.** $\begin{cases} x^2 - xy = 2y^2; \\ z^2 + yz = 2y^2; \\ x + y + z = 1; \end{cases}$

135α. $\begin{cases} x^2 + xy = y^2; \\ z^2 + yz = \frac{1}{2}y^2; \\ x + y + z = 1; \end{cases}$ **135β.** $\begin{cases} x + y + z = 39; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 741; \\ x^2 = yz; \end{cases}$

136. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xz = b^2 + ab; \\ xy + xz = a^2; \\ x + y + xz = a + b + a^2 - ab; \end{cases}$

137. $\begin{cases} y^2 = xz; \\ x + y + z = a; \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \end{cases}$ **138.** $\begin{cases} y^2 = xz; \\ x + y + z = a; \\ x^2 - y^2 + z^2 = b^2; \end{cases}$

139. $\begin{cases} yz + xy = 90; \\ x : y = y : z; \\ x + y + z = 21; \end{cases}$ **140.** $\begin{cases} 4x - z = 2y; \\ x^2 + yz - z^2 = 10; \\ y^2 + z^2 = 61; \end{cases}$

141. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a; \\ y^2 = 2xz + b; \\ cx = dz; \end{cases}$ **142.** $\begin{cases} x(y+z) = a; \\ y(x+z) = b; \\ z(x+y) = c; \end{cases}$

143. $\frac{xyz}{x+y} = a$; $\frac{xyz}{y+z} = b$; $\frac{xyz}{x+z} = c$;

144. $\begin{cases} 4x^2 + 4xy + y^2 = 16; \\ 3x + yz = -7; \\ 4y - 3xz = 17; \end{cases}$ **145.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 2yz = -13; \\ xy - 2yz = 14; \\ y^2 + 4z^2 - 2xy = 116; \end{cases}$

146. $\begin{cases} 2z^2 + x - y - 3z = 29; \\ x^2 - xy + 3z = -1; \\ 2z^2 + xy - y^2 = 22; \end{cases}$

147. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xz = 1; \\ yz + 2xy = -1; \\ x + y - z = 2; \end{cases}$

148. $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - z^2 - 6z = 9; \\ x^2 - 2xy - xz = 0; \\ y^2 - xy + 2yz = 0; \end{cases}$

149. $\begin{cases} xy(x+z) = 24; \\ xy(y+z) = 12; \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$

150. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xz = 6; \\ x^2 - 2y^2 - z^2 = -2; \\ xz^3 = 7; \end{cases}$

151. $\begin{cases} xy - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}y) = 1; \\ \frac{2}{3}z - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}y - x) = 2; \\ \frac{5}{6}z - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x - y) = 3; \end{cases}$

152. $\begin{cases} xy + 3x + 2y = 18; \\ yz + 3y - 4z = 13; \\ zx + 5z - 2x = -32; \end{cases}$

153. $\begin{cases} xy - bx + y = a + b; \\ yz - ay - bz = -ab - b; \\ zx - az + x = b - 1; \end{cases}$

---

154. $\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 + u^2 = 6; \\ x + y + z + u = 56; \\ x + 2y + 3z - 2u = 51; \\ 3x - y - 2z + u = 9; \end{cases}$

155. $\begin{cases} x + y + z = 13; \\ x^2 + y^2 + u = 40; \\ xy + z = 12; \\ z^2 + u + z = 20; \end{cases}$

156. $\begin{cases} x + y + z - u = 4; \\ x^2 + y^2 - (z-u)^2 = 76; \\ xy = -42; \\ z^2 + yz + xu - u^2 = 26; \end{cases}$

157. $\begin{cases} x + y = 1; \\ 2xy + z^2 = -128; \\ x^2 + y^2 + u^2 = 170; \\ uz + 3(u - z) = 23; \end{cases}$

---

158. $\begin{cases} xy + uz = -47; \\ x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = 99; \\ x + y + u + z = 1; \\ x - y + uz = 0; \end{cases}$

159. $\begin{cases} xy - 3x - 2y = -3; \\ yz + 2y - 7z = 2; \\ zu + z - 3u = 1; \\ ux - 4u + x = 6. \end{cases}$

160. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x - y) = 38; \\ xy + 3(x - y) = 25; \end{cases}$

161. $\begin{cases} x + \sqrt{x - y} = 6 + y; \\ x^3 - y^3 = 208; \end{cases}$

162. $\begin{cases} x + xy^2 + xy^4 = 182; \\ xy + xy^3 = 60; \end{cases}$

163. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 3(x - y); \\ 2x^2 + xy - y^2 = 9(x - y); \end{cases}$

164. $\begin{cases} xy^2 + y = 6; \\ x^2y^4 + y^2 = 20; \end{cases}$

165. $\begin{cases} x + y = 5; \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 455; \end{cases}$

166. $\begin{cases} \sqrt{\frac{6y}{x-y}} - 3\sqrt{\frac{x-y}{6y}} = 2; \\ x + y - 2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{8}{x-y}; \end{cases}$

167. $\begin{cases} x^4 - y^4 = 175(x - y); \\ x + y = 7; \end{cases}$

168. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{5}{2}; \\ x^3 + y^3 = 152; \end{cases}$

169. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy(x + y) = 43; \\ x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 = -4; \end{cases}$

170. $\begin{cases} x + y = 30; \\ \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{y-9} = 4; \end{cases}$

171. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20; \\ \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} = \frac{27}{7} \cdot \frac{x-y}{x+y}; \end{cases}$

172. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy} = \frac{2}{3}; \\ \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2y^2} = \frac{4}{13}; \end{cases}$ **173.** $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 5; \\ (x-y)(x^2+y^2) = \frac{5}{2}; \end{cases}$

174. $\begin{cases} (2x+y)^2+4(2x+y) = 96; \\ y^2+3x+y = 33-3xy; \end{cases}$ **175.** $\begin{cases} x^2+xy+4y^2 = 114; \\ 12x^2-2xy-y^2 = 3; \end{cases}$

Aufl.: **11.** $x = a+2b;\ 6a-b;\ y = 2a-b;\ -3a+2b.$ **12.** $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{a+b}};\ y = \pm\dfrac{b}{\sqrt{a+b}}.$ **13.** $x = 8;\ 3\frac{3}{4};\ y = 5;\ 9\frac{1}{4}.$ **14.** $x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a+b} \pm \sqrt{9a+b});\ y = \frac{1}{4}(\mp 3\sqrt{a+b} \mp \sqrt{9a+b}).$ **16.** $x = \frac{1}{8};\ y = \frac{5}{8};\ \frac{3}{8}.$ **17.** $x = \pm(3a-4b);\ y = \pm(-a+2b).$ **18.** $x = \pm\frac{1}{3};\ y = \pm^2;\ \mp^2.$ **19.** $x = 4;\ -2\frac{1}{2};\ y = 5;\ -4\frac{3}{4}.$ **20.** $x = 9;\ 49;\ y = 5;\ 45.$ **21.** $x = \pm(a+1);\ y = \pm(a-1).$ **22.** $x = \pm\dfrac{1}{a+b},\ y = \pm(a-b).$ **24.** $x = 11;\ 15\frac{4}{5};\ 5\frac{2}{5};\ 10\frac{1}{5};\ y = 7;\ 10\frac{3}{5};\ 3\frac{4}{5};\ 7\frac{2}{5}.$ **25.** $x = \pm\frac{3}{7};\ y = \pm\frac{4}{5};\ \mp\frac{4}{5}.$ **26.** $x = 3+\sqrt{3};\ 1-\sqrt{3};\ y = -2+\sqrt{3};\ -4-\sqrt{3}.$ **27.** $x = 5;\ 5;\ -7;\ -7;\ y = 7;\ -5;\ 7;\ -5.$ **28.** $x = 0;\ a(a+2b);\ y = 0;\ b(a+2b).$ **29.** $x = \pm 12;\ y = \pm 3.$ **30.** $x = 12;\ y = 9$ u. vergl. § 95 $x^3-1 = 0.$ **34.** $x = a\pm b;\ y = a\mp b.$ **36.** $x = a-\frac{1}{2}b;\ \frac{1}{2}a-b = y.$ **37.** $x = \frac{2}{3};\ \frac{3}{8} = y.$ **39.** $x = \frac{3}{4};\ \frac{3}{5} = y.$ **40.** $x = \frac{3}{5};\ \frac{3}{4} = y.$ **41.** $x = 36;\ 64 = y.$ **42.** $x = \dfrac{a}{a+b},\ \dfrac{b}{a-b} = y.$ **43.** $x = -1;\ 2;\ y = 6;\ 3.$ **45.** $x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a+2b} \pm \sqrt{a-2b});\ y = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a+2b} \mp \sqrt{a-2b};\ x = \pm(3;\ 2) = y;\ x = -3;\ -3;\ y = 4;\ 4.$ **46.** $x = 7;\ 7;\ y = 5;\ 5.$ **47.** $x = \pm 3;\ \pm 2\frac{2}{11};\ y = \pm 2\frac{1}{2};\ \mp\frac{17}{22}.$ **48.** $x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-3b});\ y = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a+b} \mp \sqrt{a-3b}).$ **49.** $x = \pm\dfrac{a+b}{a};\ \pm 1 = y.$ **50.** $x = \pm\dfrac{b-a}{a};\ \pm 1 = y.$ **51.** $x = \pm\dfrac{1}{b};\ \pm\dfrac{1}{a} = y.$ **52.** $x = \pm 5;\ y = \pm 3;\ \mp 3.$ **53.** $x = \pm(a+b);\ y = \pm(a-b).$ **54.** $x = a+b;\ -\dfrac{(a+b)(a^2-2ab+3b^2)}{2(a^2+b^2)};\ y = a-b;\ -\dfrac{(a-b)(a^2-2ab+3b^2)}{2(a^2+b^2)}.$ **55.** $x = 6;\ -7;\ y = \pm 5;\ \pm\sqrt{38}.$ **56.** $x = -(a+b) = y.$ **57.** $x = \pm 7;\ \pm 20;\ y = \pm 2;\ \mp 11.$ **58.** $x = \dfrac{a}{2}(b-2a);\ \dfrac{a}{2}(b+2a);\ y = \pm\dfrac{a}{2}\sqrt{b(b-4a)};\ \pm\dfrac{a}{2}\sqrt{b(b+4a)}.$ **59.** $x = (a+2b);\ -(a+2b);\ y = a-b;\ -2a-b;\ 2a+b;\ -a+b.$ **60.** $x = \pm(2a+b);\ \pm(2\frac{1}{2}a-b);\ y = \pm(a-b);\ \pm(\frac{1}{2}a+b).$ **61.** $x = a\pm\sqrt{-4b^2+a^2} = y;\ x = -a\pm\sqrt{-4b^2+a^2} = y;\ x = 36;\ 16 = y.$ **62.** $x = a;\ \dfrac{-a+b-2}{2};\ y = \dfrac{a-b}{2};\ -(a+1).$ **63.** $x = 2;\ -2\frac{5}{8};\ y = 7;\ 2\frac{3}{8}.$ **65.** $x = 0;\ 0;\ = y;\ x = \dfrac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3a^2-2ab+b^2} = y.$ **66.** $x = a(a+b);\ b(a+b) = y$ u. noch 2 Wertepaare. **67.** $x = \dfrac{1}{a+2b},\ \dfrac{-a^2-4b^2}{(a+2b)(3a^2+4b^2)};\ y = \dfrac{1}{a-2b};\ \dfrac{-a^2-4b^2}{(a-2b)(3a^2+4b^2)}.$ **68.** $x = 0;\ -\dfrac{b(a+b)}{a+2b};\ y = 0;\ -\dfrac{(a+b^2)}{a+2b}.$ **69.** $x = 0;\ \frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-\frac{1}{3}});\ y = 0;$

$\pm a\sqrt{-\frac{1}{3}}$. **70.** $x = \pm\frac{7}{2}$; $y = \pm\frac{5}{2}$. **71.** $x = 6\frac{1}{2}$; $y = 4\frac{1}{2}$. **72.** $x = 6\frac{1}{2}$; $-5\frac{1}{6}$; $y = 4\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{6}$. **73.** $x = 3a - 2b$; $\frac{b-9a}{4}$; $y = 2a + 3b$; $\frac{a-9b}{4}$. **74.** $x = 0$; $0 = y$; $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-3}) = y$. **75.** $x = 0$; $0 = y$; $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$; $y = x+1$. **76.** $x = 0$; $0 = y$; $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$; $y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. **77.** $x = 2 \pm \sqrt{2} = y$; $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13}) = y$. **78.** $x = \sqrt{2} \pm 1 = y$; $x = \frac{1}{4}\sqrt{10}(\sqrt{5} \pm 1) = y$. **79.** $x = [-bf \pm \sqrt{4ce(ae-bd)+b^2f^2}] : 2(ae-bd) = y$. **81.** $x = 0$; $a+b$; $\frac{1}{2}(a-b \pm \sqrt{a^2+2ab-3b^2})$; $y = 0$; $a+b$; $\frac{1}{2}(a-b \mp \sqrt{a^2+2ab-3b^2})$. **82.** $x = 10$; $-5\frac{1}{11}$; $\frac{1}{11}(-17 \pm 2\sqrt{1703})$; $y = 3$; $-4\frac{6}{11}$; $\frac{1}{11}(-30 \pm \sqrt{1703})$. **83.** $x = 0$; 0; 7; 7; $y = 3 \pm \sqrt{-31}$; 5; 1. **84.** $x = a \pm 1$; $y = a-1$; noch 2 Werthe. **85.** $x = 8$; $7 = y$; $x = 1$; $\frac{1}{2} = y$. **86.** $x = 1\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{4}$; $y = 2\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$. **87.** $x = 1$; $216 = y$. **88.** $u = 1+\sqrt{2}$; $u = 1-\sqrt{2}$; $v = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **89.** $x = 5$; -4; $y = 3$; -3. **90.** $x = 11$; $-4\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}(10 \pm \sqrt{313})$; $y = 20$; $-\frac{4}{9}$; $\frac{4}{3}(22 \pm \sqrt{313})$. **91.** $x = \pm 1$; ± 5; $y = \pm 1$; ∓ 3. **92.** $x = \pm 2$; $\pm 2\sqrt{2}$; $y = \mp 2$; ± 0. **93.** $x = \pm 4$; $\pm\frac{44}{\sqrt{138}}$; $y = \pm 8$; $\mp\frac{20}{\sqrt{138}}$. **94.** $x = \pm 12$; $\pm 4\sqrt{-1}$; $y = \mp 18$; $\pm 2\sqrt{-1}$. **95.** $x = \pm 15$; $\pm\frac{105}{\sqrt{67}}$; $y = \pm 20$; $\pm\frac{50}{\sqrt{67}}$. **96.** $x = \pm 8$; $\pm\frac{16}{\sqrt{29}}$; $y = \pm 10$; $\pm\frac{10}{\sqrt{29}}$. **97.** $x = \pm(2-\sqrt{2})$; $\pm(2+\sqrt{2})$; $y = \pm(1+\sqrt{2})$; $\pm(1-\sqrt{2})$. **98.** $x = \pm\frac{3}{2}$; ± 8; $y = \pm 8$; $\pm\frac{3}{2}$. **99.** $x = 3$; $-2 = y$; $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-\frac{79}{3}}) = y$. **100.** $x = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt[4]{a^4-8b}) = y$; $x = \frac{1}{2}(a \pm i\sqrt[4]{a^4-8b}) = y$. **101.** $x = \pm 5$; ± 5; $y = \pm 4$; ± 16. **103.** $x = -3$; $1\frac{17}{31}$; $y = 21$; $-1\frac{23}{31}$. **104.** $x = 36$; 9; $y = 25$; 16. **105.** $x = 8$; $-\frac{1}{3}$; $y = 12$; $-\frac{1}{2}$. **106.** $x = 17$; -8; $18 \pm \sqrt{55}$; $y = -8$; 17; $18 \mp \sqrt{55}$. **108.** $x = 9\frac{1}{2}$; $-26\frac{1}{22}$; $y = 8\frac{1}{2}$; $-17\frac{17}{22}$. **109.** $x = \pm 15$; $\pm\frac{360}{\sqrt{671}}$; $y = \pm 9$; $\pm\frac{311}{\sqrt{671}}$. **110.** $x = 20\frac{1}{2}$; $58\frac{5}{18}$; $y = 4\frac{1}{2}$; $55\frac{1}{2}$. **114.** $x = 1\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3} = y$; $x = 18 \pm \sqrt{-107\frac{2}{9}} = y$. **115.** $x = 6$; $4 = y$; $x = \frac{1}{2}(-11 \pm \sqrt{-59}) = y$. **116.** $x = 2\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3} = y$; $x = 12\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{-5465}) = y$. **117.** $x = 3$; -18; -18; -42; $y = 12$; -9; 18; -6. **118.** $x = 7\frac{1}{2}$; $-13\frac{1}{2}$; $-10\frac{1}{2} \pm 3\sqrt{31}$; $y = \pm 3\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2} \mp \sqrt{31}$. **119.** $x = 3$; $7 = y$. **120.** $x = 15$; $19\frac{1}{5}$; $10(2 \pm \sqrt{-\frac{20}{7}})$; $y = 20$; $14\frac{2}{5}$; $\frac{40}{3}(1 + \sqrt{-\frac{20}{7}})$. **121.** $x = 1 \pm \sqrt{2} = y$; $x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2} = y$. **122 α.** $x = 3$; $\frac{35}{9}$; $y = 1$; $-\frac{5}{3}$; noch 6 Werthe. **122 β.** $x = \pm 2$; $y = \pm 1$; ∓ 1; noch 4 Werthe. **126.** $x = a+b$; $-\frac{1}{2}(a+b)$; $y = a-b$; $-\frac{1}{2}(a-b)$; $z = a$; $-\frac{1}{2}a$. **127.** $x = 6$; $y = 9$; $z = 15$; $u = 12$; nach 1 System. **128.** $x = \pm 11$; $y = \pm 12$; $z = \pm 13$. **129.** $x = 5$; $y = 1$; $z = -1$. **130.** $x = 4$; $y = 3$, $z = 2$. **131.** $x = 12$; -3; $y = 5$; 5; $z = -3$; 12; noch 2 Systeme. **132.** $x = 7$; $y = \pm 5$; $z = 3$; noch 1 solches System. **133.** $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$; $\frac{3}{10}(5 \pm \sqrt{5})$; $y = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$; $-\frac{1}{10}(5 \pm \sqrt{5})$; $z = -2 \mp \sqrt{5}$; $\mp\frac{1}{5}\sqrt{5}$. **134.** $x = \frac{1}{2}$; 2; -1; $\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{4}$; 1; 1; $-\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{4}$; -2; 1; 1. **135 α.** $x = \frac{1}{2}(5+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{15})$; $y = \sqrt{5}-\sqrt{3}$; $z = \frac{1}{2}(-3+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{15})$; noch 3 Systeme. **135 β.** $x = 4$; $y = 25$;

$4 = z$. **136.** $x = a$; $b = y$; $z = a - b$; $\frac{a}{b}(a - b)$; noch 2 Systeme.
137. $y = \frac{1}{2a}(a^2 - b^2)$; $x = \frac{1}{4a}(a^2 + b^2 \pm \sqrt{-3a^4 + 10a^2b^2 - 3b^4}) = z$.
139. $x = 3$; $12 = z$; $y = 6$ und $x = 3 \pm 6\sqrt{-6} = z$; $y = 15$.
140. $x = \pm 4$; $y = \pm 5$; $z = \pm 6$; noch 2 Systeme. **144.** $x = -3$; $y = 2$; $z = 1$; noch 3 Systeme. **145.** $x = 3$; $4\frac{1}{2}$; $y = -2$; $-3\frac{1}{2}$; $z = 5$; $4\frac{1}{4}$; noch 6 Systeme. **146.** $x = 4$; $-7\frac{1}{4}$; $y = 2$; $-9\frac{1}{4}$; $z = -3$; $4\frac{1}{2}$; noch 2 Systeme. **147.** $x = 0$; $1\frac{1}{2}$; $y = 1$; $-\frac{1}{2}$; $z = -1$; noch 2 Systeme. **148.** $x = 1$; 3; $y = 1$; $z = -1$; 1 noch 3 solche Systeme. **149.** $x = 4$; -3; $y = 3$; -4; $z = -2$; 5; noch 2 Systeme. **150.** $x = 7$; -7; $y = \pm 5$; ± 5; $z = 1$; -1; noch 1 solches System. **151.** $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$; noch 1 System. **152.** $x = 2$; $2\frac{1}{2}$; $y = 3$; $2\frac{1}{3}$; $z = -4$; $-3\frac{3}{5}$.
153. $x = a - 1$; $\frac{a(a+1)}{b}$; $y = b + 1$; $\frac{b(a^2 + 2a + b)}{a^2 + a + b}$; $z = a - b$; $-\frac{a+b}{a}$.
154. $x = 12$; $y = 13$; $z = 15$; $u = 16$; noch 1 System. **155.** $x = 7$; $1 = y$; $z = 5$; $u = -10$. **156.** $x = 7$; $-6 = y$; $z = 8$; $2\frac{3}{7}$; $u = 5$; $-\frac{4}{7}$. **157.** $x = 9$; $-8 = y$; $z = 4$; $u = 5$; noch 3 solche Systeme. **158.** $x = 7$; $y = -5$; $z = 3$; $-4 = u$; $x = -5$; $y = 7$; $z = 3$; $-4 = u$; noch ein solches System. **159.** $x = 5$; $\frac{15}{4}$; $y = 4$; $\frac{33}{7}$; $z = 2$; $\frac{13}{4}$; $u = 1$; -9. **160.** $x = 7$; -1; $1 \pm \sqrt{20}$; $y = 1$; -7; $-1 \pm \sqrt{20}$. **161.** $x = 6$; -2; $\frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{219\frac{22}{27}})$; $y = 2$; -6; $\frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{219\frac{22}{27}})$. **162.** $x = 2$; 162; $y = 3$; $\frac{1}{3}$; noch 2 Systeme. **163.** $x = 0$; 0; 2; $3\frac{1}{3}$; $y = 0$; 0; 1; $\frac{2}{3}$. **164.** $x = 1$; $\frac{1}{8}$; $y = 2$; 4. **165.** $x = 3$; $2 = y$; $x = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{-34\frac{1}{3}} = y$. **166.** $x = \pm 5$; $\pm \frac{5}{2}$; $\pm \frac{7}{3}\sqrt{3}$; $\pm \frac{7}{6}\sqrt{3}$; $y = \pm 3$; $\pm \frac{3}{2}$; $\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $\pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$. **167.** $x = y = 3\frac{1}{2}$; $x = 3$; $4 = y$. **168.** $x = 5$; $5\sqrt[3]{\frac{76}{49}}$; $y = 3$; $-3\sqrt[3]{\frac{76}{49}}$. **169.** $x = 2$; $3 = y$. **170.** $x = 20$; -6; $y = 10$; 36. **171.** $x = 2$; $4 = y$; $x = -2$; $-4 = y$. **172.** $x = 2$; $4 = y$; $x = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} = y$. **173.** $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$. **174.** $x = -6\frac{1}{2}$; 3; $-4\frac{1}{2}$; 11; $y = 21$; 2; -3; -34. **175.** $x = \pm 2$; $\pm 3\sqrt{\frac{3}{17}}$; $y = \pm 5$; $\pm 13\sqrt{\frac{3}{17}}$.

103.

Textgleichungen vom zweiten Grade mit mehreren Unbekannten.

1. Aus dem Produkte p zweier Zahlen und ihrem Quotienten q soll man die Zahlen suchen.

2. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist a, die Differenz dieser Quadrate ist b; wie heißen die Zahlen?

3. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist a^2, die Zahlen selbst verhalten sich wie $b : c$; wie heißen sie?

4. Man soll zwei Zahlen suchen, so daß das Produkt aus ihrer Summe mal ihrer Differenz $= 27$, und die Summe 3 mal größer ist als die Differenz.

5. Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz, Summe und Produkt sich wie $2 : 3$ verhalten.

6. Es soll eine Zahl gefunden werden, deren Summe m mal, deren Produkt n mal so groß ist, als ihre Differenz.

7. Es sollen drei Zahlen gefunden werden, welche die Eigen-

schaft haben, daß das Produkt der 1. u. 2. = a, das Produkt der 1. und 3. = b, und die Summe der Quadrate der 2. und 3. = c ist.

8. Drei Zahlen geben, wenn man sie paarweise multipliziert und jedes Produkt durch die dritte dividiert, die Zahlen a, b, c. Wie heißen die Zahlen?

9. Drei Zahlen geben zu je zweien mit einander multipliziert a, b, c; wie heißen die Zahlen?

10. Fünf Zahlen geben, wenn man jede mit der folgenden, die letzte aber wieder mit der ersten multipliziert, der Reihe nach a, b, c, d, e; wie heißen die Zahlen?

11. Zwei Zahlen, deren Produkt 108 ist, haben die Eigenschaft, daß dies Produkt ungeändert bleibt, wenn man die eine Zahl um 3 vermehrt und die andere um 3 vermindert. Wie heißen die Zahlen? [9; 12 oder —12; —9]

12. Ein Bild, dessen Länge zur Breite sich ohne Rand wie 6 : 5 verhält, will ich so abzeichnen, daß die Fläche desselben mit einem überall 10 *cm* breiten Rand 1 *qm* betrage; wie groß muß ich Länge und Breite nehmen?

13. Ein Bild hat ohne Rand eine Fläche von 735 *qcm* und ein Seitenverhältnis von 3 : 5; mit einem überall gleich breiten Rand aber eine Fläche von 1395 *qcm*. Wie groß ist Länge und Breite des Bildes und Randes? [35; 21 *cm*; 5 *cm*]

14. Bei einem rechteckigen Bilde verhält sich Länge zu Breite wie 5 : 4; rechnet man aber den überall gleich breiten Rand weißen Papieres, dessen Fläche 810 *qcm* beträgt, dazu, so ist das Verhältnis 6 : 5; wie lang und breit ist Bild und Rand? [45; 36; 4,5 *cm*]

15. Eine Gesellschaft mußte jährlich 720 *M* aufbringen; als aber die Mitgliederzahl um 3 abnahm, der Bedarf aber um 15 *M* stieg, mußte der Beitrag um 5 *M* erhöht werden. Wieviel Mitglieder zählte die Gesellschaft und welches war der Beitrag? [24 à 30]

16. Eine gewisse Anzahl Arbeiter schafft einen Haufen Steine in 8 Stunden fort; sie würden auch 8 Stunden brauchen, wenn 5 Arbeiter weniger da wären und dafür jeder bei jedem Gange um 6 *U* mehr Steine tragen würde. Wären es aber um 7 Arbeiter weniger, so würden sie um 20 Minuten länger brauchen, obwohl jeder bei jedem Gange um 8 *U* mehr trägt. Wieviel Arbeiter sind vorhanden und wieviel trägt jeder bei jedem Gange? [25 A. 24 *U*]

17. Zwei solche Zahlen zu finden, daß die Summe ihrer reziproken Werte = a, die Summe ihrer Qudratwurzeln = b ist.

18. Um ein Feld zu besäen, braucht man $132\frac{1}{2}$ *l*, um aber ein um 7 a größeres Feld zu besäen mit einem Samen, bei welchem man für jede Ar um $\frac{1}{6}$ *l* mehr braucht, braucht man 160 *l*; wie groß ist das Feld und wieviel Liter Samen treffen auf jede Ar?

19. Ein Rechteck hat 22 *m* Umfang; verlängert man jede

Seite um 4 m, so wird sein Inhalt dadurch 3 mal größer; wie lang und breit ist es? [6; 5 m]

20. Zwei Zahlen gibt es, deren Summe, Produkt und Differenz der Quadrate einander gleich sind. Wie heißen die Zahlen?

21. Zu zwei Punkten A und B, deren Entfernung = a (12), soll man auf der Geraden AB noch zwei Punkte C und D, deren Entfernung = b (= 12, = 7, = 15) so finden, daß C die Strecke AB innerlich ebenso teilt, wie D diese Strecke äußerlich teilt. Man zeige, daß es stets solche Punkte gibt, welchen Wert auch b haben mag.

21 α. Zwischen den Punkten A und B, deren Abstand = a, soll man zwei Punkte C und D so bestimmen, daß in der Punktfolge ACDB sowohl die Strecke AD durch C, als auch CB durch D nach dem goldenen Schnitt geteilt wird; und zwar soll 1) einerseits AC, andrerseits BD das größere Stück der Teilung sein, 2) soll CD das kleinere Stück des AD und das größere des CB sein, 3) soll beidesmal CD das größere Stück jeder Teilung sein.

22. Auf die Strecke AB = a soll man die kleinere Strecke CD = b so zwischen A und B legen, daß in der Punktfolge ACDB der Punkt C die Strecke AD ebenso innerlich teilt, wie B die Strecke AD äußerlich teilt.

23. Ein Bruch wird seinem Wert nach um die Zahl $\frac{1}{6}$ kleiner, wenn man Zähler und Nenner um 1 vergrößert, und wird um $\frac{1}{2}$ größer, wenn man Zähler und Nenner um 1 verkleinert. [$\frac{3}{2}$]

24. Ein Bruch wird um die Zahl $\frac{1}{3}$ kleiner, wenn man den Zähler um 3, den Nenner um 2 vergrößert, dagegen um $1\frac{2}{3}$ größer, wenn man den Zähler um 3, den Nenner um 2 verringert. [$\frac{7}{3}$]

25. Vermehrt man Zähler und Nenner eines Bruches um 1, so wird sein Wert um $\frac{1}{2}$ kleiner; vermehrt man aber um 2, so wird sein Wert um $\frac{3}{4}$ kleiner. [$\frac{5}{2}$]

26. Ein Bruch wird seinem Werte nach um $\frac{1}{3}$ kleiner, sowohl wenn man Zähler und Nenner um 1 vermehrt, als auch wenn man den Zähler um 3 und den Nenner um 1 vermindert. [$\frac{7}{3}$]

27. Vermindert man den Zähler eines Bruches um 1 und vermehrt man den Nenner um 1, so wird sein Wert gleich dem reziproken Wert des Bruches. Vermehrt man aber sowohl Zähler als Nenner des Bruches um 1, so wird sein Wert um $\frac{1}{6}$ kleiner. [$\frac{3}{2}$]

28. Ein Futtervorrat von 756 Ztr reicht für eine Kuh um 21 Tage länger als für einen Ochsen; für beide zusammen reicht er 36 Tage. Wieviel bekommt jedes täglich? [O. = 12 Ztr; K. = 9 Ztr]

29. Zwei Freunde, welche $30\frac{1}{3}$ km von einander entfernt sind, gehen einander entgegen und treffen sich nach $3\frac{1}{2}$ Std. Um die ganze Entfernung zurückzulegen hätte der eine 1 Std. 5 Min. länger gebraucht als der andere. Wieviel legt jeder in 1 Std. zurück?

30. Zwei Personen, deren Entfernung 9 km beträgt, gehen

einander entgegen. Da derjenige, welcher in jeder Minute 15 *m* mehr zurücklegt, 25 Min. später fortgeht, so treffen sie sich gerade in der Mitte. Wieviel legt jeder in der Minute zurück? [45; 60 *m*]

31. Eine Anzahl Militärpferde verbrauchte in 12 Tagen 12,6 *hl* Hafer; als im Manöver noch 8 Pferde dazu kamen, und die tägliche Ration um 1 *l* Hafer erhöht wurde, brauchte sie in 10 Tg. $17\frac{1}{2}$ *hl*. Wieviel Pferde waren es, und wie groß war die Ration? [42 Pf. à $2\frac{1}{2}$ *l*, oder 20 Pf. à $5\frac{1}{4}$ *l*]

32. Es sind zwei Zahlen a und b gegeben; man soll dieselben in zwei solche Teile zerlegen, daß der eine Teil von a zum einen Teil von b sich wie m : n verhalte und daß die beiden andern Teile das Produkt p geben.

33. Ein Körper legt in einer gewissen Zeit eine Strecke von 4500 *m* zurück; legt er aber in jeder Minute nur 6 *m* mehr zurück, so fehlen ihm schon nach einer um 10 Minuten kürzeren Zeit nur mehr 20 *m* an 4500 *m*. Wie lange bewegte er sich und mit welcher Geschwindigkeit? [90 Min. à 50 *m*]

34. Dividiert man 720 durch zwei Zahlen, so ist der eine Quotient um 10 größer als der andere; dividiert man sie aber durch zwei um je 7 größere Zahlen, so ist der eine Quotient nur um 3 größer als der andere. Wie heißen die Zahlen? [8; 9]

35. Um 1260 a zu besäen, braucht man bei Gerste $17\frac{1}{2}$ *l* mehr als bei Korn; sät man aber dünner, so daß 1 *l* jedesmal für 1 a mehr reicht, so braucht man bei Gerste 14 *l* mehr als bei Korn. Wieviel braucht man in jedem Falle für den Acker?

36. A und B gehen nach einem entfernten Orte, wobei A, der einen um 4 *km* längeren Umweg einschlägt, doch nur um 9 Minuten länger braucht, da er rascher geht. Nachhause gehen sie gemeinschaftlich den kürzeren Weg, wobei A seine Geschwindigkeit um $\frac{2}{3}$ *km* vermindern, B die seinige um $\frac{1}{3}$ *km* erhöhen muß, und kommen so in 3 Stunden nach Hause. Wie lang ist jeder Weg und mit welcher Geschwindigkeit wurde er zurückgekehrt?

37. Von zwei Wiesen gab die um 12 a größere doch um 3 Fuhren weniger Heu. Beim zweiten Schnitt brauchte man aber von der kleineren um je 4 a, bei der größeren um je 5 a mehr zu einem Wagen, und dabei ergab die größere Wiese um 2 Fuhren weniger als die kleinere; zusammen ergaben beide das zweitemal 26 Fuhren; wieviel gab jede Wiese beim ersten Schnitt? [21; 18 F.]

38. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der mittleren Glieder = a, die Summe der äußeren = b, die Summe der Quadrate aller Glieder gleich c. Es sei a = 9; b = 12; c = 145.

39. Wie stellt sich die Lösung von 38, wenn a und b je die Differenz der Glieder bedeutet?

40. In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder = a, die Summe aller Glieder = b, die Summe

ihrer Quadrate $= c$; wie heißen die Glieder? Es sei $a = 30$; $b = 24$; $c = 170$.

41. Das Produkt der äußeren Glieder einer geometrischen Proportion ist a, die Differenz zwischen der Summe der äußeren und der Summe der mittleren Glieder ist b, die Summe der Quadrate aller 4 Glieder ist c; wie heißt die Proportion? ($a = 18$, $b = 2$, $c = 130$; $a = 270$, $b = 20$, $c = 3922$).

42. In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder $= a$, die Summe aller Glieder $= s$, die Differenz zwischen der Quadratsumme der äußeren und der Quadratsumme der inneren Glieder $= c$; welche ist es?

43. Als einer einen um $\frac{1}{3}$ des Weges größeren Weg machen mußte, versuchte er es dadurch, daß er an der Zeit 1 Stunde zugab, doch fehlten ihm dann noch $4\frac{1}{2}$ *km*; dann versuchte er es dadurch, daß er die Geschwindigkeit um $\frac{1}{2}$ *km* pro Stunde erhöhte, doch fehlten ihm 6 *km*. Wie groß war ursprünglich der Weg? [27 *km*]

44. Es will einer auf der Eisenbahn zweiter Klasse nach Hause fahren; da aber hiezu sein Geld um 3 ℳ zu wenig ist, muß er entweder $\frac{3}{8}$ des Weges dritter Klasse fahren, da es dabei um 20 ₰ für jede Meile billiger ist, oder er muß das letzte Sechstel des Weges zu Fuß gehen. Wieviele Meilen hat er nach Hause und wie groß ist seine Barschaft? [40 Meilen; 15 ℳ]

45. Von zwei Strecken, 45 *cm* und 60 *cm*, will einer jede in eine gewisse Anzahl Teile teilen, so daß ein Teil der ersten Strecke eben so oft in der zweiten ganzen enthalten ist, als ein Teil der zweiten Strecke in der ersten ganzen enthalten ist. Der erste Versuch, bei welchem ein Teil der ersten Strecke um $\frac{1}{2}$ *cm* größer war als ein Teil der zweiten, mißlang; der zweite, bei welchem er die Anzahl der Teile bei der ersten Strecke um 1 kleiner, bei der zweiten um 1 größer macht als vorher, gelingt. Wieviel Teile machte er aus jeder Strecke? [Das 2. mal 9 u. 16 Teile]

46. Von zwei Strecken, von denen die eine um 20 *cm* länger ist als die andere, soll die längere in 9 Teile mehr geteilt werden als die kürzere, so daß ein Teil der kleineren in der ganzen größeren eben so oft enthalten ist, als ein Teil der größeren in der ganzen kleineren, und daß zudem ein Teil der kleineren Strecke $\frac{5}{4}$ von einem Teil der größeren Strecke ist. Wie groß ist die Strecke und in wieviel Teile ist sie geteilt? [Die kürzere $= 80$ *cm*, 16 Teile]

47. Welchen Gehalt hat ein Spiritus, wenn durch zweimaliges Zusetzen von je einer gewissen stets gleichgroßen Quantität 42prozentigen Spiritus der Gehalt auf $70\,^0/_0$ und $64\,^0/_0$ heruntergeht?

Aufl.: **18.** 53 *a*; $2\frac{1}{2}$ *l*. **29.** $4\frac{2}{3}$; 4 *km*. **35.** $157\frac{1}{2}$ *l* G.; 140 *l* G. **36.** Weg $= 13$ *km* (Umweg $= 17$ *km*). Im Hinweg ist Geschw. des A $= 5$ *km*, des B $= 4$ *km*. Oder 6 *km* (Umweg $= 10$ *km*) A $= 2\frac{2}{3}$, B $= 1\frac{2}{3}$ *km*.

5. Abschnitt. Exponential- und logarithmische Gleichungen.

104.

Diejenigen Gleichungen, welche die Unbekannte bloß als Dignand von Potenzen oder im Radikand von Wurzeln enthalten, heißen algebraische Gleichungen.

Solche Gleichungen, welche die Unbekannte noch auf andere Art enthalten, heißen transzendent.

Eine Gleichung heißt eine Exponentialgleichung, wenn sie die Unbekannte im Exponent einer Potenz oder als Wurzelexponent enthält. Die einfachste Form derselben ist

$$a^x = b.$$

Man löst sie auf, indem man beiderseits logarithmiert.

$$x \log a = \log b; \quad x = \frac{\log b}{\log a} = {}^{a}\log b.$$

Jede Exponentialgleichung, welche nicht die einfachste Form hat, muß zuerst auf sie gebracht werden. Dies geschieht im allgemeinen auf folgende Weise. Man sucht alle vorkommenden Exponentialgrößen durch eine einzige Exponentialgröße auszudrücken, betrachtet diese als die Unbekannte und bestimmt ihren Wert (ihre Werte) aus der erhaltenen Gleichung. Dadurch ist die Exponentialgleichung auf die einfachste Form zurückgeführt und wird durch Logarithmieren gelöst.

Beispiel: $5 \cdot 2^x = 4^x - 24$. Es ist $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$; setzt man also $2^x = y$, so ist:

$5y = y^2 - 24$; hieraus $y_1 = 8$, $y_2 = -3$. Dies eingesetzt $2^x = 8$; $x_1 = {}^{2}\log 8 = 3$; $2^x = -3$; $x \log 2 = \log -3$; x_2 ist imaginär.

Sind beide Gleichungsseiten logarithmierbar, so logarithmiert man sofort.

Beispiel: $\sqrt[x]{4^{x-1}} = \sqrt[x-1]{3^x}$; gibt logarithmiert

$$\frac{x-1}{x} \log 4 = \frac{x}{x-1} \log 3;$$

$$x^2 \log 4 - 2x \log 4 + \log 4 = x^2 \log 3;$$

$$x^2 - \frac{2 \log 4}{\log 4 - \log 3} \cdot x = -\frac{\log 4}{\log 4 - \log 3}$$

$$x = \frac{\log 4 \pm \sqrt{\log 4 \cdot \log 3}}{\log 4 - \log 3} = \frac{0{,}60206 \pm \sqrt{0{,}60206 \cdot 0{,}47712}}{0{,}60206 - 0{,}47712};$$

x = u. s. w.

Lassen sich die Exponentialgrößen wegen der Verschiedenartigkeit der Dignanden nicht auf nur eine Exponentialgröße zurückführen, sondern nur auf deren zwei, so vereinigt man je die gleich-

artigen auf einer Gleichungsseite, wodurch die Gleichung; wenn sie sonst kein Glied mehr enthält, lösbar wird.

Beispiel; $2^x + 3^{x-1} = 3^x - 2^{x-1}$; gibt

$$2^x + \tfrac{1}{2} 2^x = 3^x - \tfrac{1}{3} 3^x;$$
$$\tfrac{3}{2} 2^x = \tfrac{2}{3} 3^x; \quad \tfrac{9}{4} = (\tfrac{3}{2})^x; \quad x = 2.$$

Bei Exponentialgleichungen mit mehreren Unbekannten sucht man jede Gleichung in eine logarithmierbare Form zu bringen; durch Logarithmieren erhält man dann Gleichungen, welche die Unbekannte blos als Faktoren enthalten und wie algebraische gelöst werden. Um die Gleichung logarithmierbar zu machen, wendet man die auch sonst gebräuchlichen Mittel an: Vereinfachung einer Gleichung mittels der anderen, Einführung neuer Unbekannten, Zerspalten einer Gleichung u. s. w.

Beispiel: I. $2^x = 3^y$; $2^{x+2} = 3^{y-1} + 5^y$;
I. $x \log 2 = y \log 3$. In II ersetzt man 3^y aus I. durch 2^x, so hat man $4 \cdot 2^x = \frac{1}{3} \cdot 2^x + 5^y$ oder $3\frac{2}{3} \cdot 2^x = 5^y$.
II. $x \log 2 + \log 3\frac{2}{3} = y \log 5$. Hieraus

$$y = \frac{\log 11 - \log 3}{\log 5 - \log 3}; \quad x = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 11 - \log 3}{\log 5 - \log 3}.$$

Eine Gleichung heißt eine logarithmische, wenn sie die Unbekannte als Logarithmand enthält. Die einfachste Form derselben ist $\overset{10}{\log}\, x = a$. Ihre Lösung ist $x = 10^a$, oder $x =$ num log a; ist hiebei a eine reelle Zahl, so kann der Wert von x aus der Logarithmentafel gefunden werden.

Andere logarithmische Gleichungen sucht man auf diese einfachste Form zu bringen. Man sucht alle Logarithmengrößen durch eine auszudrücken, deren Wert dann aus der Gleichung berechnet werden kann.

Beispiel: $\log 3x - \log x^2 + \log 2^{\log 3x} = 4$;
$\log 3 + \log x - 2 \log x + \log 3 \cdot \log 2 + \log 2 \log x = 4$;
$\log x (\log 2 - 1) = 4 - \log 3 - \log 3 \cdot \log 2$;

$$\log x = \frac{4 - \log 3 - \log 3 \cdot \log 2}{\log 2 - 1}; \text{ u. s. w.}$$

Haben die Logarithmen verschiedene Basis, so bringe man sie auf dieselbe Basis.

Beispiel: $\overset{x}{\log}\, 2 + \overset{x}{\log}\, 3 = \overset{2x}{\log}\, 4$;

$$\frac{\log 2}{\log x} + \frac{\log 3}{\log x} = \frac{2 \log 2}{\log 2 + \log x}$$

$$\log 2 (\log 2 + \log 3) + \log 2 \log x + \log 3 \log x = 2 \log 2 \log x$$

$$\log x = \frac{\log 2 (\log 2 + \log 3)}{\log 2 - \log 3}.$$

Bei logarithmischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten

sucht man die vorhandenen Logarithmen so umzugestalten, daß nur zwei Logarithmengrößen (etwa log x und log y) vorkommen, und löst dann die Gleichungen nach diesen auf.

Beispiel: I. ${}^{y}\log x + \log xy = {}^{y}\log 10$;
II. $\log x^2 + \log 2y^2 = \log 8$;

I. $\frac{\log x}{\log y} + \log x + \log y = \frac{1}{\log y}$;

I. $\log x + \log x \log y + (\log y)^2 = 1$;

II. $2 \log x + \log 2 + 2 \log y = 3 \log 2$;

II. $\log x + \log y = \log 2$; hieraus
$\log x = \log 2 - \log y$; dies in **I.**

I. $\log 2 - \log y + \log 2 \cdot \log y - (\log y)^2 + (\log y)^2 = 1$;
$\log y (\log 2 - 1) = 1 - \log 2$; $\log y = -1$; $y = 0{,}1$;

dies in **II.** $\log x = \log 2 + 1$; $\log x = \log 20$; $x = 20$.

Kommen logarithmische Größen als Exponenten vor, so sucht man die Gleichung auf eine logarithmierbare Form zu bringen, und logarithmiert sie dann, wodurch sie auf eine logarithmische Gleichung zurückgeht.

Beispiel: $x^{1+\log x} = 0{,}1 \cdot x^3$;
$\log x + (\log x)^2 = -1 + 3 \log x$;
$(\log x)^2 - 2 \log x = -1$;
$\log x = 1$; $x = 10$.

Hiemit sollen und können nur die wichtigsten Arten und Auflösungsmethoden solcher Gleichungen angegeben sein. Es mag noch bemerkt sein, daß die Exponentialgleichungen, da sie durch Logarithmen gelöst werden, unendlich vieldeutig sind; unsere Lösung liefert nur einen Wert, die anderen, welche alle imaginär sind, aufzusuchen, ist Aufgabe der höheren Mathematik (Analysis).

105.

Exponential- und logarithmische Gleichungen.

1. $6^x = 9$; $18^x = 10$; $35^{x-1} = 105$;

2. $\sqrt[x]{36} = 8$; $\sqrt[x]{3^{x+2}} = 9$; $\sqrt[x]{1000} = 2$;

3. $3^4 = 4^x$; $0{,}3^x = 12$; $\sqrt[x]{0{,}9} = 9$;

4. $(2\frac{5}{8})^{2\frac{7}{4}} = (2\frac{7}{4})^x$; $(\frac{1}{5})^{\frac{1}{5}x} = 5 \cdot (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}x}$;

5. $\sqrt[x]{0{,}1^{x+1}} = 3\sqrt[x]{0{,}1^{x-2}}$;

6. $a^{x-2} \cdot b^{x-1} = c^{x+1}$; $\frac{5^x}{5^x - 1} = \frac{5^x - 3}{5^x + 1}$;

7. $\sqrt[x]{8^{3x+1}} = \sqrt[2x]{4^{x+2}}$; $5^x = \frac{1}{3} 10^x$;

8. $\frac{a^{x-2} - 1}{a^{x+1} + 1} = b$; $a^{x+b} - b^{x+1} = c \cdot b^x$;

9. $2^x + 2^{x+2} + 2^{x+6} = 3^x + 3^{x+3}$; $[x = \log \frac{99}{28} : \log \frac{3}{2}]$

10. $3^{2x+1} + 5 \cdot 4^{x+2} - 8 \cdot 2^{2x-1} = 18 \cdot 9^{x+1}$; [0,49191]

11. $(\frac{4}{5})^{x+1} (\frac{5}{6})^{x-1} = (\frac{6}{7})^{x+2}$; [1,0643]

12. $\dfrac{2^{2x} \cdot 10^{x+3}}{4^{2x+1} \cdot 5^{2(x-1)}} = \frac{1}{4} \cdot 2{,}5^{x-3}$; [4]

13. $4 \cdot 6^{x-1} = 3 \cdot 2^{x+1}$; [2]

14. $4{,}7253^x = 0{,}7218 \cdot 11{,}403^{x-1}$;

15. $1{,}4142^x + 2 \cdot 1{,}4142^{x+1} = 10$;

16. $(\log 3)^{\log x} = \frac{1}{3} \cdot x^{\log 3}$; [0,59753]

17. $\log 3^x = (x+1) \cdot 3^{\log 3}$; [−1,3937]

18. $1884{,}2^{\frac{x-1}{2}} - 1{,}8842 \cdot 1884{,}2^{\frac{x-3}{2}} = 188{,}42$; [2,3896]

19. $\log x + \log x^2 + \log x^3 = \log 4x^2$; $[\sqrt{2}]$

20. $\log x + \log 2x + \log 3x = \log 4x$; $[\sqrt{\frac{2}{3}}]$

21. $\log 3x + \log 2x^2 + \log x^3 = \log \frac{1}{6} x^2$; $[\frac{1}{6}\sqrt{6}]$

22. $3^{\log x} + 2 \cdot 3^{\log 100 x} = 30$; $[x = \sqrt[\log 3]{\frac{30}{19}}]$

23. $\log x - \log \dfrac{1}{x} - \log x^2 + \log \dfrac{1}{x^2} = 1$; [0,31623]

24. $\log 2x + \log x^2 + \log 2^{\log x} = 2$;

25. ${}^{2}\log x + {}^{3}\log x = {}^{6}\log 2x$;

26. ${}^{2}\log x + {}^{5}\log 2x = {}^{10}\log 10x$;

27. ${}^{x}\log 8 = 3$; ${}^{x}\log 5 = 2$; ${}^{x}\log a = b$;

28. ${}^{x}\log 6 = 2 + {}^{x}\log 3$; $[\sqrt{2}]$

29. ${}^{x}\log 5 + {}^{x}\log 7 = 1 + 2\,{}^{x}\log 35$; $[\frac{1}{35}]$

30. ${}^{10}\log 1{,}5723 + {}^{x}\log 1{,}5723 = {}^{3}\log 1{,}5723$.

---

31. $\begin{cases} a^x \cdot a^{2y} = (a^2)^4; \\ a^{3x} : a^y = a^3; \end{cases}$ [2; 3]

32. $\begin{cases} \sqrt{m^x} : \sqrt[5]{m^y} = m; \\ \sqrt[3]{m^x} \cdot \sqrt{m^y} = m^7; \end{cases}$ [6; 10]

33. $\begin{cases} \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a^2} = \sqrt[12]{a^5}; \\ \sqrt[x]{a^2} : \sqrt[y]{a^3} = \dfrac{1}{\sqrt[24]{a}}; \end{cases}$ [6; 8]

34. $\begin{cases} \sqrt[x-1]{a^4} \cdot a^{y-1} = \sqrt[5]{a^7}; \\ \sqrt[x-1]{a^5} : a^{y-2} = a^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$ [11; 2]

35. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2592; \\ 4^x \cdot 5^y = 640000; \end{cases}$ [5; 4]

36. $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 88; \\ 3^x \cdot 7^y = 351; \end{cases}$

37. $\begin{cases} 3^x \sqrt[y]{16} = 108; \\ 4^x \sqrt[y]{36} = 384; \end{cases}$ [3; 2]

38. $\begin{cases} 4^x \sqrt[y]{5} = 250; \\ 3^{2x} \sqrt[y]{10} = 3000; \end{cases}$ $[\frac{1}{2}; \frac{1}{3}]$

39. $\begin{cases} \sqrt[4]{a^x} \cdot \sqrt[6]{a^y} = a^4; \\ \sqrt[6]{a^x} : \sqrt[3]{a^y} = \frac{1}{a^4}; \end{cases}$ [6; 15]

40. $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 800000; \\ x + y = 13; \end{cases}$ [8; 5]

41. $\begin{cases} x^y = 100; \\ (2x)^{2y} = 160000; \end{cases}$ [10; 2]

42. $\begin{cases} \log x + 2 \log y = 5; \\ x^2 y^3 = 1000; \end{cases}$

43. $\begin{cases} \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{3} \log y = 0{,}42158; \\ \frac{1}{3} \log x + \frac{1}{4} \log y = 0{,}31725; \end{cases}$ [0,94285; 20,095]

44. $\begin{cases} \frac{4}{\log x} + \frac{3}{1 + \log y} = 5; \\ \frac{5}{\log x} - \frac{2}{1 + \log y} = 3; \end{cases}$ [16,238; 5,878]

45. $\begin{cases} \overset{x}{\log}\, a + \overset{y}{\log}\, b = \overset{b}{\log}\, a; \\ \overset{x}{\log}\, b + \overset{y}{\log}\, a = \overset{a}{\log}\, b. \end{cases}$

---

46. $6^x + 6^{2x} = 56;$

47. $4^x - 8 \cdot 4^{-x} = 15\frac{1}{2};$ [x = 2]

48. $(3^{x+2})^{x-3} = 1;$ $(9^{2x-3})^{3x-4} = 81;$ [−2; +3; 2; $\frac{5}{6}$]

49. $\sqrt[x+2]{64} = 2^{x+1};$ $\sqrt[x]{(64)^2} = 2 \cdot 2^x;$ [1; −4; 3; −4]

50. $4^{x+1} - 2^{x+4} = 128;$ [x = 3]

51. $\sqrt{5^{2x} + 2} + \sqrt{5^{2x} - 3} = 4;$ $\left[\frac{\log 313 - \log 64}{2 \log 5}\right]$

52. $\sqrt{8^{2x} + 4} + \sqrt{2 \cdot 8^{2x}} = 14;$ $\left[\frac{5}{6}; \frac{\log 1152}{6 \log 2}\right]$

53. $a \sqrt[x]{b} = (ab)^x;$

54. $2^{x-1} + 2^{7-x} = 5 \cdot 2^2;$ [5; 3]

55. $\frac{\sqrt[x]{a^{x+1}}}{\sqrt[x-1]{a^x}} = \sqrt[x^2-1]{a};$ $\frac{\sqrt[x]{m^{x-2}}}{\sqrt[x+1]{m^x}} = \sqrt[x-1]{m};$ [−2; $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$]

56. $\sqrt[x]{7} + 2 \sqrt[2x]{7} = 35;$ $\left[x = \frac{\log 7}{2 \log 5}\right]$

57. $\sqrt[x+3]{30} = 4^{x-3};$ $\sqrt[x-1]{6} = \frac{2}{3} \cdot 3^x;$

58. $5^x = 2 \sqrt[x]{10};$ $5^x \sqrt[x-1]{4^x} = 1000;$ [−1; $\overset{5}{\log}\, 10$; 3; $\overset{5}{\log}\, 10$]

59. $9^x = 3 \cdot 6^x + 10\frac{1}{8} \cdot 4^{x-1,5};$ [3]

60. $1000 \cdot 4^x + 100 \cdot 10^x = 25^x;$ [5,1215]

61. $(a + b)^x + \frac{a - b}{(a + b)^{x-1}} = 2a;$ $\left[1; \frac{\log (a-b)}{\log (a+b)}\right]$

62. $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^x - \frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^x = -\frac{1}{6};$ [−2; $1\frac{7}{9}$]

63. $\sqrt[x]{15} + \frac{2 - \sqrt[x]{15}}{2 + \sqrt[x]{15}} = \frac{4\sqrt[x]{15} + 2}{5}$; $[{}^{3}\log 15;\ {}^{2}\log 15]$

64. $\frac{(a-1)^{x+2}}{a+1} - 2\,\frac{(a-1)^2}{(a+1)^{x+1}} = \frac{(a-1)^{3-x}}{(a+1)^{2x}}$; $\left[\frac{\log(1 \pm a)}{\log(a^2-1)}\right]$

65. $8 \cdot 9^{x-3} = 3 \cdot 6^{\frac{2x+5}{x}}$; $[5;\ -\tfrac{1}{2}\,{}^{3}\log 6]$

66. $3^{\log(x^2)} + \frac{1}{18} \cdot 6^{2+\log x} = 12 \cdot 4^{1+\log x}$; [26243]

67. $\frac{4 \cdot 5^x}{\sqrt[3]{15}^{\frac{4x}{3}}} = \frac{5\sqrt[x]{8}}{\sqrt{3}}$; $[\tfrac{3}{2};\ -\tfrac{1}{2}\,{}^{5}\log 240]$

68. $x^{\log +x1} = 1000000$; $(x+2)^{\log(x+2)} = x+2$;

69. $(x+1)^{\log(x+1)-1} = 8$; [36482; −0,7332]

70. $(3x+1)^{[\log(3x+1)]^2-1} = \left(\frac{3x+1}{10}\right)^6$; [3; 33; −0,333]

71. $(2x-1)^{\log(2x-1)} = (x - \tfrac{1}{2})^2$; [21,8695; 1,66989]

72. $(x^{\log(x-2)})^{\log x} = x^{\log(x-2)} \cdot (x-2)^2$;

73. $\sqrt[x]{3^4} \cdot \sqrt[x+1]{2^3} = 18$; $[2;\ -{}^{18}\log 9]$

74. $(100x)^{1+\log x} = (10x)^{2\log x}$; [100; 0,1]

75. $\log(x-5) + \log(x+2) = \log(x-7) + \log(x+6)$; [16]

76. $\log 2 + \log x - \log(x-1) = \log(2x-1) - \log(x+1)$; $[\tfrac{1}{5}]$

77. $2\log x - \log(x+14) = 2\log(x-3) - \log(x-1)$; $[6;\ 2\tfrac{1}{3}]$

78. $\frac{2\log 2 + \log 2x}{\log(2x-4)} = 2$; $[3 \pm \sqrt{5}]$

79. $\log(x+1)^2 + 2\log(2x-8) = 4$; [9; −6]

80. $\frac{2}{6 - \log x} + \frac{1}{\log x} = 1$;

81. ${}^{x}\log 5 + {}^{5}\log x = 4$; ${}^{x}\log 4 - {}^{2}\log x = 1$.

---

82. $\begin{cases} 3^x - 5^y = 4; \\ 3^{2x} + 5^{2y} = 106; \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x + 3^y = 89; \\ 2^x \cdot 3^y = 648; \end{cases}$

83. $\begin{cases} 6^{(x^2)} = 2^{2x+3} \cdot 3^{2x+3}; \\ \frac{5^{x^2+xy+2y^2}}{5^{x^2-xy+2y^2}} = 25^9; \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x = 3;\ -1 \\ y = 3;\ -9 \end{pmatrix}$

84. $\begin{cases} 10^{y-1} = \sqrt[x+1]{1000^{x-2}}; \\ 3^{y-1} = \sqrt[x-1]{3 \cdot 3^x}; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt[y]{a^x} = \sqrt[x]{a^{x+2}}; \\ \sqrt[y]{a^{x+2}} = \sqrt[x+2]{a^{x+14}}; \end{cases}$

85. $\begin{cases} \sqrt[x-2]{a^4} : a^{2y-1} = \dfrac{1}{a^3}; \\ \sqrt[x-3]{a^3} \cdot a^{y-2} = a^4; \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} x = 4; \ \frac{9}{4}; \\ y = 3; \ 10; \end{matrix}\right)$

86. $\sqrt[x]{3\sqrt[y]{3^{x+1}}} = 3; \quad \sqrt[y]{4\sqrt[x]{3^{y+4}}} = 6;$ $[x = 3; \ {}^{1,5}\log 27; \ y = 2; \ -1]$

87. $\begin{cases} 2\sqrt[\frac{x}{2}]{y} - 9\sqrt[x]{y^{-2}} = 5\frac{3}{4}; \\ \sqrt{2y^{\frac{x}{3}}} - 2\sqrt[3]{2\sqrt{2y^{-x}}} = 3; \end{cases}$ $[x = \pm 3; \ y = 8; \ \frac{1}{8}]$

88. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} - 9\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} = 112; \quad x^y = \frac{1}{2};$ $[x = 4; \ \frac{1}{4}; \ y = -\frac{1}{2}; \ \frac{1}{2}]$

89. $\begin{cases} {}^{y}\log x + {}^{x}\log y = 2\frac{1}{2}; \\ \log x + \log y = 1{,}43136; \end{cases}$ $[x = 3; \ 9 = y]$

90. $\begin{cases} \log x + \log y = \log x \cdot \log y; \\ {}^{x}\log y = 2; \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} x = 1; \ \sqrt{1000} \\ y = 1; \ 1000 \end{matrix}\right)$

91. $\begin{cases} {}^{x}\log xy + {}^{y}\log xy = 5\frac{1}{3}; \\ {}^{xy}\log x + {}^{xy}\log y + {}^{\frac{x}{y}}\log 3x = 3; \end{cases}$ $\left[\begin{matrix} x = 27; \ y = 3; \\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}; \ y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{27}} \end{matrix}\right]$

92. $\begin{cases} \log x^2y - \log xy^2 = 1; \\ (\log x)^2 - (\log y)^2 = 3; \end{cases}$ $[x = 100; \ y = 10]$

93. $\begin{cases} \log x + \log x^2 + (\log y)^2 = 2{,}80618; \\ \log y + \log y^2 + \log (xy)^2 = 6{,}20412. \end{cases}$ [x = 4; y = 10, u. ?]

Aufl.: **24.** $\log x = \dfrac{2 - \log 2}{3 + \log 2}$. **25.** $x = \dfrac{(\log 2)^2 \cdot \log 3}{(\log 2)^2 + \log 2 \log 3 + (\log 3)^2}$. **26.** $\log x = \dfrac{\log 2{,}5 \cdot \log 2}{1 - \log 2 \cdot \log 5}$. **31.** $x = \text{num} \log \dfrac{\log 3}{1 - \log 3}$. **42.** $x = 0{,}000\,000\,001; \ y = 10\,000\,000$. **45.** $x = \text{num} \log \dfrac{\log a \log b \ (\log a + \log b)}{(\log a)^2 + \log a \ \log b + (\log b)^2}; \ y = \dfrac{1}{ab}$. **53.** $1; \ \dfrac{-\log b}{\log a + \log b}$. **57.** $\pm\sqrt{9 + \dfrac{\log 30}{\log 4}}; \ 2; \ -\dfrac{\log 2}{\log 3}$. **68.** $100; \ 0{,}001; \ 8; \ -1$. **72.** $3; \ 100; \ 0{,}1$. **81.** $x = 5^{2 \pm \sqrt{3}}; \ 2; \ \frac{1}{4}$. **82.** $x = 2; \ y = 1; \ x = 3; \ {}^{2}\log 81; \ y = 4; \ {}^{3}\log 8$. **84.** $x = 5; \ 0{,}5; \ y = 2{,}5; \ -2; \ x = 2; \ -\frac{1}{2}; \ y = 1; \ \frac{1}{6}$

IV. Teil.

Reihenlehre und Kombinatorik.

1. Abschnitt. Reihenlehre.

106.

Arithmetische Progressionen.

Eine arithmetische Progression oder arithmetische Reihe ist eine Reihe von Zahlen, von denen jede folgende um gleich viel größer oder kleiner ist als die vorhergehende; sie ist eine Reihe von Zahlen mit konstanter Differenz aufeinanderfolgender Glieder.

Beispiel: 1, 3, 5, 7 .....;
18, 15, 12, 9, 6 .....;
$-8, -4, 0, 4, 8$ .....;
$2, \frac{1}{2}, -1, -2\frac{1}{2}, -4.$

Bei positiver Differenz heißt die Reihe steigend, bei negativer Differenz abnehmend oder fallend.

Bezeichnet man das erste Glied der Reihe mit a, die Differenz mit d, so ist die allgemeine Form einer arithmetischen Progression:

$$a, \; a+d, \; a+2d, \; a+3d, \; \ldots\ldots$$

Hat die Reihe n Glieder, und bezeichnet man das n^{te}, letzte Glied mit z, so ist

I. $\mathbf{z = a + (n-1)\,d.}$

Um die Summe s der arithmetischen Progression zu bekommen, schreibt man unter die Reihe die Reihe nochmal in umgekehrter Ordnung:

$$s = a + a+d + a+2d + \ldots + a+(n-1)d$$
$$s = a+(n-1)d + a+(n-2)d + a+(n-3)d + \ldots + a.$$

Addiert man, indem man rechts immer die unter einander stehenden Glieder zusammenfaßt, so ist:

$$2s = 2a+(n-1)d + 2a+(n-1)d + 2a+(n-1)d + \ldots + 2a+(n-1)d.$$

Da rechts n gleiche Glieder stehen, so ist ihre Summe $2s = n(2a + (n-1)d)$, also

$$\textbf{II.}\quad s = na + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Man kann die Form

$s = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ auch auflösen in

$s = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d)$, und diese, da

$a + (n-1)d = z$, umwandeln in

$$\textbf{II'.}\quad s = \frac{n}{2}(a + z).$$

(Auch durch Elimination von d aus I und II erhält man II').

Da eine arithmetische Reihe auch von hinten herein betrachtet wieder eine arithmetische Reihe ist, deren Anfangsglied nun z, und deren Differenz $= -d$, so erhält man aus II auch noch

$$\text{II''}.\quad s = nz - \frac{n(n-1)}{2}d.$$

(Auch durch Elimination von a aus I und II).

Mittels der Gleichungen I und II können die Größen z und s aus den gegebenen Größen a, d, n berechnet werden.

Allgemein: Da in einer arithmetischen Reihe 5 Größen vorkommen, a, d, n, z, s, und nur zwei Gleichungen, I und II, zwischen denselben bestehen, so müssen im allgemeinen 3 Größen gegeben sein, damit man die fehlenden zwei aus den zwei Gleichungen berechnen kann. Sind nicht 3 Größen gegeben, sondern weniger, so muß für jede Größe weniger noch eine Gleichung gegeben sein, damit die Anzahl der Unbekannten der Anzahl der Gleichungen entspricht. Man bemerkt wohl, daß die Gleichungen II' und II'' inbezug auf die Gleichungen I und II nicht unabhängig sind, also nicht als weitere Gleichungen gelten, sondern nur an Stelle von I oder II gesetzt werden können, wenn man sich davon Vorteil verspricht.

107.

Aufgaben über arithmetische Progressionen.

1. Man suche die fehlenden Größen, wenn gegeben sind 1) a, d, n; 2) a, d, z; 3) a, d, s; 4) a, n, z; 5) a, n, s; 6) a, z, s; 7) d, n, z; 8) d, n, s; 9) d, z, s; 10) n, z, s.

2. Bestimme das letzte Glied und die Summe aus folgenden Werten von a, d, n.

$a =$	7,	7,	$\frac{3}{4}$,	12,	-14,	-126,	17,	8,	-6,	-1,
$d =$	4,	$4\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{8}$,	$1\frac{2}{7}$,	3,	$2\frac{1}{2}$,	$-1\frac{1}{2}$,	-5,	$-\frac{2}{3}$,	-1,
$n =$	25,	36,	26,	50,	20,	15,	12,	30,	15,	100.

3. Bestimme z aus:
$a = 4\frac{2}{3}$, $d = 1\frac{5}{6}$, $n = 9$;
$a = 5$, $d = 3$, $s = 124$;
$a = 17$, $n = 10$, $s = 102\frac{1}{2}$;
$d = -2$, $n = 5$, $s = -8$.

4. Bestimme s aus:
$a = -16\frac{5}{8}$, $d = 4\frac{1}{2}$, $n = 6$;
$a = 34$, $d = -6$, $z = -80$;
$a = 3\frac{1}{2}$, $n = 25$, $z = 9\frac{1}{2}$;
$d = \frac{1}{4}$, $n = 21$, $z = 8\frac{1}{2}$.

5. Bestimme d aus:
$a = 5\frac{2}{3}$, $n = 17$, $z = 63\frac{2}{3}$;
$a = 15$, $n = 11$, $s = 82\frac{1}{2}$;
$a = -12$, $z = -20$, $s = -80$;
$n = 6$, $z = 5\frac{7}{8}$, $s = -32\frac{1}{4}$.

6. Bestimme n aus:
$a = -15$, $d = -3$, $z = -20$;
$a = 34$, $d = -6$, $z = -460$;
$a = 3\frac{4}{5}$, $z = 5{,}7$, $s = 95$;
$d = 3$, $z = 23$, $s = 98$;
$a = 17$, $d = -2$, $s = 72$.

7. Bestimme a aus:
$d = 4\frac{1}{2}$, $n = 6$, $z = 5\frac{7}{8}$;
$d = -1\frac{1}{2}$, $n = 10$, $s = 102\frac{1}{2}$;
$d = -1\frac{1}{2}$, $z = 5\frac{1}{2}$, $s = 213\frac{1}{2}$;
$n = 9$, $z = 40\frac{5}{9}$, $s = 209$.

8. Bestimme
a und s aus $z = 24$, $d = \frac{5}{7}$, $n = 22$;
z „ n „ $a = -6$, $d = \frac{3}{4}$, $s = 146\frac{1}{2}$;
n „ s „ $a = -\frac{3}{4}$, $d = -\frac{7}{8}$, $z = -21\frac{3}{4}$;
d „ z „ $a = 8\frac{1}{4}$, $n = 147$, $s = 15967\frac{7}{8}$;
n „ a „ $d = 0{,}27$, $z = 18{,}53$, $s = 628{,}43$;
a „ z „ $d = 8\frac{3}{4}$, $n = 58$, $s = 14026\frac{1}{3}$;
n „ d „ $a = 5$, $z = 23$, $s = 392$;
d „ s „ $a = 34$, $n = 20$, $z = -80$.

9. Wie groß ist die Summe der 10 geraden auf einander folgenden Zahlen, deren erste 10 ist, und wie heißt die letzte?

10. Wie groß ist die Summe der ersten 7 ungeraden Zahlen, welche durch 4 dividiert den Rest 3 geben?

11. In einer arithmetischen Reihe ist das erste Glied $2m + 5$, die Differenz $m + 3$; wie groß ist das 6. Glied und die Summe der ersten 6 Glieder; und wie heißt, wenn man die Reihe nach rückwärts fortsetzt, das 5. Glied?

12. Eine Reihe von Zahlen hat die Eigenschaft, daß jede

Zahl das arithmetische Mittel zwischen der vorhergehenden und nachfolgenden ist; man zeige, daß dies eine arithmetische Reihe ist. Man schreibe diese Reihe, wenn a das erste, b das zweite Glied ist, oder wenn das erste a, das 3. b, oder wenn das 1. a, das 6. b ist, oder wenn das 3. a, das 12. b ist.

13. Ein Säulenschaft von 7,43 *m* Höhe hat einen Durchmesser unten von 1,06, oben von 0,85 *m* und besteht aus 9 gleichhohen Stücken (Trommeln); welche Durchmesser oben und unten hat das 4. Stück?

14. Zwischen a und b sollen n Glieder eingeschaltet werden, so daß eine arithmetische Reihe entsteht; wie heißt das r^{te} Glied?

15. Ein Reisender, der in 19 Tagen an seinen Bestimmungsort zu sein wünscht, beschleunigt seine Reise so, daß er jeden Tag eine Viertelmeile mehr macht als den vorhergehenden. Wenn er nun am letzten Tage $14\frac{1}{2}$ Meilen zurücklegt, wieviel Meilen machte er am ersten Tage, und wieviel Meilen beträgt die Reise?

---

16. Das 5. Glied einer arithmetischen Reihe ist 17, das 26. ist 80, die Anzahl der Glieder ist 30; wie groß ist das erste Glied und die Summe? [a = 5; s = 1455]

17. Das p^{te} Glied einer arithmetischen Reihe ist r, das q^{te} ist t, die Anzahl ist n; wie groß ist das 1., das m^{te} Glied und die Summe der ersten n Glieder?

18. Das 3., 8. und 11. Glied einer arithmetischen Reihe sind zusammen $15\frac{1}{4}$, das 2., 5., 7. und 14. sind zusammen 20; wie groß ist die Differenz, die Summe der ersten 20 Glieder und die Summe vom 3. bis 14. einschließlich. [$d = \frac{1}{4}$; $s = 117\frac{1}{2}$; $64\frac{1}{2}$]

19. Ein Schuldner wird mit seinem Gläubiger einig, seine Schuld von 1295 ℳ in monatlichen Raten zu zahlen, von denen die erste 60 ℳ, jede folgende aber um 5 ℳ mehr betragen soll als die vorhergehende. Nach wieviel Monaten ist er fertig? [14]

20. In einer arithmetischen Reihe ist das erste Glied = −12, das zweite = −9; wie groß ist die Summe der Glieder vom 4. bis 10. einschließlich? [42]

21. Die Summe mehrerer auf einander folgender ungerader Zahlen, deren letzte um 20 größer ist als die erste, beträgt 231. Wie heißen die Zahlen? [11, 13, ... 31]

22. Die Summe von 10 Gliedern einer arithmetischen Reihe ist 150, die Summe aus dem 3. und 5. verhält sich zur Summe aus dem 4. und 7. wie 4 : 5; wie heißt die Reihe? [6, 8....24]

23. Die Summe von 4 Gliedern einer arithmetischen Reihe ist 16, die Summe ihrer Quadrate ist 84; wie heißt die Reihe?

24. Die Summe der Glieder einer arithmetischen Reihe ist 192; die Summe der Quadrate des 1. und 8. Gliedes ist 386,

die Summe der Quadrate des 3. und 6. Gliedes ist 306; wie groß ist das erste Glied, die Differenz und die Anzahl der Glieder?

25. In einer arithmetischen Reihe von positiven Gliedern und der Differenz $\frac{1}{2}$ beträgt die Summe der n ersten Glieder 81; wird hiezu die Summe der 4 nächsten Glieder addiert, so erhält man 124. Wie groß ist die Gliederzahl und das Anfangsglied? [$n = 12$; $a = 4$]

26. In der Reihe 2, 5, 8, 11, ··· sollen zwischen das 1. und 2. Glied so viele neue Glieder eingeschaltet werden, daß die Summe der eingeschalteten Glieder nur um 1 kleiner ist, als die Summe der zwanzig ersten Glieder der Hauptreihe. Wie viele Glieder müssen eingeschaltet werden und mit welcher Differenz.

27. Ich habe so viele Kugeln, daß ich daraus ein volles Quadrat bilden kann; will ich aber die erste Reihe und die Anzahl der Reihen beibehalten, jedoch in jeder Reihe um eine Kugel mehr anbringen als in der vorhergehenden, so brauche ich noch 28 Kugeln. Wieviele Kugeln hatte ich? [64]

28. Wenn in einer arithmetischen Reihe $a = 1$ und $d = 1$, welches Glied ist dann gerade 12 mal kleiner als die Summe aller vorhergehenden Glieder? [Das 25.]

29. Die Summe aus dem 4. und 8. Glied einer arithmetischen Reihe ist 25, das Produkt aus dem 3. und 11. Glied ist 140; wie heißen die Glieder?

30. In einer arithmetischen Reihe ist die Summe aus dem zweiten und sechsten Glied = 30, und das Quadrat des 5. Gliedes = 144; wie heißen die Anfangsglieder und die Differenzen der beiden möglichen Reihen, und für welche Gliederzahl ist die Summe der einen Reihe gleich der der anderen?

31. Wenn 5400 *M* zu 4% auf einfache Zinsen ausgeliehen und am Ende jeden Jahres noch 300 *M* zugelegt werden; wieviel betragen die Zinsen in 17 Jahren zusammen? [5304 *M*]

32. Zu 3000 *M* will ich am Ende jeden Jahres soviel dazulegen, daß ich am Schlusse des 12. Jahres mitsamt den Zinsen zu 4% 6000 *M* habe, wie groß ist die jährliche Zulage? [107 *M* ca.]

33. Bei einem Wettrennen wurden die Preise so bestimmt, daß jeder folgende 40 *M* weniger erhält als der vorhergehende; der erste erhielt 280 *M*, alle folgenden zusammen 720 *M*; wieviel Reiter waren es und wieviel erhielt der letzte?

34. Welche Summe muß ich am Anfange jedes Jahres zurücklegen, um am Ende des 8. Jahres 3500 *M* zu besitzen, wenn $3\frac{1}{2}$% einfache Zinsen gerechnet werden? [378 *M* ca.]

35. Von zwei Punkten, deren Entfernung $484\frac{1}{2}$ *m* beträgt, gehen zwei Körper A und B einander entgegen; A legt in der 1. Sekunde 5 *m*, in jeder folgenden um $\frac{1}{2}$ *m* mehr zurück als in der vorhergehenden; B legt in der 1. Sekunde 19 *m*, in jeder folgenden

um $\frac{1}{3}$ *m* weniger zurück als in der vorigen. Wann und wieweit von A (resp. B) treffen sie sich? [19″; 180$\frac{1}{3}$ *m* v. A. —306″?]

36. In einer arithmetischen Reihe ist die Summe aus dem 1. und 5. Glied = 16, das Produkt aus dem 2. und 3. Glied = 48, die Summe aller Glieder = 130; wie groß ist das erste Glied, die Differenz und die Gliederzahl? [4; 2; 10]

37. Die Summe der 5 Glieder einer arithmetischen Reihe ist 10, ihr Produkt = 1440, wie heißen die Glieder? (Setze das mittlere = x). [10, 6, 2, —2, —6]

38. Von zwei Punkten, deren Entfernung 106 *m* beträgt, gehen zwei Körper einander entgegen; A macht in der 1. Sekunde 3 *m*, in jeder folgenden um je $\frac{1}{3}$ *m* mehr; B macht in jeder Sekunde 4 *m*. Wann und wo treffen sie sich? [nach 12″; —53″?]

39. Von zwei Punkten, deren Distanz 12$\frac{1}{2}$ *m* beträgt, bewegen sich zwei Körper in derselben Richtung; der vorangehende A macht in jeder Sekunde 5 *m*, der folgende B macht in der ersten Sekunde 8$\frac{1}{2}$ *m* und in jeder folgenden um $\frac{1}{2}$ *m* weniger als in der vorhergehenden. Wann und wo treffen sich beide? [nach 5″; 10″]

40. 540 ℳ sollen in eine ungerade Anzahl Stipendien verteilt werden, welche eine arithmetische Reihe bilden; dabei soll das mittlere 60 ℳ und das niedrigste 2 mal weniger als das höchste betragen. Wie groß sind die einzelnen Stipendien? [40, 45…80]

41. Wenn man in $y = 3x + 5$ statt x die Glieder der arithmetischen Progression 1, 3, 5, 7, 9, u. s. w. einsetzt, so bilden die erhaltenen Werte von y selbst wieder eine arithmetische Reihe; wie heißt diese und wie groß ist die Summe ihrer ersten 12 Glieder? Wie heißt die entstehende arithmetische Progression, wenn statt x die Werte a, $a + d$, $a + 2d$, $\cdots$ eingesetzt werden, und welches ist dann die Summe der n ersten Glieder?

42. Die Differenzen der Quadratzahlen der aufeinander folgenden Zahlen bilden eine arithmetische Reihe. Warum?

43. Die Differenzen der Quadrate der Glieder einer arithmetischen Reihe bilden eine arithmetische Reihe. Warum?

44. In einer arithmetischen Reihe von 12 Gliedern ist das Produkt aus dem ersten und letzten Glied = 92, das Produkt der mittleren Glieder = 572, wie groß ist das erste Glied und die Differenz? [a = 2, 46; —2; —46; d = 4; —4; —4; 4]

45. In einer arithmetischen Reihe von 8 Gliedern ist die Summe der letzten 4 Glieder doppelt so groß als die Summe der ersten 4 Glieder, und das Produkt aus dem 1. und 5. Glied ist um 160 kleiner als das aus dem 2. und 6. Glied. Wie heißt die Reihe? [10, 14 … od. —10, —14…]

46. Ein Körper legt eine gewisse Zeit lang in jeder Minute 20 *m*, dann ebensolang in jeder folgenden Minute 2 *m* mehr, also 22, 24, $\cdots$ *m* zurück, und kommt so 510 *m* weit; wie lang hat er sich bewegt und wie weit in der letzten Minute? [20′; 40 *m*]

47. Ein Körper legt in der ersten Sekunde $1\frac{2}{3}$ *m*, in jeder folgenden Sekunde um je $\frac{1}{6}$ *m* mehr zurück; so bewegt er sich eine Zeit lang fort, und dann noch halb so lang, indem er um je $\frac{1}{4}$ *m* weniger macht. Auf diese Weise legt er im ganzen $46\frac{3}{4}$ *m* zurück. Wie lange bewegte er sich? [18″ im ganzen]

48. In einem Strahle Ax bewegen sich zwei Körper in derselben Richtung beide von A aus. Der vorangehende legt in der ersten Sekunde 11 *m* und in jeder folgenden um je 1 *m* weniger zurück. Der folgende beginnt seine Bewegung um 3″ später und legt in der erste Sekunde 10 *m* in jeder folgenden um je 1 *m* mehr zurück, muß also den vorangehenden in einem Punkte B einholen. Man berechne die Strecke AB. [60 *m*]

49. Eine arithmetische Reihe, deren Differenz = 2, hat die Summe 66; schaltet man aber zwischen je zwei Glieder der Reihe noch ein Glied, so hat sie die Summe 121; wie heißt die Reihe?

50. Eine arithmetische Reihe, deren Differenz = 4, hat die Summe 65; schaltet man aber zwischen je zwei Glieder noch zwei neue Glieder, so hat sie die Summe 169; wie heißt die Reihe?

51. Ein Körper geht von A nach B; dabei legt er in der 1. Sekunde 7 *m* und eine Zeit lang in jeder folgenden 2 *m* mehr zurück, so daß, wenn er dann eine Zeit lang in jeder folgenden Sekunde 5 *m* weniger zurücklegt, er in der letzten Sekunde gerade 5 *m* zurücklegt und damit B erreicht. Wieviel Sekunden lang legt er mehr und wieviel weniger Meter zurück, wenn AB = 210 *m*?

52. Ein Körper geht von A nach B und legt in der ersten Sekunde 3 *m*, in jeder der folgenden 7″ um je eine bestimmte aber gleichbleibende Größe mehr zurück als in der vorhergehenden, und in den folgenden Sekunden je um 10 *m* weniger zurück, und kommt so nach B, indem er in der letzten Sekunden 5 *m* zurücklegt. Wenn nun AB = 272 *m*, um welche Größe nehmen seine Wege anfangs zu, und wie lange nehmen sie ab? [um 6 *m*; 4″]

53. Eine Reihe von Zahlen ist ähnlich gebildet wie eine arithmetische Reihe, nur ist die Differenz erst 1, dann 2, dann wieder 1, dann 2, und wechselt so beständig ab; das erste Glied ist 5. Wie kann man diese Reihe in eine arithmetische verwandeln und ihre Summe berechnen 1) für n = 20, 2) für n = 39?

54. Eine Reihe von Zahlen, deren erste = 1, ist ähnlich gebildet wie eine arithmetische Reihe, nur wechselt die Differenz zwischen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$ ab. Wie läßt sich diese Reihe in eine arithmetische verwandeln und ihre Summe für n = 80 oder für n = 75 berechnen? [$s = 360$; $s' = 321\frac{2}{3}$]

55. Eine Reihe von Zahlen, deren erste = a, ist ähnlich gebildet wie eine arithmetische Reihe, nur wechselt die Differenz zwischen den Werten d und d′ ab; wie läßt sich die Reihe in eine

arithmetische Reihe verwandeln und ihre Summe für die Gliederzahl $2n$, oder $2n + 1$, berechnen?

56. Wie stellt sich die Lösung von 55, wenn die Differenz zwischen den 3 Werten d, d', d''' abwechselt und die Gliederzahl $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$ beträgt?

Aufl.: **23.** 1, 3, 5, 7 und umgekehrt. **24.** $a = 5$; $d = 2$; $n = 12$; alle anderen Werte sind unbrauchbar. **26.** 174 Gl. $d = \frac{3}{175}$. **29.** Sie bilden sich aus $a = 15$; $1\frac{2}{3}$; $d = -\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{6}$. **30.** $a = 24$; 96; $d = -3$; -27; $n = 7$; 0. **33.** $n = 5$; 10; $z = 120$; -80 (Preis?). **50.** 6, 8 ... 16. **51.** 10″, wenn man die 1. dazuzählt; in den folgenden 5″ legt er weniger zurück. **53.** $s = 380$; $s' = 1297$.

108.

Geometrische Progressionen.

Eine geometrische Reihe oder Progression ist eine Reihe von Zahlen, von denen jede folgende gleich viel mal größer (oder kleiner) ist als die vorhergehende, oder eine Reihe von Zahlen mit konstantem Verhältnis aufeinanderfolgender Glieder.

Beispiel: 1, 2, 4, 8, 16, ...
9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ...
20, 4, 0,8, 0,16, 0,032 ...

Das konstante Verhältnis eines Gliedes zu seinem vorhergehenden nennt man den Quotienten der Reihe; er ist in obigen Beispielen $= 2$, $= \frac{1}{3}$, $= 0{,}2$. Ist er größer als 1, so heißt die Reihe steigend, ist er kleiner als 1, so heißt sie abnehmend.

Bezeichnet man das erste Glied der Reihe mit a, den Quotient mit q, so ist die allgemeine Form der geometrischen Reihe:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ \ldots.$$

Ist die Gliederzahl n, und bezeichnet man das letzte, n^{te}, Glied mit z, so ist

$$\textbf{I.}\quad z = aq^{n-1}.$$

Um die Summe s der geometrischen Progression zu finden, subtrahiert man von ihr die nämliche, aber mit q multiplizierte Summe und hat

$$\begin{array}{l} s = a + aq + aq^2 + \cdots\cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \\ sq = \phantom{a +{}} aq + aq^2 + aq^3 \cdots\cdots + aq^{n-1} + aq^n \\ (-) \qquad (-)\ (-) \quad (-) \qquad\qquad (-) \quad (-) \\ \hline s - sq = a - aq^n \\ s(1 - q) = a(1 - q^n) \end{array}$$

$$\textbf{II.}\quad s = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q} = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ersetzt man aq^n durch zq, so ist

$$s - sa = a - zq, \text{ also}$$

$$\text{II}'\cdot s = \frac{a - zq}{1 - q} = \frac{zq - a}{q - 1}.$$

Mittels der Gleichungen I und II können die Größen z und s aus a, q, n berechnet werden. Allgemein: Da in der geometrischen Reihe 5 Größen vorkommen, a, q, n, z, s, und nur zwei Gleichungen zwischen denselben gegeben sind (II' ist nicht unabhängig von II und kann nur an Stelle von II oder I benützt werden), so müssen im allgemeinen 3 Größen gegeben sein, damit man die anderen berechnen kann. Ist jedoch a, n, s gegeben, so ergibt sich q aus einer Gleichung $(n-1)^{ten}$ Grades: $\frac{s}{a} = 1+q+q \ldots\ldots + q^{n-1}$, ist also blos für $n = 3$ auflösbar. Ist n gesucht, so erfordert es, da es im Exponenten vorkommt, die Auflösung einer Exponentialgleichung.

Sind weniger als 3 Größen gegeben, so muß für jede Größe weniger noch eine Gleichung gegeben sein, damit die Anzahl der Gleichungen der Anzahl der Unbekannten entspreche.

Hat die Reihe abwechselnde Vorzeichen, wie

$$a, \; -aq, \; aq^2, \; -aq^3, \; aq^4, \; -aq^5, \ldots,$$

so entspricht sie der allgemeinen Reihe, wenn man in ihr $-q$ statt q setzt; es ist deshalb ihre Summe

$$s = a\,\frac{1-(-q)^n}{1+q}.$$

Ist in der geometrischen Reihe $q < 1$, also ein ächter Bruch, so hat die Reihe auch dann noch einen Sinn, wenn die Anzahl der Glieder unendlich groß ist. Denn zunächst werden die Glieder selbst immer kleiner, wenn n größer wird, sinken sogar unter jede noch so kleine angebbare Gröge hinab, nähern sich also der Null als Grenze. Wie klein man nämlich eine kleine Größe ε geben mag, stets kann n so groß gewählt werden, daß $q^n < \varepsilon$; es braucht nur $n > \log \varepsilon : \log q$ gewählt zu werden.

Ferner ist für jeden endlichen Wert von n die Summe der geometrischen Reihe $= a\,\frac{1-q^n}{1-q}$ oder $= a\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right)$. Läßt man n immer größer werden, so nähert sich dieser Wert, da $\frac{q^n}{1-q}$ dabei sich dem Wert Null nähert, immer mehr dem Wert $a\,\frac{1}{1-q}$. Da dies für jeden endlichen Wert von n gültig ist, so schließt man, daß, wenn n über alle Grenzen wächst, unendlich wird, die Summe der Reihe den Wert $a\,\frac{1}{1-q}$ annimmt.

Hat also die geometrische Reihe unendlich viele Glieder und ist dabei $q < 1$, so ist ihre Summe

$$s = a\,\frac{1}{1-q}.$$

Eine Reihe, deren Glieder unendlich abnehmen, und deren Summe sich einer endlichen festen Grenze nähert, wenn die Gliederzahl ins Unendliche zunimmt, heißt eine konvergierende Reihe. Die geometrische Reihe convergiert für $q < 1$.

109.

Aufgaben über geometrische Progressionen.

1. Bestimme die fehlenden Größen, wenn gegeben sind: 1) q, n, z; 2) q, n, s; 3) q, z, s; 4) a, q, z; 5) a, q, s; 6) a, n, z; 7) a, z, s.

2. Bestimme a aus: $q = 2$, $n = 11$, $z = 3072$; aus $q = 0{,}8$, $n = 6$, $s = 3{,}68928$; aus $q = 3$, $z = 8748$, $s = 13120$.

3. Bestimme q aus: $a = \frac{5}{16}$, $n = 6$, $z = 320$; aus $a = 2$, $n = 12$, $z = 4$; aus $a = 567$, $z = 7$, $s = 847$.

4. Bestimme n aus: $a = 1536$, $q = \frac{1}{2}$, $z = 3$; aus $a = 1$, $q = 0{,}8$, $s = 3{,}68928$; aus $a = 25$, $z = 1600$, $s = 31750$; aus $q = \frac{1}{3}$, $z = 4$, $s = 1456$.

5. Bestimme z aus: $a = 4$, $q = 3$, $n = 8$; aus $a = 15{,}2$, $q = 1{,}729$, $n = 14$; aus $a = \frac{5}{16}$, $q = 4$, $s = 426\frac{9}{16}$; aus $q = 1{,}274$, $n = 7$, $s = 533{,}82$.

6. Bestimme s aus: $a = \frac{5}{16}$, $q = 4$, $n = 6$; aus $a = 12{,}703$, $q = 0{,}8275$, $n = 17$; aus $a = 1$, $q = 0{,}8$, $z = 0{,}32768$; aus $a = 25$, $n = 7$, $z = 1600$; aus $a = 0{,}2153$, $n = 9$, $z = 10$; aus $q = \frac{1}{3}$, $n = 6$, $z = 4$.

7. Bestimme n und z aus: $a = 3$, $q = 2$, $s = 6141$; aus $a = 15{,}37$, $q = 0{,}948$, $s = 92{,}19$.

8. Bestimme n und s aus: $a = \frac{5}{6}$, $q = 1{,}2$, $z = 2{,}0736$.

---

9. Von n Gliedern einer geometrischen Reihe heißt das erste Glied a, das zweite b; wie heißen die Glieder und wie heißt das n^{te} Glied und die Summe?

10. Das g^{te} Glied einer geometrischen Progression heißt m, das h^{te} heißt r; wie heißt das erste, das n^{te} und die Summe vom g^{ten} bis h^{ten}?

11. Die Zahlen einer Reihe haben die Eigenschaft, daß jede die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden benachbarten ist; man beweise, daß die Reihe eine geometrische ist; man schreibe die Reihe, wenn das erste Glied a und das zweite b, oder wenn das 1. a, das 4. b, oder wenn das erste a, das n^{te} b ist.

12. Man schalte zwischen 1 und 2 elf Glieder ein, so daß sie eine geometrische Reihe bilden.

13. Man summiere folgende Reihen:

$a^7 + a^6 b + a^5 b^2 + \ldots\ldots + a b^6 + b^7$;

$a^{10} + a^9 b + a^8 b^2 + \ldots\ldots + a b^9 + b^{10}$;

$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-1} + b^n$;
$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$;
$a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

14. Zwischen das 1. und 2. Glied der Reihe $\frac{5}{32}$, $\frac{5}{2}$, 40, ... sollen so viele Glieder eingeschaltet werden, daß deren Summe $2\frac{3}{16}$ beträgt. Wie groß ist ihre Anzahl und wie heißen sie. Ebensoviele Glieder schalte man zwischen $\frac{5}{2}$ und 40 ein und bestimme die Summe aller Glieder von $\frac{5}{32}$ bis 40 einschließlich.

---

15. In einer geometrischen Reihe ist das Produkt aus dem 2. und 3. Glied 5000, das vierte Glied ist 200; wie groß ist das 1. Glied, der Quotient und die Summe der ersten 12 Glieder?

16. In einer geometrischen Reihe ist das Produkt aus dem 2. und 4. Glied = 1296, das 5. Glied = 16; wie groß ist das 1. Glied, der Quotient und die Summe der ersten 5 Glieder?

17. In einer geometrischen Reihe ist das erste Glied 256, die Summe aus dem 3. und 5. Glied 1872, das letzte Glied 6561; wie groß ist q, n, s?

18. In einer geometrischen Reihe ist das 2. Glied = 6, die Summe aus dem 4. und 6. Glied = 120, die Summe aller Glieder = 6141; wie groß ist a, q, n?

19. Die Zahl 155 ist in drei Zahlen so zu zerlegen, daß sie eine geometrische Reihe bilden, deren drittes Glied das erste um 120 übertrifft; dann ist zwischen je zwei Glieder der Reihe noch ein neues zu setzen, so daß die neue Reihe auch eine geometrische ist.

20. In einer geometrischen Reihe ist das 3. Glied = 5, die Differenz aus dem 5. und 4. ist 60, das letzte ist 320; berechne a, q, n, s.

21. In einer geometrischen Reihe ist das 3. Glied 36, die Summe der beiden folgenden ist 135, das letzte Glied ist $182\frac{1}{4}$; berechne a, q, n, s.

22. In einer geometrischen Reihe verhält sich die Differenz aus dem 5. und 3. Glied zur Differenz aus dem 3. und 2. wie 30 : 1; die Summe der ersten 5 Glieder ist 78,1; wie groß ist a und q?

23. In einer aus 5 Glieder bestehenden geometrischen Reihe ist das erste = x^2, das zweite $x\sqrt{xy}$; wie heißen die drei anderen Glieder und die Summe aller?

24. Das erste Glied einer aus 7 Gliedern bestehenden Reihe ist p^2, der Quotient ist $\sqrt[3]{q/p}$; wie heißt die Reihe und die Summe der Glieder?

25. In einer geometrischen Reihe beträgt die Summe aus dem 1. und 4. Glied 1332, die Summe aus dem 2. und 3. Glied 132, die Summe aller Glieder 16105; wie lautet die Reihe?

26. Die Summe der ersten vier Glieder einer geometrischen Reihe ist 156, die Summe der folgenden 4 Glieder ist 97500; wie heißt die Reihe?

---

27. Bestimme die Werte folgender Reihen:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots$ in inf.

$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots\ldots$ in inf.

0,333.....; 0,272727.....; 4,384384384......;
0,6818181.....; 0,34135135......;

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots\ldots$ in inf.

28. Von einem Punkte auf dem Schenkel eines Winkels von 60^0 wird eine Senkrechte auf den anderen Schenkel gefällt; vom Fußpunkt dieser Senkrechten wird wieder eine Senkrechte auf den einen Schenkel gefällt u. s. f. Wenn nun die erste Senkrechte $= a$, wie groß ist die Summe aller Senkrechten?

29. Wie heißt die Lösung von 28, wenn der Winkel nicht bekannt, aber die erste Senkrechte $= a$, die zweite $= b$ ist? Wie heißt die Lösung, wenn die erste Senkrechte $= a$ und der Winkel $= \alpha$ ist?

30. Eine Strecke von der Länge a liegt auf einem Schenkel eines Winkels α und wird auf den andern Schenkel projiziert; diese Projektion wird wieder auf den ersten Schenkel projiziert u. s. f. Wie groß ist die Summe der Strecke und aller Projektionen?

31. Ein Kreis vom Radius r wird von zwei Tangenten berührt, deren Schnittpunkt vom Kreismittelpunkt den Abstand a hat. In den geschlossenen Raum zwischen den Tangenten und der Kreisperipherie wird ein diese Grenzen berührender Kreis gelegt; in den jetzt übrigen Raum wird ebenso ein Kreis gelegt, u. s. f. Man berechne die Radien dieser Kreise und die Summe ihrer Flächen?

32. Wie groß ist die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^5 - \left(\frac{a}{b}\right)^7 + \left(\frac{a}{b}\right)^9 - + \ldots, \text{ wenn } b > a,$$

und wie groß ist die Summe der ersten 4 (5) Glieder?

33. In einem rechtwinkligen Dreieck ist parallel einer Kathete, deren Länge $= a$, im Abstande h eine Transversale gezogen, deren Länge $= b$, so daß ein Trapez abgeschnitten ist; vom Rest schneide man durch eine zu b parallele Transversale ein zweites Trapez ab, das dem ersten ähnlich ist; vom Rest schneide man ebenso ein drittes ähnliches Trapez ab, u. s. f. Man berechne die Längen dieser Transversalen, die Höhen der Trapeze und die Summe aller Trapeze und zeige, daß diese Summe gleich der Fläche des Dreieckes ist.

34. Eine Strecke von der Länge a teile ich nach dem goldenen Schnitt und behalte das größere Stück; das kleinere teile ich wieder

nach dem goldenen Schnitt und nehme das größere Stück davon, indem ich es zu dem zuerst behaltenen hinzufüge; mit dem kleineren verfahre ich ebenso und fahre so fort. Wie groß sind die einzelnen Stücke und wie gibt die Summe aller wieder a.

35. Wie stellt sich die Lösung von 34, wenn man stets das kleinere behält und das größere der weiteren Teilung unterwirft?

36. In einer Reihe, die ähnlich gebildet ist wie eine geometrische, ist das erste Glied $= 1$, der Quotient wechselt aber von Glied zu Glied zwischen den Werten q und r; wie kann die entstandene Reihe als geometrische betrachtet werden und welches ist ihre Summe, 1) wenn die Gliederzahl $= 2n$, 2) wenn die Gliederzahl unendlich groß ist?

37. Von einer Strecke a nimmt man $\frac{1}{3}$, vom Rest wieder $\frac{1}{3}$, vom Rest wieder $\frac{1}{3}$ u. s. f. Man zeige, daß die Summe all dieser Teile $= a$, und daß man ebenfalls a bekommt, wenn man von der Strecke stets $\frac{2}{3}$, oder allgemein das q fache $(q < 1)$ nimmt.

38. Von einer Strecke a nimmt man $\frac{1}{3}$ $(\frac{3}{7})$ vom Rest $\frac{2}{3}$ $(\frac{4}{7})$, vom Rest $\frac{1}{3}$ $(\frac{3}{7})$, vom Rest $\frac{2}{3}$ $(\frac{4}{7})$ u. s. f. abwechselnd $\frac{1}{3}$ $(\frac{3}{7})$ und $\frac{2}{3}$ $(\frac{4}{7})$ in inf. Man bestimme die Größen dieser Stücke, und zeige, daß ihre Summe $= a$.

39. Von einer Strecke a nimmt man $\frac{1}{5}$, vom Rest $\frac{1}{6}$, vom Rest wieder $\frac{1}{5}$, vom Rest $\frac{1}{6}$ und fahre so fort, im Ganzen 12 mal etwas nehmend. Wie groß ist der übrig bleibende Rest. Man zeige, daß er und die Summe der weggenommenen Teile $= a$.

40. Von einer Strecke nehme ich $\frac{1}{3}$, vom Rest $\frac{1}{4}$, vom Rest $\frac{1}{5}$ u. s. f. abwechselnd vom jeweiligen Rest $\frac{1}{3}$, dann $\frac{1}{4}$, dann $\frac{1}{5}$. Man zeige, daß die Summe aller Teile $= a$.

41. Von einer Strecke a nehme ich $\frac{1}{12}$, vom Rest wieder $\frac{1}{12}$ u. s. f., wie oft muß ich so Teile wegnehmen, damit ich eben etwas mehr als die Hälfte habe?

42. Auf der Seite eines Dreieckes, dessen Winkel α, β, γ, liegt eine Strecke a (dem Winkel α gegenüber); sie wird auf die zweite Seite (einschließender Winkel β) projiziert, diese Projektion wird auf die 3. Seite projiziert, diese Projektion wird wieder auf die erste Seite projiziert u. s. f. in inf. Wie groß ist die Summe der Strecke und all ihrer Projektionen?

---

43. Aus einem Gefäß, das 18 l reinen Weingeist enthält, werden 5 l herausgenommen und durch 5 l Wasser ersetzt; nach gehöriger Mischung werden wieder 5 l der Mischung herausgenommen und durch 5 l Wasser ersetzt und dieses Verfahren (des Herausnehmens und Ersetzens) wird im Ganzen 12 mal wiederholt. Wieviel l Weingeist sind schließlich in der Mischung? Man beweise, daß das schließlich vorhandene nebst dem nach und nach herausgenommen, so viel Weingeist enthält, als zuerst da war.

44. Wie heißt die Lösung von 43, wenn 18, 5 und 12 durch die allgemeinen Zeichen a, b, n ersetzt werden.

45. Wieviel % Spiritus enthält schließlich die Mischung, wenn in Aufgabe 43 zuerst 18 *l* 76 prozentiger Spiritus vorhanden waren, und dasselbe Verfahren 5 mal wiederholt wird?

46. Aus einem Fasse, das 1200 *l* Wein enthält, werden immer 20 *l* herausgenommen und durch 20 *l* besseren Wein ersetzt, und dieses Verfahren des Herausnehmens und Hinzusetzens soll so oft wiederholt werden, daß das Faß schließlich 300 *l* des besseren Weines enthält. Wie oft muß dies geschehen? Wenn alles herausgenommene in ein anderes Faß zusammengeschüttet wird, wieviel % des besseren Weines enthält es?

47. Mit 80 *g* Silber werden 33 *g* Kupfer zusammengeschmolzen, von der Mischung werden 33 *g* weggenommen und durch 33 *g* Kupfer ersetzt; dies Verfahren (des Zusetzens und Wegnehmens) wird 7 mal wiederholt; wieviel Silber ist schließlich in der Mischung, und wie oft müßte man das Verfahren wiederholen, bis die Mischung weniger als 1 % Silber enthielte?

48. 50 *l* Flüssigkeit enthalten 8 *kg* Kochsalz; ich setze 10 *l* Wasser zu und nehme von der Mischung wieder 10 *l* weg; dasselbe Verfahren wiederhole ich im ganzen 15 mal; wieviel *kg* Kochsalz sind schließlich in der Mischung?

49. Einen cylindrischen Eisenstab von 1 *cm* Radius und 5 *m* Länge strecke ich auf 7 *m* Länge und schneide 2 *m* ab; die bleibenden 5 *m* strecke ich wieder auf 7 *m* und schneide 2 *m* ab, und fahre so fort, 10 mal im ganzen. Wie dick ist schließlich der Stab, welchen Inhalt hat das letzte Stück, und welchen Inhalt hat jedes der abgeschnittenen Stücke. Man zeige, daß die abgeschnittenen Stücke nebst dem letzten Stück an Volumen gleich sind dem gegebenen.

50. In einem Gefäß habe ich 5 *l* Spiritus, die 4 *l* reinen Alkohol enthalten. Ich gieße 7 *l* Wasser mittels einer großen Kanne dazu und nehme 3 *l* der Mischung mittels einer kleinen Kanne weg; nun gieße ich 3 *l* Wasser mit der kleinen Kanne dazu und nehme 7 *l* der Mischung mit der großen Kanne weg; so fahre ich fort, indem ich abwechselnd die große und die kleine Kanne zum Zugießen, resp. Wegnehmen benütze; im Ganzen gieße ich 8 mal Wasser zu und nehme ebensooft Flüssigkeit weg. Wieviel reinen Alkohol habe ich schließlich noch im Gefäß. Man zeige, daß die nach und nach weggenommenen Mengen reinen Alkohols mit dem im Gefäß bleibenden 4 *l* ausmachen. Hätte ich ebensoviel reinen Alkohol schließlich im Gefäß, wenn ich 4 mal nach einander die große Kanne zum Zu- und Weggießen und dann 4 mal die kleine benützt hätte? Oder wenn ich 4 mal nach einander die große zum Zu- und die kleine zum Weggießen, und dann 4 mal nach einander die kleine zum Zu- und die große zum Weggießen benützt hätte?

51. In einem Fasse von 485 *l* Inhalt, das ich nicht umstürzen und nur bis auf 25 *l* Rest ausleeren kann, befinden sich 25 *l* verdorbenen Wassers. Um es möglichst zu entfernen, lasse ich das Faß 10mal nach einander voll Wasser anlaufen und schöpfe es jedesmal wieder bis auf 25 *l* aus. Wenn ich es nun das 11. mal voll laufen lasse, wieviel des verdorbenen Wassers befindet sich nun noch in einem Liter? Mit welchem Quantum guten Wassers hätte ich die 25 *l* direkt mischen müssen, um eine eben so starke Verteilung desselben zu bewirken? Wie oft müßte ich obiges Auswaschen vornehmen, damit das letzte Wasser blos mehr mit je einem Milliontel des schlechten vermischt ist?

52. Rechts neben einen Würfel mit der Seite a stelle ich, mit benachbarter Fläche berührend, einen zweiten Würfel, rechts daneben wieder einen u. s. f., mache aber ihre Kanten so lange, daß ihre oberen rechts liegenden Kanten alle von einer geraden Linie getroffen werden, welche den Boden in b *m* Entfernung vom ersten Würfel trifft; wie groß sind die Dimensionen dieser Würfel, und der wievielte faßt weniger als i, wenn $i = 1$ *ccm*, $a = 1$ *m*, $b = 10$ *m*?

53. Welches ist die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit positiven rationalen Gliedern, für welche die Summe des 1. u. 3. Gliedes $= 20$, die des 1. und 5. $= 17$ ist, und welche anderen geometrischen Reihen entsprechen diesen zwei Bedingungen?

54. Werden zwei Zahlen x und y als die beiden ersten Glieder einer geometrischen Progression genommen, so beträgt der Unterschied zwischen dem vierten und dritten Glied 16. Werden sie aber als die ersten Glieder einer arithmetischen Progression gewählt, so ist der Unterschied zwischen dem 4. und 2. Glied $= 18$. Welche Zahlen sind es?

55. Wie groß ist die Summe einer unendlichen fallenden geometrischen Reihe, für welche das Produkt der 3 ersten Glieder $= 1728$, und die Summe der 3. Potenzen dieser 3 Glieder $= 15768$ ist?

56. Eine arithmetische und eine geometrische Reihe von lauter positiven Gliedern haben dasselbe Anfangsglied; auch ist die Differenz der ersten gleich dem Quotienten der zweiten Reihe. Wie heißen die zwei Reihen, wenn das Produkt aus dem zweiten Gliede der geometrischen und dem sechsten Glied der arithmetischen Reihe $= 102$, und das Produkt aus dem 1. und 5. Glied der geometrischen Reihe $= 324$ ist.

57. Addiert man zu den 4 ersten Gliedern einer steigenden arithmetischen Progression beziehungsweise die Zahlen 1, 8, 35, 122, so erhält man 4 Größen, welche eine steigende geometrische Progression bilden. Beide Reihen sind anzugeben.

110.

Zinseszins- und Rentenrechnung.

Wenn ein Kapital auf Zinsen ausgeliehen ist, und die Zinsen am Ende des Jahres auch zum Kapital gelegt werden, so daß im nächsten Jahre das um die Zinsen vergrößerte Kapital Zinsen trägt, und so auch in jedem folgenden Jahre verfahren wird, so sagt man, das Kapital steht auf Zinseszinsen.

Wir berechnen, wie hoch ein Kapital k mit samt den Zinsen und Zinseszinsen in n Jahren anwächst, wenn es zu $p\,\%$ ausgeliehen ist.

Bezeichnet man den Wert von Kapital und Zinsen am Ende des ersten Jahres mit K_1, so ist

$$K_1 = k + k \cdot \frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = kq,$$

wobei der Ausdruck $1 + \frac{p}{100}$ der Kürze halber mit q bezeichnet worden ist. Man ersieht die einfache Regel: man findet den Wert eines Kapitals am Ende des Jahres, wenn man seinen Wert am Anfang des Jahres mit q multipliziert. Wendet man dies auf das zweite Jahr an, wobei K_1 der Wert am Anfang des 2. Jahres ist, so ist

$$K_2 = K_1 \cdot q = kq \cdot q = kq^2;\ \text{ebenso}$$
$$K_3 = K_2 \cdot q = kq^2 \cdot q = kq^3;\ \text{also auch}$$
$$K_4 = kq^4,\ K_5 = kq^5\ \text{u. s. f., also allgemein}$$

I. $\mathbf{K = kq^n}$.

Aus dieser Formel kann auch umgekehrt k oder q (also p) oder n berechnet werden.

Kapital mit jährlicher Zulage.

Ein Kapital k steht auf Zinseszinsen zu $p\,\%$; am Ende jedes Jahres wird eine Summe a dazugelegt und auch auf Zinseszinsen liegen gelassen. Wir berechnen, wieviel man am Ende des n^{ten} Jahres haben wird.

Das Kapital k ist in n Jahren angewachsen auf kq^n; die erste Zulage a ist, da sie im ersten Jahre nicht da war, $n-1$ Jahre auf Zinseszinsen gestanden, also angewachsen auf aq^{n-1}, die zweite Zulage a, welche nur $n-2$ Jahre auf Zinseszinsen stand, ist angewachsen auf aq^{n-2}, die 3. ist angewachsen auf aq^{n-3}; so geht es fort. Die letzte Zulage, welche erst am Ende des n^{ten} Jahres zugelegt wurde, ist $= a$ geblieben, die vorletzte ist im letzten Jahre auf aq angewachsen und die drittletzte in den letzten zwei Jahren auf aq^2 u. s. w. Bildet man die Summe all dieser Teile, so ist

$$K = kq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots + aq^2 + aq + a.$$

Die Glieder mit a bilden eine geometrische Reihe, also

$$\textbf{II.}\quad K = k q^n + a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Kapital mit jährlicher Wegnahme.

Ein Kapital k steht auf Zinseszinsen zu p% und es wird am Ende jeden Jahres eine Summe a weggenommen; wir berechnen, wieviel man am Ende des n^{ten} Jahres haben wird.

Es ist klar, daß, je nachdem $a \gtrless$ als der jährliche einfache Zins von k ist, der Endwert $K \lesseqgtr k$ sein wird. Um aber diese beiden Fälle nicht als getrennt betrachten zu müssen, nehmen wir an, man lasse das Kapital k unberührt auf Zinseszinsen liegen, so daß es auf $k q^n$ anwächst. Dafür lasse man sich am Ende jeden Jahres von jemand a ℳ leihen, ohne dafür bis zum Schlusse des n^{ten} Jahres Zinsen zu zahlen, so werden diese Schulden auch mit Zinseszinsen anwachsen, und zwar das erste a auf $a q^{n-1}$, das zweite auf $a q^{n-2}$ u. s. w., das vorletzte auf $a q$, das letzte bleibt a. Die Schulden haben sich also bis zum Schlusse des n^{ten} Jahres angehäuft auf

$$a q^{n-1} + a q^{n-2} + \ldots\ldots + a q + a = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Zieht man die Schulden vom Vermögen $k q^n$ ab, so bleibt als Endkapital

$$\textbf{III.}\quad K = k q^n - a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Zur Übung beweise man, daß in dieser Formel sich $K = k$ ergibt, wenn a gleich dem jährlichen Zins von k, $a = \frac{kp}{100}$; man beachte dabei, daß $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Ist a kleiner als der jährliche Zins von k, und bezeichnet man mit a′ das, was vom jährlichen Zins von k nach Wegnahme von a übrig bleibt, so bleibt das Kapital k, da die jährlichen Zinsen desselbe weggenommen werden, unverändert; dafür wird jährlich der Betrag a′ zugelegt und wächst mit Zinseszinsen; man hat also

$$K = k + a' q^{n-1} + a' q^{n-2} + \ldots\ldots + a' q^2 + a' q + a'$$

$$K = k + a' \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ist a größer als der jährliche Zins von k, und bezeichnet a′ das, um was es größer ist, so kann man von k den jährlichen Zins wegnehmen, so daß es unverändert bleibt; zudem muß man aber von jemand anderem sich jährlich a′ leihen lassen, und da hie-

für keine Zinsen bezahlt werden, so wachsen diese Schulden mit Zinseszinsen auf $a'q^{n-1} + a'q^{n-2} + \ldots + a'q^2 + a'q + a'$ also auf $a' \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Durch Abziehen hat man das Endkapital

$$K = k - a' \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Rentenrechnung.

Wird ein Kapital k durch die jährliche Wegnahme a aufgezehrt, so daß der Endwert = 0 ist, so geht die Formel III über in

$$\textbf{IV.}\quad 0 = kq^n - a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Eine mehrere Jahre lang am Ende jedes Jahres wiederkehrende Zahlung a nennt man eine Rente. Das Kapital k, das man jetzt hergeben muß, um den Anspruch auf die Rente a zu erwerben, nennt man den Barwert der Rente. Die Formel IV, nach welcher ein Kapital k durch eine jährliche Wegnahme von a aufgezehrt wird, ist also die Rentenformel, denn sie enthält den Zusammenhang zwischen Kapital a und Rente k.

Ebenso kann Formel IV benützt werden, wenn eine Schuld k dadurch getilgt (amortisiert) werden soll, daß man jährlich eine Summe a bezahlt, welche größer ist als der Zins (Annuität); dabei enthält a nicht nur den natürlichen Zins von k, sondern auch noch den zur Tilgung des Kapitals bestimmten Betrag (Amortisationsquote). Z. B. bei 6000 ℳ Schulden, die zu 4 % verzinst werden müssen, und dadurch getilgt werden sollen, daß man 1 % mehr bezahlt, beträgt $a = \frac{6000 \cdot 5}{100} = 300$ ℳ.

111.

Aufgaben über Zinseszins und Rentenrechnung.

1. Ein Kapital von 1800 ℳ steht auf Zinseszinsen zu 4 %; wie hoch wächst es an in 32 Jahren?

2. Wie hoch wachsen 3700 ℳ bei $3\frac{1}{2}$ % in 60 Jahren?

3. Was wird aus 83000 ℳ bei $4\frac{3}{4}$ % in 21 Jahren?

4. Zu welcher Summe würde 1 ₰, der um Christi Geburt auf Zinseszinsen zu 4 % (5 %) angelegt wurde, bis Ende 1890 angewachsen sein?

5. Ich lege 530 ℳ in die Sparkasse, welche 3 % Zinsen gibt, und die Zinsen, wenn sie nicht geholt werden, zum Kapital legt, und hole Einlage und Zinsen nach 6 Jahren und 5 Monaten. Wieviel bekomme ich?

6. Nach 8 Jahren hat jemand 8000 ℳ zu zahlen; wieviel kann er jetzt zahlen, wenn $3\frac{1}{2}$ % gerechnet werden?

7. Welchen Barwert haben 10000 ℳ, welche nach 5 Jahren fällig sind, wenn 3 % gerechnet werden?

8. Ein Wald, der sich jährlich um 4 % seines Holzbestandes vermehrt, enthält jetzt 16400 *cbm*; wieviel *cbm* enthielt er vor 7 Jahren; wieviel wird er nach weiteren 9 Jahren enthalten?

9. Wie hoch wächst ein Kapital von 18480 ℳ bei $3\frac{3}{4}$ % in 4 Jahren 7 Mon. an?

10. Für eine Maschine wurden gefordert 3000 ℳ bar, 2000 ℳ nach 2 Jahren und 2000 ℳ nach 4 Jahren; wie groß ist der Barwert der Maschine, wenn 5 % gerechnet werden?

11. Für ein Landgut bietet A 70000 ℳ; B bietet 20000 ℳ bar und noch 3 mal je 20000 ℳ nach je 3 Jahren; welches Angebot ist vorteilhafter, wenn $3\frac{1}{2}$ % Zinsen gerechnet werden?

12. Ich will eine Schuld von 2500 ℳ bar und von 3000 ℳ, die erst nach 8 Jahren fällig sind, durch eine einmalige Zahlung nach 3 Jahren decken; wie groß ist diese, wenn 3 % gerechnet werden?

13. Ein Kapital ist zu 4 % Zinseszinsen ausgeliehen 10 Jahre lang; zu wieviel % müßte es auf einfache Zinsen ausgeliehen sein um ebensohoch anzuwachsen?

14. Es übernimmt einer die durch Testament ausgemachte Verpflichtung, seinem Bruder, wenn er volljährig (21 Jahre) sein wird, 10000 ℳ herauszuzahlen; er wünscht aber dafür jetzt ein entsprechendes Kapital zu 4 % verzinslich anzulegen; wie groß muß es sein, wenn der Bruder jetzt 14 Jahre 10 Mon. alt ist?

15. Wenn eine Schmetterlingsraupe täglich ihrem Körpergewicht 10 % durch Wachstum zufügt, wievielmal ist dasselbe in 30 Tagen größer geworden?

16. Zu wieviel Prozent stehen 15000 ℳ, wenn sie in 10 Jahren auf 25600 ℳ angewachsen sind?

17. Zu wieviel Prozent müssen 8700 ℳ ausgeliehen werden, damit sie in 12 Jahren ebensohoch anwachsen, als 10000 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ % in 10 Jahren?

18. Zu einem Geschäft gibt einer 25000 ℳ und erhält nach 6 Jahren 64000 ℳ zurück; wieviel % jährlichen Gewinn hat das Geschäft durchschnittlich abgeworfen?

19. Die Bevölkerung einer Stadt ist in 15 Jahren von 28400 Einwohnern auf 31700 Einwohner gewachsen: wieviel % betrug durchschnittlich der jährliche Zuwachs?

20. Ein Wald, der vor 7 Jahren zu 13000 *cbm* Holzbestand vermessen wurde, zeigt jetzt 16300 *cbm*; wieviel wird er nach weiteren 10 Jahren haben?

21. Von einem Kapital wurden $\frac{2}{5}$ zu $3\frac{1}{2}$ % und $\frac{3}{5}$ zu $4\frac{1}{2}$ % angelegt; nach 15 Jahren war es auf eine Summe von 54900 ℳ angewachsen; wie groß war es ursprünglich?

22. Von einem Kapital, das 10 Jahre lang zu 4 % ausgeliehen war, wurden nach dieser Zeit 8000 ℳ abgeschieden und zu $4\frac{1}{2}$ % angelegt, während der Rest sich mit 4 % weiter verzinste; nach Ablauf von weiteren 12 Jahren betrug das Gesamtkapital 32740 ℳ. Wie groß war es anfangs?

23. Wie lange müssen 7230 ℳ ausstehen, um bei 4 % auf 10000 ℳ anzuwachsen?

24. Es vermacht einer 32000 ℳ mit der Bestimmung, daß die Zinsen so lange admassiert werden sollen, bis sie jährlich 2500 ℳ betragen. Wie lange muß das geschehen, wenn das Kapital zu $3\frac{1}{2}$ % sich verzinst?

25. Die Bevölkerung einer Stadt von jetzt 87400 Einwohnern hat sich bisher mit 2,1 ‰ vermehrt; wann wird sie, gleiches Wachstum vorausgesetzt, auf 100000 Einwohner angewachsen sein?

26. Ein Kapital von 12700 ℳ ist zu $4\frac{1}{2}$ % ausgeliehen; wann wird es ein Kapital von 16000 ℳ, das zu 3 % ausgeliehen ist, eingeholt haben?

27. Von einer Schuld von 7963 ℳ, die einer zu 5 % verzinsen sollte, zahlt einer nach 5 Jahren 576 ℳ und nach 8 Jahren 498 ℳ; wie groß ist der Rest der Schuld, wenn überall Zinseszinsen gerechnet werden?

28. In wieviel Jahren verdoppelt (verdreifacht) sich ein Kapital (oder wird es um die Hälfte größer), wenn es zu 3 %, 4 % 5 %, $3\frac{1}{2}$ % ausgeliehen ist. In wieviel Jahren wird es 100 mal, 1000 mal so groß?

29. Wie lange muß ein Kapital bei p % ausstehen, damit es n mal so groß werde?

30. In wieviel Jahren wird ein Kapital von 3725 ℳ ebensogroß sein als ein Kapital von 5738 ℳ in 9 Jahren, wenn beidesmal $3\frac{3}{4}$ % gerechnet werden?

31. Es schuldet einer 2000 ℳ bar und 4500 ℳ nach 10 Jahren; wann kann er die ganze Summe von 6500 ℳ auf einmal zahlen, wenn 4 % einfache Zinsen und wenn 4 % Zinseszinsen gerechnet werden? Wann kann er die Forderung durch eine Zahlung von 6000 ℳ tilgen?

32. A hat jetzt 5400 ℳ zu $3\frac{1}{2}$ %, B 3000 ℳ zu $4\frac{1}{4}$ % angelegt; nach wieviel Jahren haben beide gleichviel, nach wieviel Jahren hat B doppelt so viel als A, und wieviel hat dann jeder?

33. Ein Häuserspekulant kauft ein Haus für 132000 ℳ, nimmt jährlich 6600 ℳ Mietzins ein und gibt 1150 ℳ für Reparatur und Steuern aus. Nach 6 Jahren verkauft er es für 147000 ℳ. Zu wieviel % hat sich während dieser Zeit sein Kapital verzinst?

34. Eine Stadt, welche gegenwärtig 120000 Einwohner hat, hatte vor 20 Jahren nur 65000 Einwohner; nach wieviel Jahren

von jetzt an gerechnet wird sie, wenn die Verhältnisse sich nicht ändern, 150000 Einwohner haben, und vor wieviel Jahren hatte sie 100000?

35. Eine Stadt zählte 42700 Einwohner; nach 20 Jahren hatte sie 54350 Einwohner und nach weiteren 15 Jahren 66800 Einwohner; war die Zunahme in diesen Zeiträumen dieselbe?

---

36. Wie hoch wächst ein Kapital von 17400 ℳ in 18 Jahren bei 4 %, wenn die Zinsen halbjährig bezahlt werden?

37. Wie hoch wächst ein Kapital von 57000 ℳ in 8 Jahren bei $3\frac{1}{2}$ %, wenn die Zinsen vierteljährig bezahlt werden?

38. In wieviel Jahren wachsen 64950 ℳ auf 85000 ℳ an bei $4\frac{1}{2}$ % und halbjähriger Zinszahlung?

39. Welchem ganzjährigen Zinsfuß entsprechen 4 % Zinsen, welche halbjährig, vierteljährig bezahlt werden?

40. Wieviel betragen die halbjährigen Zinsen, wenn die ganzjährigen 5 % betragen, und wieviel betragen die vierteljährigen, wenn dabei überall Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden?

41. In wieviel Jahren werden 81700 ℳ auf 100000 ℳ angewachsen sein, wenn der Zinsfuß 5 % beträgt und die Zinsen halbjährig bezahlt werden?

---

42. Zu 6000 ℳ legt einer jährlich noch 540 ℳ; wieviel hat er nach 9 Jahren, wenn 4 % Zinsen gerechnet werden?

43. Wieviel muß einer jährlich zu 4000 ℳ legen, um nach 12 Jahren 20000 ℳ zu haben, wenn $3\frac{1}{2}$ % Zinsen berechnet werden?

44. Wie lange muß man zu 8000 ℳ jährlich noch 600 ℳ legen, um 1700 ℳ zu haben bei $4\frac{1}{4}$ %?

45. A hat 20000 ℳ auf Zinseszinsen liegen; B hat 9000 ℳ und legt dazu jährlich 750 ℳ; nach wieviel Jahren hat B ebensoviel als A, wenn 4 % Zinsen gerechnet werden?

46. Welche Einlage muß ich bei einer Sparkasse machen, damit sich dieselbe durch eine halbjährige Zulage von 50 ℳ in 15 Jahren auf 4000 ℳ erhöht bei 4 %? (Die Zulage geschieht am Ende jedes Halbjahres und die Sparkasse schlägt immer am Ende jedes ganzen Jahres die Zinsen zum Kapital).

47. Ein Kapitalist, der 600000 ℳ Vermögen hat, zieht jährlich aus seinem Gelde 5 % und braucht für seinen Haushalt 8500 ℳ; wieviel hat er nach 12 Jahren, und wann hat er eine Million Mark?

48. Von einer Schuld von 23000 ℳ zahlt einer jährlich statt $3\frac{1}{2}$ % Zinsen 1000 ℳ; wieviel ist er nach 15 Jahren noch schuldig?

49. Ein Kapital von 160000 ℳ läßt einer zuerst 6 Jahre

lang auf Zinseszinsen stehen und nimmt dann jährlich 1500 ℳ davon; wieviel hat er nach weiteren 12 Jahren, wenn 3 % gerechnet werden?

50. Wieviel darf einer von 66000 ℳ jährlich wegnehmen, damit er nach 16 Jahren 80000 ℳ hat, bei 4 %?

51. Von 15000 ℳ, die einer zu 4 % verzinsen sollte, zahlt einer 5 Jahre lang gar keinen Zins, dann 4 Jahre lang nur den halben Zins (v. 15000 ℳ) und will nun 10 Jahre lang so viel zahlen, daß er wieder nur 15000 ℳ schuldig ist; wieviel muß er zahlen?

52. Wenn einer statt 4 % von seiner Schuld jährlich 5 % zahlt, nach wieviel Jahren ist seine Schuld nur mehr halb so groß?

53. Wieviel Prozent muß einer statt $3\frac{1}{2}$ % zahlen, wenn seine Schuld nach 15 Jahren nur mehr halb so groß sein soll?

54. Aus einem Walde von 37000 *cbm* Holzbestand, welcher sich jährlich um $5\frac{1}{2}$ % vermehrt, soll jährlich nur so viel Holz geschlagen werden, daß in 14 Jahren der Holzbestand auf 40000 *cbm* anwachse; wieviel kann geschlagen werden?

55. Auf ein Unternehmen wurden 15000 ℳ verwendet; zudem war in den ersten 6 Jahren zu Anfang jedes Jahres ein Zuschuß von 2500 ℳ erforderlich, und mit 5 % schlägt man die verloren gehenden Zinsen an. Wenn nun das vollendete Werk vom 7. Jahre an einen jährlichen Gewinn von 1600 ℳ verspricht, so wird gefragt, zu wieviel % sich das im Unternehmen steckende Geld rentiert.

56. Es übernimmt einer durch Testament die Verpflichtung, seinem 12jährigen Bruder die Zinsen à $4\frac{1}{4}$ % von 18000 ℳ bis zu dessen Volljährigkeit (21 Jahre) und dann das Kapital zu zahlen. Wenn nun für Unterhalt und Erziehung des jüngeren Bruders jährlich 1300 ℳ zu Anfang jeden Jahres erforderlich sind, wieviel hat er bei erlangter Volljährigkeit zu beanspruchen?

57. Um das Studium seines Patenkindes zu erleichtern, hinterlegt ein Pate 500 ℳ bei einer Sparkasse und will nun 19 Jahre lang jährlich so viel dazulegen, daß das Patenkind während der dann folgenden 4 Universitätsjahre einen jährlichen Zuschuß von 600 ℳ zu Anfang jeden Jahres genießen und dann noch eine Summe von 1500 ℳ erheben kann. Wieviel hat der Wohlthäter während dieser 19 Jahre an die Sparkasse jährlich zu entrichten, wenn die Einlagen mit $3\frac{1}{2}$ % verzinst werden?

58. In wieviel Jahren wird eine Schuld um 40 % geringer, wenn statt 4 % Zinsen $4\frac{3}{4}$ % gezahlt werden?

59. Jemand leiht 10000 ℳ auf Zinseszinsen und vermehrt dieses Kapital außerdem nach je 3 Jahren um 1000 ℳ; welches ist sein Guthaben am Ende des 20. Jahres, wenn 5 % gerechnet werden?

---

60. Welche 20jährige Rente kann man mit einem Kapital von 8000 ℳ kaufen, wenn $3\frac{3}{4}$ % gerechnet werden?

61. Wieviel muß einer jährlich zahlen, um eine $3\frac{1}{2}$ prozentige Schuld von 36500 ℳ in 24 Jahren zu tilgen?

62. Für wieviel Jahre kann ich mit 12000 ℳ eine Rente von 850 ℳ kaufen bei $3\frac{2}{3}$ %?

63. In wieviel Jahren wird eine mit $4\frac{1}{4}$ % verzinsliche Schuld von 27600 ℳ getilgt, wenn man jährlich 1720 ℳ bezahlt.

64. In wieviel Jahren wird eine Schuld getilgt, wenn man statt 4 % 5 % zahlt?

65. Mit 8000 ℳ will sich einer eine erst nach 8 Jahren beginnende Rente von 600 ℳ kaufen; auf wie lange kann er sie bekommen, wenn $3\frac{3}{4}$ % gerechnet werden?

66. Eine jährliche Rente von 700 ℳ ist 15 Jahre lang zu beziehen. Wann kann man dieselbe durch eine einzige Zahlung von $15 \cdot 700 = 10500$ ℳ abtragen (welches ist der mittlere Zahlungstermin), wenn $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen gerechnet werden.

67. Zu 4000 ℳ will einer jährlich so viel legen, daß er nach 8 Jahren eine 15jährige Rente von 750 ℳ genießen kann; wie groß ist die jährliche Zulage bei 4 %?

68. Wenn einer von einer mit 4 % verzinslichen Schuld jährlich so viel zahlt, daß sie in 40 Jahren getilgt wäre, nach wieviel Jahren ist sie nur mehr halb so groß, und nach wieviel Jahren hat er sie von da an getilgt, wenn er die Schuld dann in eine 3prozentige umwandeln kann, und gleichwohl denselben Betrag jährlich aufwendet?

69. Eine Schuld von 30000 ℳ will einer in 40 Jahren tilgen und zahlt auch 8 Jahre lang die entsprechende Summe; dann kann er aber 7 Jahre lang gar nichts zahlen und will von da an jährlich so viel zahlen, daß er doch in den folgenden 25 Jahren fertig ist; wieviel hat er zu zahlen bei 4 %?

70. Wie lange kann man ein auf eine Schuld von 30000 ℳ verpfändetes Anwesen benützen, damit durch dessen jährlichen Reinertrag von 2400 ℳ die Schuld abgetragen wird, wenn 5 % gerechnet werden?

71. Jemand, der Anspruch auf eine 18jährige Rente von 930 ℳ hat, bezieht in den ersten 7 Jahren nichts davon und will dafür in den folgenden 11 Jahren eine erhöhte Rente genießen. Wie groß ist dieselbe, wenn $3\frac{1}{2}$ % gerechnet werden?

72. Eine 15jährige, am Ende jedes Jahres fällige Rente von 540 ℳ soll in eine 12jährige, am Anfang jeden Jahres zahlbare Rente umgewandelt werden; wie groß wird diese bei $3\frac{1}{2}$ %?

73. Für eine Lebensversicherung von 1000 ℳ zahlt einer eine jährliche Prämie von 37,4 ℳ am Anfang jeden Jahres; zu

wieviel Jahren ist seine wahrscheinliche Lebensdauer angenommen, wenn 4 % gerechnet werden?

74. Eine Stadt macht ein 4 prozentiges Anlehen von 2000000 ℳ und will mit $\frac{1}{2}$ % amortisieren; wieviel Jahre braucht sie dazu und wieviel Obligationen à 200 ℳ müssen im 20. Jahre zur Zurückzahlung ausgelost werden?

75. Jemand will 15 Jahre hindurch am Anfange jeden Jahres eine gewisse Summe zahlen, so daß nach Ablauf dieser Zeit er selbst oder jemand anderer eine 9 jährige Rente von 360 ℳ genießen kann; wieviel hat er jährlich zu zahlen bei 4 %?

76. Zu 5000 ℳ Kapital legt einer 7 Jahre lang außer den Zinsen à $3\frac{1}{2}$ % jährlich noch 600 ℳ, um nach Ablauf dieser Zeit eine Rente von 1000 ℳ genießen zu können. Auf wie lange wird dies stattfinden können?

77. Ein auf Annuitäten abgeschlossenes Anlehen ist in 30 Jahren zu tilgen; zu wieviel Prozent muß es verzinst werden, wenn der übliche Zinsfuß $4\frac{1}{2}$ % ist?

78. Für 5000 ℳ bar und den Anspruch auf eine halbjährige Rente von 400 ℳ auf 12 Jahre will sich einer eine 18 jährige Rente kaufen; er will dieselbe erst nach 6 Jahren antreten, dann aber am Anfange jeden Jahres erheben; wie groß ist die Rente, wenn $3\frac{1}{2}$ % gerechnet werden?

79. Ich habe Anspruch auf eine 17 jährige halbjährige Rente von 840 ℳ, fällig am Anfange jeden Jahres, und lasse mir statt dessen 5000 ℳ bar und den Rest in Form einer jährlichen Rente von 1200 ℳ, fällig am Ende jeden Jahres geben. Auf wieviel Jahre kann ich diese Rente genießen, wenn 4 % Zinsen in halbjährigen Zinsterminen ausgemacht sind?

80. Von einer 13 jährigen Rente von 900 ℳ postnum. genießt einer in den ersten 5 Jahren nur je 560 ℳ, jedoch praenum., wieviel kann er in den folgenden 8 Jahren noch jährlich praenum. genießen, wenn $4\frac{1}{2}$ % ausgemacht sind?

81. Es will einer eine nach 8 Jahren beginnende 16 jährige Rente von 1400 ℳ praenum. gegen eine andere vertauschen, die erst nach 12 Jahren beginnt, dann aber halbjährig praenum. 15 Jahre lang gezahlt wird; wie groß ist diese, wenn 4 % für das ganze Jahre und 2 % für das halbe gerechnet werden?

82. Ein Wohnungsrecht von 80 ℳ Wert und einer wahrscheinlichen Dauer von 27 Jahren soll jetzt abgelöst werden; mit welcher Summe kann das geschehen, wenn der landesübliche Zinsfuß 4 % ist?

83. Es wird einer durch Testament verpflichtet, seinem jüngeren Bruder eine 12 jährige Rente von 860 ℳ praenum. und dann noch 6800 ℳ zu zahlen. Welche Hypothek muß zur Sicherstellung desselben auf das vom älteren Bruder übernommenen Anwesen ein=

getragen werden? Der Junge braucht nun jährlich 8 Jahre lang nur 560 ℳ, dann wird er Einjährigfreiwilliger mit 2500 ℳ, bezieht die Hochschule 4 Jahre lang mit je 1600 ℳ praenum., geht dann in die Praxis 3 Jahre lang mit je 1800 ℳ praenum. und fragt dann nach dem Rest. Wie wird sich der Abgleich gestalten, wenn 3 % Zinsen testamentarisch ausgemacht und angenommen wurden?

84. Nachdem einer 15 Jahre lang von einer 15jährigen Rente von 1500 ℳ praenum. nur 1000 ℳ jährlich bezogen hat, will er jetzt 3000 ℳ bar und den Rest in Form einer halbjährigen Rente von 600 ℳ postnum. genießen. Auf wie lange kann er diese beanspruchen, wenn 3 % gerechnet werden?

85. Nachdem einer 4 Jahre lang am Anfang jeden Halbjahres 1500 ℳ sich hat leihen lassen, ohne dafür Zinsen zu zahlen, erbt er 6000 ℳ bar und eine 20jährige Rente von 1200 ℳ. Er gibt nun die 6000 ℳ und von der Rente so viel her, daß dadurch seine Schulden getilgt werden; auf welchen Betrag reduziert sich dadurch seine Rente, wenn 4 % gerechnet werden?

86. Es will einer eine 14jährige Rente von 500 ℳ in eine 10jährige von 1000 ℳ verwandeln; wieviel muß er jetzt Bargeld dazulegen, wenn er die 10jährige Rente erst nach 3 Jahren, dann aber praenum. genießen will und 4 % gerechnet werden?

87. Ein mit 4 % verzinsliches Anlehen von 5 000 000 ℳ sollte in 50 Jahren getilgt werden. Nachdem dieser Zahlungsmodus 12 Jahre eingehalten war, wurde ein neues Anlehen von 2000000 ℳ aufgenommen und mit dem ersten vereinigt, wobei der Zinsfuß auf $3\frac{1}{2}$ % herabgesetzt und den Inhabern der früheren Obligationen 2 % Aufgeld gegeben wurde. Von nun an soll das ganze Anlehen in 30 Jahren getilgt werden. Wieviel wird nun jährlich für Verzinsung und Amortisation aufzubringen sein?

2. Abschnitt. Kombinatorik.

112.

Die Kombinationslehre hat die Aufgabe, aus gegebenen Dingen, Elementen, alle möglichen Zusammenfassungen, Komplexionen zu bilden, welche sich von einander entweder durch Anordnung der aufgenommenen Elemente, oder durch den Inhalt von Elementen oder durch Anordnung und Inhalt unterscheiden. Die Gesamtheit der verwendbaren Elemente heißt auch der Zeiger. Um alle Komplexionen einer bestimmten Art finden zu können, bringt man die Elemente zuerst in eine natürliche Reihenfolge, wie die Reihe der natürlichen Zahlen, oder die Buchstaben des Alphabets; wenn

sie ihrer Natur nach keine bestimmte Reihenfolge haben, wie eine Gruppe von Blumenstöcken, eine Anzahl Bücher oder ähnliches, so bezeichnet man sie in beliebiger Weise mit Zahlen oder Buchstaben und bringt diese in die natürliche Reihenfolge. In der natürlichen Reihenfolge wird ein Element für um so höher an Rang (Ordnung) und Inhalt angesehen, je weiter es vom Anfangselement absteht.

Bei der Bildung der Komplexionen wird als Grundsatz festgehalten, daß von zwei Komplexionen diejenige die höhere sein soll, welche in der ersten verschieden besetzten Stelle das höhere Element enthält.

Permutation.

Permutieren heißt, gegebene Elemente in alle möglichen Anordnungen bringen.

Man bringt die Elemente in die natürliche Reihenfolge; diese Komplexion ist die erste und niedrigste Permutation; um aus dieser die nächste, oder um aus irgend einer Permutation die nächst höhere zu bilden, geht man in der Permutation von rechts nach links, bis man auf ein niedrigeres Element kommt, ersetzt dieses durch das nächst höhere der rechts stehenden Elemente, setzt die links stehenden Elemente in der nämlichen Reihenfolge und die noch fehlenden in der natürlichen Reihenfolge dazu. Die letzte oder höchste Permutation hat man erhalten, wenn die Elemente in der umgekehrten Reihenfolge stehen.

Beispiel: Auf 123 folgt 132; auf 2341 folgt 2413, auf 524631 folgt 526134; auf 37641 folgt 41367, auf 84521 folgt 85124.

Sind einige Elemente einander gleich, kommen also ein oder mehrere Elemente wiederholt vor, so gilt dasselbe Bildungsgesetz.

Beispiel: Auf 112 folgt 121; auf 12332 folgt 13233; auf 14144 folgt 14414; auf 343311 folgt 411333; auf 313332 folgt 321333, hierauf 323133, 323313, 323331, 331233 u. s. w.

Aus dem angegebenen Bildungsgesetz folgt, daß nach und nach jedes Element an die erste Stelle kommt, und dort so lange bleibt, bis die anderen Elemente permutiert sind. Faßt man immer diejenigen Permutationen, welche mit demselben Elemente beginnen, in eine Klasse zusammen, so wird dadurch die Herstellung der Permutationen übersichtlicher; ebenso kann man die Permutationen einer Klasse wieder in Unterklassen abteilen.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321.

Anzahl der Permutationen.

Ein Element hat nur eine Permutation, P (1) = 1. Zwei Elemente haben zwei Permutationen, P (2) = 2.

Die Permutationen von 3 Elementen kann man in drei Klassen zerlegen, bei welchen in jeder je ein Element am Anfang steht, und die anderen zwei permutiert sind; jede Klasse enthält also 2 Komplexe, also ist die Anzahl der Permutationen von 3 Elementen $= 3 \cdot 2$; $P(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

So kann man weiterschließen, und findet allgemein, daß die Permutationen von n Elementen sich in n Klassen zerlegen lassen, in welchen je ein Element am Anfang steht, und die andern (n − 1) Elemente permutiert sind; deshalb ist

$$P(n) = n\, P(n-1).$$

Man schließt daraus, daß

$P(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$,

$P(5) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, u. s. f. allgemein

$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.

Man bezeichnet das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n mit n! und spricht n Fakultät.

Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen.

Sind von den n zu permutierenden Elementen einige, etwa r (3) einander gleich, kommt also ein Element r mal (3 mal) vor, so nehme man an, diese r (3) Elemente seien auch verschieden, und bilde alle Permutationen der n Elemente, so erhält man n! Permutationen. Diese ordnet man nun in Gruppen, so daß jede Gruppe immer nur solche Komplexe enthält, die sich nur durch die verschiedene Stellung der r (3) Elemente unterscheiden.

(Solche Gruppen sind z. B. wenn 1, 2, 3 diejenigen Elemente sind, welche gleich sein sollten:
416235, 416325, 426135, 426315, 436125, 436215; oder 514263, 514362, 524163 u. s. w.)

Da aber r (3) Elemente r! (3!) verschiedene Stellungen haben können, so enthält jede Gruppe r! (3!) Komplexe. Macht man diese r (3) Elemente einander gleich, so werden in jeder Gruppe alle Komplexe einander gleich, und stellen nur je eine Permutation vor. Die Anzahl der von einander verschiedenen Permutationen ist deshalb n! : r!

Ebenso findet man, daß, wenn von den n Elementen noch q einander gleich werden, noch je q! Permutationen einander gleich werden, daß also die Anzahl der Permutationen $\frac{n!}{r!\, q!}$ ist!

Sind demnach von den n Elementen r Elemente = a, q Elemente = b, s Elemente = c u. s. w. so hat man

$$P(a^r b^q c^s \ldots) = \frac{n!}{r!\, q!\, s! \ldots}.$$

Aufgaben. **1.** Bilde die Permutationen von 123, 1357, 02468, ikm, opr, uvwz.

2. Welche Permutationen von a, b, o, r, s haben a an zweiter und o an vierter Stelle?

3. Wieviele Permutationen von 123456 haben 5 am Anfang, wieviele haben 6 am Ende; wieviele haben 5 am Anfang und zugleich 6 am Ende? Man bilde sie!

4. Wie heißen die 3 nächstfolgenden Permutationen von 526413, 246351, 465321, 164523, 27698514, 41589672, 3876241?

5. Wie oft können 8 neben einander stehende Personen sich in andere Ordnung stellen?

6. Wieviele Permutationen von 12345 haben die geraden Zahlen an der 2. und 4. Stelle?

7. Wieviele Permutationen von a, l, b, o gibt es, bei denen die Konsonanten beisammen stehen?

8. Ein Klavierlehrer will die Noten c d e f g in allen möglichen Anordnungen schreiben; wieviele gibt es und wieviele beginnen mit c?

9. Wenn man die Permutationen von 1234567 in Gruppen ordnet, von denen jede immer diejenigen Komplexe umfaßt, welche sich nur durch die verschiedene Stellung von 234 unterscheiden, wie viele Gruppen erhält man, und wie viele Komplexe enthält jede Gruppe? Wie heißen die Komplexe derjenigen Gruppe, welcher 2514736 angehört?

10. Wie viele Permutationen gibt es von aabcc, von 11134, von 13334, von 113344, von aaaabb, von aaaaab, von abbcccd?

11. Bilde die Permutationen von aabb, abbc, 32357, 111122, abcc, acccc, accdd.

12. Wieviele Permutationen von 112223 beginnen mit 1, mit 2, mit 3?

13. Wie heißen die drei nächstfolgenden Permutationen von bababa, acbbab, cbcabb, 114114, abbbaa, 321222, baca, 13233, babbaaa, bcbca?

14. In wievielen Permutationen von 1122333 stehen die zwei 1 beisammen, in wievielen die drei?

113.

Kombination.

Kombinieren heißt, aus gegebenen Elementen eine bestimmte Anzahl derselben auf alle möglichen, dem Inhalte nach verschiedenen Arten auswählen.

Die Anzahl der auszuwählenden Elemente heißt die Klassenzahl.

Um die Kombinationen zu einer bestimmten Klasse zu bilden nimmt man von den in eine natürliche Reihenfolge gebrachten Elementen zuerst möglichst niedrige in der angegebenen Klassenzahl. Diese Komplexion ist die erste und niedrigste Kombination. Um aus ihr die folgende, und allgemein aus einer beliebigen Kombination die nächst höhere zu bilden, benützt man folgende Regel. Man geht in der Kombination von rechts nach links, bis man auf ein Element kommt, welches man durch ein höheres Element ersetzen kann, und welches zugleich von dem rechts neben ihm stehenden um mehr als einen Grad dem Range nach verschieden ist; dieses Element ersetzt man durch das nächst höhere, läßt die links stehenden Elemente unverändert und fügt rechts nach so viele dem Range nach folgende Elemente hinzu, bis die Klassenzahl wieder erreicht ist.

Beispiel: Die Elemente seien 1234567; auf 1**3** folgt 1**4**; auf 2**4**7 folgt 256; auf 1**3**67 folgt 1456; auf 12**3**7 folgt 1245; auf **1**567 folgt 2345; auf **1**3567 folgen 14567, 23456, 23457, 23467 ꝛc.

In jeder Kombination ist jedes folgende Element mindestens um einen Rang höher als das vorhergehende.

Anzahl der Kombinationen.

Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur ersten Klasse ist n; also $C^1(n) = n$.

Um die $C^2(n)$ zu finden, verbindet man jede Kombination erster Klasse mit jedem der $n-1$ nicht in ihr enthaltenen Elemente; dadurch erhält man $n(n-1)$ Komplexe. Von diesen Komplexen sind je zwei einander gleich, da sie sich nur durch die Form, nicht durch den Inhalt unterscheiden, z. B. ab, ba; 27, 72; folglich ist die Anzahl der Kombinationen zweimal kleiner als die Anzahl der Komplexe. Also

$$C^2(n) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Um die $C^3(n)$ zu finden, verbindet man jede Kombination zweiter Klasse mit jedem der $(n-2)$ nicht in ihr enthaltenen Elemente; dadurch erhält man $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Komplexe. Von diesen Komplexen sind je 3 einander gleich, da sie blos der Form nach verschieden sind; daß es gerade 3 sind, folgt daraus, daß von den 3 den Komplex bildenden Elementen jedes als hinzugefügtes an letzter Stelle stehen kann und die andern zwei immer nur auf eine Art eine Kombination zweiter Klasse bilden können; z. B. 136, 163, 361. Folglich ist die Anzahl der Kombinationen 3 mal kleiner als die Anzahl der erhaltenen Komplexe, also

$$C^3(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Fährt man so fort, so findet man, daß bei der 4. Klasse die Anzahl der Komplexe $= (n-3) . C^3 (n)$, und daß je 4 dieser Komplexe gleich sind dem Inhalte nach, da jedes der 4 den Komplex bildenden Elemente an letzter Stelle stehen kann und die anderen drei immer nur auf eine Art eine Kombination 3. Klasse bilden können. Es ist also

$$C^4 (n) = \frac{n (n-1) (n-2) n-3)}{1 . 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Es zeigt sich, daß bei jeder folgenden Klasse im Zähler ein um 1 kleinerer Faktor, im Nenner ein um 1 größerer Faktor hinzukommt. Also ist:

$$C^r (n) = \frac{n (n-1) (n-2) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot r}.$$

Man bezeichnet diese Kombinationszahlen abkürzend mit $\binom{n}{r}$ und liest „n über r".

Wenn man von n Elementen r auswählt, so bleiben immer $n-r$ übrig, man nennt deshalb die Klasse $(n-r)$ die Ergänzungsklasse zur Klasse r. Die Kombinationszahlen zweier Ergänzungsklassen sind einander gleich. Daß $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, beweist man dadurch, daß man $\binom{n}{r} : \binom{n}{n-r} = 1$ nachweist. Oder man setzt bei $\binom{n}{r}$ im Zähler die Faktorenfolge noch fort bis 1 und fügt im Nenner dieselben Faktoren bei, so ist ersichtlich, daß $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \, (n-r)!}$, und daß $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \, r!}$, woraus die Gleichheit beider gefolgert wird.

Hat man schon die Kombinationen von n Elementen zur r^{ten} Klasse gebildet, und kommt noch ein neues Element dazu, so bestehen die Kombinationen der $n+1$ Elemente zur r^{ten} Klasse aus den Kombinationen der n Elemente zur r^{ten} Klasse und aus den Kombinationen der n Elemente zur $(r-1)^{ten}$ Klasse, wenn zu jeder der letzteren noch das neue Element hinzugefügt wird. Es ist also

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}.$$

Man beweist dies auch dadurch, daß man die Brüche links auf Generalnenner bringt und nachweist, daß sie dann die Form des Bruches rechts annehmen. Denselben Inhalt hat die Gleichung

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} = \binom{n}{r}, \text{ oder } \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Kombinationen mit Wiederholungen.

Man erhält Kombinationen mit Wiederholungen, wenn man jedes Element nicht blos einmal, sondern so oft als die Klassenzahl

angibt in die Komplexe aufnehmen darf. Das Bildungsgesetz heißt dann: Man nimmt das niedrigste Element so oft als die Klassenzahl angibt; zur Bildung höherer Kombinationen geht man von rechts nach links, bis man auf ein Element kommt, das noch nicht das höchste ist, ersetzt dieses durch das nächst höhere, läßt die links stehenden unverändert, und fügt rechts das neu eingesetzte Element noch so oft dazu, bis die Klassenzahl erreicht ist. In jeder Kombination mit Wiederholungen ist jedes folgende Element dem Range nach gleich oder höher als das vorhergehende. Sind z. B. die Elemente 123, so folgt auf 11, 12, auf 113 folgt 122, auf 2233 folgt 2333, auf 1333 folgt 2222, auf 112333 folgt 113333 dann 122222, dann 122223 u. s. w.

Um die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur r^{ten} Klasse mit Wiederholungen, $^{w}C\ 2\ (n)$, zu finden, vergleicht man diese Kombinationen mit solchen ohne Wiederholungen auf folgende Weise. Es seien die Elemente mit den natürlichen Zahlen bezeichnet, und man erhöht in den Kombinationen mit Wiederholungen jede Stelle jedes Komplexes und zwar die erste um 0, die zweite um 1, die die dritte um 2, u. s. f., die letzte, r^{te}, um $r-1$, so entsteht aus jeder Kombination mit Wiederholungen eine Kombination ohne Wiederholungen auch zur r^{ten} Klasse aber von $n+r-1$ Elementen. Z. B. bei 5 Elementen und 3. Klasse entsteht aus 134, 146; ebenso 222 gibt 234, 334 gibt 346, 555 gibt 567. Da nämlich bei Kombinationen mit Wiederholungen eine folgende Stelle mindestens gleich der vorhergehenden ist, nun aber um 1 mehr erhöht wird, als die vorhergehende, so ist sie nun um mindestens 1 höher im Rang als die vorhergehende. Folglich hat der entstandene Komplex den Charakter einer Kombination ohne Wiederholung. Zugleich ist ersichtlich, das zwei verschiedene Kombinationen mit Wiederholungen durch diese Veränderung nicht zwei gleiche Kombinationen ohne Wiederholungen geben können.

Umgekehrt bildet man die Kombinationen von $n+r-1$ Elementen zur r^{ten} Klasse ohne Wiederholungen, und erniedrigt in jeder Kombination die Elemente, indem man das erste Element um 0, das zweite um 1, u. s. f. das letzte. r^{te} um $r-1$ erniedrigt, so erhält man daraus Kombinationen mit Wiederholungen auch von der r^{ten} Klasse aber nur von n Elementen. Denn da bei einer Kombination ohne Wiederholungen jedes folgende Element um mindestens 1 im Rang höher ist, als das vorhergehende, nun aber um 1 mehr erniedrigt wird, so kann es höchstens dem vorhergehenden gleich werden; der neue Komplex hat also den Charakter einer Kombination von n Elementen zur r^{ten} Klasse mit Wiederholungen. Zugleich ist klar, daß zwei verschiedene Kombinationen ohne Wiederholung durch diese Veränderung nicht zwei gleiche Kombinationen mit Wiederholungen geben können.

Da durch die angegebene Veränderung die Kombinationen von n Elementen zur r^{ten} Klasse mit Wiederholungen jede Kombination von $n+r-1$ Elementen zur r^{ten} Klasse ohne Wiederholung und jede nur einmal geben, so folgt, daß beide Kombinationszahlen einander gleich sind. Es ist also

$$^{w}C^{r}(n) = C^{r}(n+r-1), \text{ also}$$

$$^{w}C^{r}(n) = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdot\cdots\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots r}, \text{ oder}$$

$$^{w}C^{r}(n) = \frac{n(n+1)(n+r)\cdot\cdots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots r}.$$

Aufgaben. **1.** Wie heißen bei den Kombinationen von 123456 die 4 nächsten Kombinationen zu 146, 256, 1246, 2345?

2. Wie heißen bei den Elementen abcdefg die vier folgenden Kombinationen zu beg, abdg, bcfg, abefg, acefg.

3. Auf wieviele Arten lassen sich die 90 ersten Zahlen zu je zweien, dreien, vieren kombinieren.

4. Auf wieviele Arten kann man aus 36 verschiedenen Karten je 12 auswählen?

5. Wieviele Schnittpunkte haben 6 gerade Linien, wenn nie mehr als zwei durch einen Punkt gehen?

6. Wieviele Schnittpunkte haben 5 Kreise, wenn nie mehr als zwei sich in einem Punkte schneiden?

7. Wieviele Schnittpunkte können im allgemeinen auftreten, wenn 3 Kreise und 4 Gerade vorhanden sind?

8. Wieviele Mischungen von je 4 Farben kann man mit den Farben rot, orange, gelb, grün, blau und violett machen, wenn gelb und orange nicht zugleich darin vorkommen sollen?

9. In wievielen Punkten können sich n Gerade schneiden, von denen p parallel sind?

10. Wenn von 12 Geraden 5 durch einen Punkt und 3 durch einen andern Punkt gehen, in wieviel Punkten können sich alle schneiden?

11. Wieviele Dreiecke werden gebildet von 5 (20) sich schneidenden Geraden? Wieviele Vierecke (Fünfecke) werden dadurch gebildet?

12. Wieviele körperliche Dreikante können gebildet werden, wenn sich n Ebenen im Raum schneiden. Wieviele 4seitige Pyramiden werden dadurch gebildet?

13. Wie groß ist die Anzahl der $^{w}C^{3}(123)$, $^{w}C^{4}(1,2)$, $^{w}C^{5}(1234)$, $^{w}C^{6}(12)$?

14. Wievielerlei Sorten Wein kann einer aus 4 Sorten Wein herstellen, wenn er zu jeder Mischung 5 Teile gleichen oder verschiedenen Weines nehmen will?

15. Wieviele Dominosteine gibt es, wenn auf jedem derselben zwei der Zahlen 0 bis 6 angebracht sind?

16. Wiviele verschiedene Würfe sind mit 2 (3) Würfeln möglich?

17. Wieviele Würfe mit 2 Würfeln zeigen gerade Augenzahlen?

18. Wieviele Würfe mit 3 Würfeln zeigen zwei und nur zwei gerade Augenzahlen?

19. Für welche Elementenzahl ist die Anzahl der Kombinationen zur 3. Klasse mit Wiederholungen gleich der Anzahl der Kombinationen von doppelt so viel Elementen zur 3. Klasse ohne Wiederholungen?

114.

Variation.

Variieren heißt aus gegebenen Elementen je eine gewisse Anzahl auf alle möglichen dem Inhalt oder der Form nach verschiedene Arten auswählen. Die Anzahl der auszuwählenden Elemente gibt die Klassenzahl.

Man bildet die niedrigste Variation wie beim Kombinieren. Zur Bildung höherer Variationen geht man von rechts nach links bis man auf ein Element kommt, das man durch ein höheres ersetzen kann, ohne eines der links von ihm stehenden Elemente benützen zu müssen. Man ersetzt dieses durch das nächsthöhere, links noch nicht verwendete Element, läßt die links stehenden unverändert und fügt rechts noch möglichst niedrige, noch nicht verwendete, Elemente an, bis die Klassenzahl erreicht ist.

Beispiel: Hat man die Elemente 12345, so folgt auf 13, 14, auf 25, 31, auf 12**5**, 132, auf **3**54, 412, auf **4**53, 512, auf 3**2**54, 3412, auf **1**543, 2134, auf 3542, 4123 u. s. w.

Da nach und nach jedes Element an den Anfang tritt und dort so lange bleibt, bis die anderen Elemente auf alle möglichen Arten angesetzt sind, so kann man die Bildung der Variationen übersichtlicher machen, indem man sie in Ordnungen zerlegt, von denen jede ein anderes Anfangselement und nach diesem die Variationen der übrigen Elemente zur nächstniedrigen Klasse enthält; bei Bildung dieser Variationen kann man wieder in Unterordnungen einteilen.

Z. B.	123	213	312	412
	124	214	314	413
	132	231	321	421
	134	234	324	423
	142	241	341	431
	143	243	342	432.

Anzahl der Variationen.

Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur 1. Klasse ist n; also $V^1(n) = n$.

Die Variationen zur 2. Klasse bekommt man, wenn man zu jeder Variation 1. Klasse noch hinzufügt jedes der $(n-1)$ Elemente, welche sie selbst nicht enthält.

$V^2(n) = (n-1) \cdot V^1(n) = n(n-1)$.

Die Variationen dritter Klasse bekommt man, wenn man zu jeder Variation zweiter Klasse noch hinzufügt jedes der $(n-2)$ Elemente, welche sie selbst nicht enthält.

$V^3(n) = (n-2) V^2(n) = n \cdot (n-1)(n-2)$.

So fährt man fort und hat allgemein:

$V^r(n) = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$.

Da die Variationen alle möglichen Komplexe von r Elementen aus n gegebenen sind, deren Unterschiede sowohl durch Inhalt als durch Form bedingt sein können, so kann man die Variationen auch bilden, indem man von den n Elementen zuerst die Kombinationen zur r^{ten} Klasse bildet, und jede Kombination dann noch permutiert. Die Variationen können also auch als permutierte Kombinationen angesehen werden. Da jede Kombination r Elemente enthält und deshalb r! Permutationen hat, so ist

$$V^r(n) = \binom{n}{r} r! = n \cdot (n-1)(n-2) \ldots (n-r+1).$$

Für Variationen von n Elementen zur n^{ten} Klasse deckt sich die Bildungsregel mit der der Permutationen von n Elementen, und es ist auch

$$V^n(n) = n! = P(n).$$

Variationen mit Wiederholungen.

Wenn man bei der Bildung der Variationen jedes Element so oft, als die Klassenzahl angibt, in die Komplexion aufnehmen darf, so erhält man Variationen mit Wiederholungen.

Die niedrigste Variation dieser Art ist dieselbe wie bei den Kombinationen. Zur Bildung höherer Variationen geht man von rechts nach links, bis man auf ein Element kommt, welches noch nicht das höchste ist, ersetzt dieses durch das nächsthöhere, nimmt die links stehenden Elemente unverändert, und fügt recht das niederste Element so oft an, bis die Klassenzahl erreicht ist.

Z. B. Bei 123 folgt auf 12, 13, auf 113, 121, auf 133, 211, auf 233, 311, auf 2123, 2131, auf 2223, 2231, auf 3233, 3311, auf 2333, 3111 u. s. w.

Da man hiebei die Variationen einer Klasse auch dadurch erhält, daß man zu jeder Variation der nächst niedrigen Klasse noch jedes Element hinzufügt, so findet man, daß

$^{w}V^{1}(n) = n$, $^{w}V^{2}(n) = n^{2}$, $^{w}V^{3}(n) = n^{3}$, u. s. w.
$^{w}V^{r}(n) = n^{r}$.

Zusatz. Um die Variationen von n Elementen zur rten Klasse zu bilden, kann man auch die n Elemente r mal unter einander schreiben, und nun die Variationen dadurch bilden, daß man zu einer Komplexion je ein Element aus jeder Horizontalreihe nimmt. Ist dabei erlaubt, die Elemente aus derselben Vertikalreihe zu nehmen, so erhält man Variationen mit Wiederholungen, sonst Variationen ohne Wiederholungen. Dabei können die Horizontalreihen aus verschiedenartigen Elementen gebildet sein, z. B. die Elemente der 1. Horizontalreihe sind Subjekte, die der zweiten Prädikate, die der dritten Objekte. Das Bildungsgesetz solcher Verbindungen ist dasselbe wie bei den Variationen, auch dann noch, wenn die einzelnen Reihen verschiedene Anzahlen von Elementen haben; es kann dann jedes Element nur bis zur höchsten Stelle seiner Reihe erhöht werden. Die Anzahl der möglichen Verbindungen ist dann das Produkt der einzelnen Elementenanzahlen. Derartige Verbindungen gehören nicht mehr zu den eigentlichen Variationen, doch sind sie durch das Bildungsgesetz mit denselben verwandt.

Aufgaben: **1.** Auf wieviele verschiedene Arten kann einer sein Fenster schmücken, wenn er von 7 Blummenstöcken immer je 4 hinstellt?

2. Wieviele Tonfiguren von je 4 Tönen lassen sich aus 6 (7) Tönen zusammenstellen, wenn die Töne alle verschieden sein sollen, und wieviele, wenn je zwei Töne gleich sein dürfen?

3. Wieviele fünfziffrige Zahlen, von denen keine die nämliche Ziffer wiederholt enthält, lassen sich mit den Ziffern 1234567 anschreiben?

4. Wieviele vierziffrige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 4, 6, bilden und wieviele dreiziffrige Zahlen aus den Ziffern 1, 3, 5, 7?

5. Wie heißen die 4 folgenden Variationen von den 7 ersten Ziffern, wenn gegeben sind 365, 1467, 5763, 4265, 25763, 17645, 52761, 67542, 43271, 65437, 527641, 643271, 643715?

6. Wieviele verschiedene Zeichen können durch Nebeneinandersetzen von Punkten und Strichen gebildet werden, wenn je 2 Zeichen, wenn je 3, wenn je 4 verwendet werden dürfen?

7. Wieviele Farbenzusammenstellungen für Fahnen kann man mit 6 Farben machen, wenn für jede Fahne 3 verschiedene Farben genommen werden sollen, deren verschiedenartige Anordnung aber einen Unterschied bedingen soll? Wieviele kommen noch dazu, wenn zwei dieser Farben gleich sind, aber durch die dritte getrennt sein sollen (w r w; r w r)?

8. Wieviele 5ziffrige Zahlen lassen sich mit den Ziffern 01234567 anschreiben, wenn in jeder Zahl jede Ziffer nur einmal vorkommen soll und die 0 nicht am Anfange stehen darf?

9. Wieviele Silben können aus 10 Konsonanten und 5 Vokalen gebildet werden, wenn jede Silbe aus 3 Buchstaben, nämlich zwei

verschiedene Konsonanten und einem Vokale bestehen soll? Wieviele derselben haben den Vokal in der Mitte?

115.
Vermischte Aufgaben.

1. Wieviele Permutationen von 1234567890 haben die ungeraden Zahlen an den 5 ersten Stellen, die geraden Zahlen an den folgenden 4 Stellen und die 0 am Ende?

2. Wieviele Permutationen von aiubkm gibt es, bei denen Vokale und Konsonanten abwechseln?

3. Wieviele Permutationen von abcdef gibt es, bei denen die Buchstaben abc in irgend einer Reihenfolge beisammen stehen?

4. Wieviele von den Kombinationen der 30 ersten Zahlen zu je 5 enthalten die Zahl 1, und wenn man diese Kombinationen wegläßt, wieviele von den übrigen enthalten die Zahl 2 oder die Zahl 10?

5. Wieviele Worte lassen sich aus 12 Konsonanten und 5 Vokalen bilden, wenn jedes Wort 3 verschiedene Konsonanten und zwei gleiche oder verschiedene Vokale haben soll und die Vokale zwischen den Konsonanten stehen sollen? (Z. B. Basel, Segel). Wieviele, wenn von den Konsonanten zwei gleich sein dürfen (Babel, Memel)?

6. Wieviele Permutationen von 12345 gibt es, bei denen sowohl die geraden als auch die ungeraden Zahlen beisammenstehen?

7. Wieviele Permutationen von abcdefgi gibt es, bei denen sowohl abc als auch def und gi bei einander stehen? Man gebe eine Regel an, nach welcher man diese bildet!

8. Vier um einen Tisch herum sitzende Spieler wollen so oft als möglich ihren Platz tauschen, doch soll eine Vertauschung, bei welcher jeder wieder denselben Nachbar zur rechten hat, nicht als neu gelten. Wie oft können sie tauschen?

9. In wievielen verschiedenen Anordnungen können die Planeten: Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn auf der Ekliptik verteilt sein, wenn man stets vom Jupiter aus zählt, oder wenn man von der Sonne aus zählt?

10. Wenn man die Permutationen von 1122233 in Gruppen ordnet, so daß jede Gruppe immer all die Komplexe enthält, in welchen die 33 an denselben Stellen stehen, wieviele Gruppen gibt es, und wieviele Komplexe enthält jede Gruppe?

11. Wieviele Permutationen von 1122233 enthalten zweimal die Ziffernfolge 123? Wieviele enthalten zweimal die Ziffernfolge 23? Wieviele enthalten einmal die Ziffernfolge 13 und einmal 23?

12. Bei einem Gerichte sind 2 Direktoren und 10 Räte angestellt. Auf wieviele Arten läßt sich hieraus ein Senat bilden, bestehend aus einem Direktor und 4 Räten und in wievielen dieser Senate sind zwei bestimmte Räte (M und N) zugleich beschäftigt?

13. Wieviele Kombinationen der Ziffern 1234567 zur 4. Klasse (5. Klasse) enthalten zwei gerade Zahlen?

14. Wieviele Worte lassen sich aus den Buchstaben amble bilden, wenn die Vokale nicht beisammen stehen dürfen?

15. Wieviele Permutationen von aabbbcc haben links und rechts ein a, wieviele haben vorn b, hinten c, wieviele in der Mitte b, wieviele in der Mitte abc?

16. In wievielen Permutationen von abbbcc stehen die 3 Buchstaben abc in dieser Ordnung beisammen?

17. Wenn man den Elementen 122333 noch einen 2 hinzufügt, um wieviel erhöht sich die Zahl derjenigen Permutationen, welche zwei und nur zwei Zweier am Anfang haben?

18. Wieviele Permutationen von aaebbc gibt es, bei denen die Vokale und Konsonanten abwechseln?

19. Wieviele der Permutationen von 111233 haben zwei und nur zwei Einer am Anfang?

20. Wieviele Permutationen von 1112233 haben vorn 1 hinten 3 und neben diesen nicht die gleiche Ziffer?

21. Wieviele von den Permutationen von 123344 haben am Anfang 3 und nach ihm nicht 3?

22. Von 36 Karten hat der erste Spieler 11 Karten bekommen; auf wieviele Arten können die übrigen Karten an die zwei andern Spieler zu je 11 Karten verteilt werden, wobei 3 Karten weggelegt werden?

23. Auf wieviele Arten kann man aus 3 ersten Tenoren, 4 zweiten Tenoren, 5 ersten und 3 zweiten Bässen ein doppelt besetztes Quartet zusammenstellen?

24. Auf wieviele Arten lassen sich aus 90 Zahlen je 5 auswählen, und wieviele der möglichen Arten enthalten 3 ganz bestimmte Zahlen, z. B. 17, 31, 43?

25. Auf wieviele Arten lassen sich 16 Kugeln in zwei Haufen à 10 und 6 Kugeln verteilen? Auf wieviele Arten in 3 Haufen à 6, 6, 4 Kugeln? Auf wieviele Arten in 4 Haufen à 6, 5, 3, 2 Kugeln und à 4 Kugeln?

26. Auf wieviele Arten können 9 verschiedene Dinge in 3 Gruppen von je 3 Dingen verteilt werden, wenn die Verteilung schon dann als verschieden angesehen wird, wenn nur zwei Gruppen andere Dinge zugeteilt werden, die Verteilung dagegen als dieselbe angesehen wird, wenn dieselben Dinge nur in je eine andere Gruppe kommen?

27. Auf wieviele Arten läßt sich ein Produkt von 6 Faktoren abcdef in ein Produkt aus 3 Faktoren zerlegen, von denen jeder ein Produkt aus zwei der gegebenen Faktoren ist? Auf wieviele Arten läßt sich ebenso ein Produkt von 2 n Faktoren zerlegen, oder ein Produkt von r n Faktoren in n Faktoren?

28. Auf wieviele verschiedene Arten kann man 4 verschiedenen Münzen in eine Reihe legen, so daß jedesmal der Anblick je nach Anordnung oder nach Art (Kopf oder Schrift) ein anderer wird, und wieviele dieser Anordnungen zeigen an beiden Enden einen Kopf?

29. Auf wieviele Arten kann einer seine 6 Blumenstöcke an zwei Fenster zu je dreien hinstellen, so daß jedesmal ein anderer Anblick entsteht?

30. Wieviele Parallelogramme werden gebildet, wenn 7 parallele Linien von 5 anderen parallelen Linien geschnitten werden?

31. 15 Kugeln, von denen 6 weiß, 5 schwarz, 4 rot sind, sollen in 3 Gruppen verteilt werden, so daß in der ersten Gruppe 2 w. 2 s. 1 r, in der zweiten 3 w. 1 s. 3 r. und in der letzten Gruppe die übrigen liegen. Auf wieviele Arten kann das geschehen?

32. Beim Picketspiele bekommt jeder der zwei Spieler 12 Karten, die übrigen 8 werden als Kaufkarten zurückgelegt. Wieviele verschiedene Spiele sind bei der Austeilung der Karten möglich?

33. Auf wieviele Arten kann man 24 Karten unter 2 Spieler so verteilen, daß jeder 11 Karten bekommt und 2 beiseite gelegt werden, wenn die Verteilung auch dann schon als eine verschiedene angesehen wird, wenn nur ein Spieler eine andere Karte bekommt?

116.

Der binomische Lehrsatz.

Man entwickelt folgende Produkte:

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab;$

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 &+ (a+b+c+d)x^3 \\ &+ (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \\ &+ (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.\end{aligned}$$

Man fährt so fort, und gelangt zur Entwickelung des Produktes von n solchen Binomen:

$$(x+a)(x+b)x+c) \ldots\ldots.$$

Bei der Entwickelung desselben ist jedes Glied des einen Binoms mit jedem Glied jedes anderen Binomes zu multiplizieren. Das erhaltene Produkt ist also ein Aggregat von 2^n Gliedern, von denen jedes ein Produkt von n Faktoren ist. Ordnet man die Glieder nach Potenzen von x, so ist zuerst vorhanden das Glied x^n. Ferner sind vorhanden Glieder mit x^{n-1}; diese müssen noch je eines der Elemente a, b, c ... als Faktor enthalten; ihre Zusammenfassung gibt also x^{n-1}. $\Sigma C^1(a, b, c \ldots)$. Ferner sind vorhanden Glieder mit x^{n-2}; diese müssen noch je zwei der Elemente a, b, c... als Faktoren bei sich haben; ihre Zusammenfassung gibt also

$x^{n-2}\Sigma C^2(a, b, c\ldots)$. Faßt man ebenso die Glieder mit x^{n-3} zusammen, so geben sie, da jedes noch 3 der Elemente a, b, c... als Faktoren bei sich haben muß, $x^{n-3}\Sigma C^3(a, b, c\ldots.)$ und so geht es fort. Das letzte Glied enthält kein x und ist das Produkt der Elemente a, b, c.... Die vorletzten Glieder, welche nur x^1 enthalten, geben, da jedes noch $n-1$ der Elemente a, b, c... als Faktoren enthält, zusammengefaßt $x\cdot\Sigma C^{n-1}(a, b, c\ldots.)$. Dabei ist jede Kombination der Elemente als Produkt der Elemente aufgefaßt. Man hat also:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots..$$
$$=x^n+x^{n-1}\Sigma C^1(a, b, c\ldots)+x^{n-2}\Sigma C^2(a, b, c\ldots.)$$
$$+\ldots.+x\Sigma C^{n-1}(a, b, c\ldots.)+abc\ldots.$$

Setzt man die Elemente a, b, c... alle gleich a, so geht das Produkt $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots.$ über in $(x+a)^n$; in der Entwickelung rechts geht jedes Glied einer Summe von Kombinationen über in eine Potenz von a, die Glieder jeder Summe werden je einander gleich, und ihre Anzahl ist jedesmal gleich der Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur entsprechenden Klasse; aus $\Sigma C^1(a, b, c\ldots)$ wird $\binom{n}{1}a$, aus $\Sigma C^2(a, b, c\ldots.)$ wird $\binom{n}{2}a^2$, u. s. f., aus $\Sigma C^{n-1}(a, b, c\ldots)$ wird $\binom{n}{n-1}a^{n-1}$, und aus dem letzten Glied $a\cdot b\cdot c\ldots.$ wird a^n. Man hat also:

$$(x+a)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\cdot a+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2+\binom{n}{3}x^{n-3}a^3+\ldots\ldots$$
$$+\binom{n}{r}\cdot x^{n-r}\cdot a^r\ldots.+\binom{n}{n-1}x\cdot a^{n-1}+a^n.$$

Diese Formel enthält den **binomischen Lehrsatz**, die **Entwickelung der Potenz eines Binomes in eine nach Potenzen der Elemente des Binomes geordnete Reihe**. Die Koeffizienten dieser Reihe, 1, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ u. s. w., welche die Kombinationszahlen der n Elemente zu den aufeinanderfolgenden Klassen sind, heißen die **Binomialkoeffizienten**; sie werden auch mit $\mathfrak{B}_n^r$ bezeichnet, so daß $\mathfrak{B}_n^r=\binom{n}{r}$

Da $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$, so sind die Binomialkoeffizienten von Gliedern, welche gleichweit von den Enden abstehen, einander gleich.

Da $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$, so kann man die Binomialkoeffizienten einer Potenz $(n+1)$ durch Addition je zweier Binomialkoeffizienten der vorhergehenden Potenz erhalten. Dies ist leicht ersichtlich an folgender Zusammenstellung der Binomialkoeffizienten:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1.
u. s. w.

Ist in $(x+a)^n$ das a negativ, so erhält die Reihe abwechselnde Vorzeichen; die Glieder mit ungeraden Potenzen von a sind negativ.

Setzt man $x = a = 1$, so erhält man:

$$(1+1)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + 1 = 2^n, \text{ und}$$

$$(1-1)^n = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots\ldots = 0.$$

117.

Der polynomische Lehrsatz.

Durch eine ähnliche Ableitung wie bei der Potenz eines Binoms erhält man die Entwickelung der Potenz eines Polynoms. Enthält das Polynom n (4) Glieder und ist dasselbe zur r^{ten} (5.) Potenz zu erheben, so hat man das Polynom r mal (5 mal) mit sich selbst zu multiplizieren. Da hiebei jedes Glied des ersten Polynoms mit jedem Glied des zweiten zu multiplizieren ist, und jedes Glied dieser Entwickelung mit jedem Glied des 3. Polynoms zu multiplizieren ist, und dies Verfahren r mal (5 mal) wiederholt werden muß, so erhält man im ganzen n^r (4^5) Glieder, von denen jedes aus r (5) Faktoren besteht.

Die Glieder dieser Entwickelung sind die Variationen der n (4) Elemente zur r^{ten} (5.) Klasse mit Wiederholungen, wenn man die den Komplex bildenden Elemente als die Faktoren eines Produktes nimmt; denn diese Variationen enthalten auch alle Verbindungen, welche man erhält, wenn man jedes Element mit jedem Element r mal auf alle möglichen Arten verbindet.

Da aber diese Variationen als Produkte aufzufassen sind, so werden immer diejenigen einander gleich, welche sich blos durch die verschiedene Stellung der Elemente unterscheiden, z. B. die Variationen aabbc, aabcb, aacbb, ababc u. s. w. Die Anzahl derjenigen Glieder, welche so einander gleich werden, ist jedesmal gleich der Anzahl der Versetzungen (Permutationen), welche die Elemente des Gliedes zulassen; nimmt man als Repräsentat solcher Glieder jedesmal dasjenige, welches die erste, niedrigste Permutation seiner

Elemente enthält, so gibt die Zusammenfassung solcher gleicher Glieder stets eine Kombination der n (4) Elemente zur r^{ten} (5.) Klasse mit Wiederholungen multipliziert mit der Anzahl der Versetzungen der Elemente dieser Kombination.

Faßt man auf diese Weise immer die gleichen Glieder der Entwickelung in ein Glied zusammen, so gibt die Entwickelung der r^{ten} Potenz eines Polynoms von n Elementen eine Reihe von Gliedern, welche die Kombinationen der n Elemente zur r^{ten} Klasse mit Wiederholungen enthalten, jede Kombination multipliziert mit der Anzahl der Permutationen ihrer Elemente. Dies ist der Wortlaut des polynomischen Lehrsatzes.

Beispiel:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + a^3 b \cdot \frac{4!}{3!} + a^3 c \frac{4!}{3!} + a^2 b^2 \frac{4!}{2!\,2!} + a^2 b c \frac{4!}{2!} + a^2 c^2 \frac{4!}{2!\,2!} + a b^3 \frac{4!}{3!} + \text{etc.}$$

Scheidet man den gemeinsamen Zähler aus, so ist:

$$(a+b+c)^5 = 5!\left[\frac{a^5}{5!} + \frac{a^4 b}{4!} + \frac{a^4 c}{4!} + \frac{a^3 b^2}{3!\,2!} + \frac{a^3 b c}{3!} + \frac{a^3 c^2}{3!\,2!} + \frac{a^2 b^3}{2!\,3!} + \frac{a^2 b^2 c}{2!\,2!} + \frac{a^2 b c^2}{2!\,2!} + \text{etc.}\right]$$

$$(a+b+c+d)^3 = 3!\left[\frac{a^3}{3!} + \frac{a^2 b}{2!} + \frac{a^2 c}{2!} + \frac{a^2 d}{2!} + \frac{a b^2}{2!} + a b c + a b d + \frac{a c^2}{2!} + a c d + \frac{a d^2}{2!} + \text{etc.}\right]$$

Hat das Polynom n Glieder, so hat die Entwickelung der r^{ten} Potenz desselben $\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-1)}{1\cdot 2\ldots.r}$ Glieder, jedes Glied hat r Faktoren, und die Summe aller Koeffizienten der Glieder ist n^r.

Aufgaben. Entwickele:

1. $(a+b)^4$; $(2x-1)^5$; $(1-x)^4$; $(x-3)^6$;
2. $(1+x)^6$; $(x+\frac{1}{2})^8$; $(x-1)^{10}$;
3. $(\frac{1}{2}x+2y)^7$; $(a^3+3ab^2)^9$; $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$;
4. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4$; $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^6$; $\left(\frac{a}{b}-\sqrt[3]{ab}\right)^6$;
5. $\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}\right)^8$; $(1-\sqrt[5]{x^3})^6$; $(1+\sqrt[6]{a^5})^8$;

6. $(a+b\sqrt{-1})^6$; $(a-b\sqrt{-1})^6$; $(2-\sqrt{-1})^5$;

7. $(a+b\sqrt{-1})^n+(a-b\sqrt{-1})^n$;

8. $(a+b\sqrt{-1})^n-(a-b\sqrt{-1})^n$;

9. $(1+\sqrt{-1})^{10}$; $(1-\sqrt{-1})^8$.

Anhang.

Diophantische Gleichungen.

Ist nur eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten gegeben, so ist dadurch nicht eine endliche, sondern eine unendliche Anzahl von zusammengehörigen Werten der Unbekannten bestimmt; denn zu jedem Wert, den man der einen Unbekannten beilegt, gibt die Gleichung einen oder mehrere Werte der anderen Unbekannten.

Betrachtet man von einer solchen Gleichung nur diejenigen Wertepaare, in denen jede Unbekannte nur positive und ganze Zahlenwerte hat, so nennt man die Gleichung eine diophantische Gleichung und versteht unter dem Auflösen einer diophantischen Gleichung das Aufsuchen derjenigen Paare positiver und ganzer Werte der zwei Unbekannten, welche die gegebene Gleichung zwischen den zwei Unbekannten befriedigen.

Wir betrachten zunächst lineare Gleichungen von der allgemeinen Form $ax+by+c=o$, und nehmen als Beispiel die Gleichung

$$12x=17y+4.$$

Drückt man x durch y aus, indem man die ganzen Vielfachen von y von den Bruchteilen sondert, so ist:

I. $x=y+\frac{5y+4}{12}$; sollen x und y ganze Zahlen sein, so muß auch der Bruch eine ganze Zahl sein; man setze ihn $=k$, so ist

$$\frac{5y+4}{12}=k; \text{ hieraus } 5y=12k-4, \text{ oder}$$

II. $y=2k+\frac{2k-4}{5}$. Man schließt ebenso weiter, daß, wenn sowohl y als auch k ganze Zahlen sein sollen, auch der neue Bruch eine ganze Zahl sein muß; man setze also seinen Wert $=i$, so ist

$$\frac{2k-4}{5}=i; \text{ hieraus } 2k=5i+4, \text{ oder}$$

III. $k=2i+2+\frac{1}{2}i$. Sollen nun k und i ganze Zahlen sein,

so muß auch $\frac{1}{2}i$ eine ganze Zahl sein; setzt man ihren Wert $= n$, so ist $\frac{1}{2}i = n$, oder

IV. $i = 2n$.

Für jeden ganzzahligen Wert von n ist nun auch der Wert von i, also auch der jeder vorhergehenden Unbekannten ganzzahlig.

Setzt man die Werte in die vorhergehenden Gleichungen ein, so hat man:

$$\text{III}'.\ k = 4n + 2 + n = 5n + 2.$$
$$\text{II}'.\ y = 10n + 4 + 2n = 12n + 4.$$
$$\text{I}'.\ x = 12n + 4 + 5n + 2 = 17n + 6.$$

Legt man dem n alle möglichen ganzzahligen Werte bei, so geben die Gleichungen I′ und II′ die zusammengehörigen ganzzahligen Werte von x und y. Es ist also

für $n =$	0;	1;	2;	3;	4;	-1;	-2;	-3;
$y =$	4;	16;	28;	40;	52;	-8;	-20;	-32;
$x =$	6;	23;	40;	57;	74;	-11;	-28;	-45;

Die positiven ganzzahligen Lösungen der gegebenen Gleichung sind also enthalten in den Formen

$$x = 17n + 6 \text{ und } y = 12n + 4 \text{ für } n = 1, 2, 3 \ldots \infty.$$

Vor Beginn des Verfahrens sind die Brüche aus den Koeffizienten der Gleichung zu entfernen, so daß a, b, c ganze Zahlen sind; auch sind gleiche Faktoren derselben zu beseitigen. Eine solche Gleichung kann nur dann durch ganzzahlige Werte befriedigt werden, wenn die Koeffizienten von x und y relative Primzahlen sind. Denn sind sie das nicht, sondern ist etwa $a = m\alpha$ und $b = m\beta$, so kann die Gleichung $ax + by = c$ auf die Form

$\alpha x + \beta y = \frac{c}{m}$ gebracht werden, und aus dieser ist ersichtlich, daß sie durch ganzzahlige Werte von x und y nicht befriedigt werden kann, da $\alpha x + \beta y$ für ganzzahlige Werte von x und y nie gleich einem Bruche $\frac{c}{m}$ werden kann.

Beispiel: Die Gleichung $6x = 9y - 7$ hat keine ganzzahlige Lösung.

Das Verfahren, durch welches man zu ganzzahligen Lösungen einer Gleichung mit zwei Unbekannten kommt, besteht also darin, daß man die eine Unbekannte ausdrückt durch ganze Vielfache der andern Unbekannten, ganze Einheiten und einen Bruch, daß man diesen Bruch gleich einer neuen Unbekannten setzt und aus dieser Gleichung wieder die zweite Unbekannte ausdrückt durch ganze Vielfache der neuen Unbekannten, ganze Einheiten und einen Bruch, und so fort fährt, bis schließlich eine Unbekannte blos durch ganze Vielfache einer letzten Unbekannten und ganze Einheiten ausgedrückt ist. Dadurch, daß man dann der letzten Unbekannten nur ganzzahlige

Werte beilegt, erhält auch jede frühere Unbekannte ganzzahlige Werte. Durch aufeinanderfolgende Substitution kann auch jede der zwei gesuchten Unbekannten durch die letzte Unbekannte ausgedrückt werden. Unter den auf diese Weise erhaltenen Wertepaaren der gesuchten Unbekannten sind dann noch die positiven Wertepaare auszuwählen.

Beispiel: $3x = -5y + 62$ gibt:

$x = -y + 20 + \frac{-2y+2}{3}$; setze $\frac{-2y+2}{3} = i$, so ist

$y = -i + 1 + \frac{-i}{2}$; setze $\frac{-i}{2} = k$, so ist

$i = -2k$; dies rückwärts eingesetzt gibt:

$y = 3k + 1$; $x = -5k + 19$. Man hat also

für $k = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;$

$x = 29;\ 24;\ 19;\ 14;\ 9;\ 4;\ -1;\ -6;$

$y = -5;\ -2;\ 1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16.$

Die Gleichung hat also nur 4 positive ganzzahlige Wertepaare, welche den Werten $k = 0, 1, 2, 3$ entsprechen.

Hat man 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten durch ganzzahlige positive Werte derselben zu befriedigen, so eliminiert man eine Unbekannte aus den zwei Gleichungen und bestimmt aus der Eliminationsgleichung die Werte der zwei Unbekannten wie vorher, also ausgedrückt in allgemeiner Art mittels einer veränderlichen Größe, welche die Werte der Zahlenreihe durchläuft. Diese zwei Ausdrücke für die zwei Unbekannten setzt man dann in eine der gegebenen Gleichungen ein, und sieht zu, ob sich auch die erste Unbekannte ganzzahlig durch die Veränderliche ausdrückt. Ist dies der Fall, so hat man für jede Unbekannte einen Ausdruck durch die allgemein Veränderliche, und erhält, indem man dieser alle möglichen ganzzahligen Werte beilegt, drei Reihen von ganzzahligen zusammengehörigen Werten der drei Unbekannten. Ist aber obiges nicht der Fall, drückt sich also die erste Unbekannte nicht ganzzahlig durch die allgemein Veränderliche aus, so muß man mit dieser Gleichung das Verfahren wiederholen; es wird dadurch die erste Unbekannte durch eine neue Veränderliche ausgedrückt, und diese neue Veränderliche auch in die Werte der beiden andern Unbekannten eingeführt.

Beispiel: I. $5x + 3y - 3z = 9$;

II. $17x + y - 6z = 29$.

Eliminiert man z, so erhält man

$7x - 5y = 11$; hieraus ergibt sich

$x = 5k - 2$ und $y = 7k - 5$. Beides in I eingesetzt gibt:

$3z = 46k - 34$. Da sich z nicht ganzzahlig durch k ausdrückt, so wiederholt man mit dieser Gleichung das Verfahren. Es ist:

$z = 15k - 11 + \frac{k-1}{3}$; setzt man $\frac{k-1}{3} = n$, so ist

$k = 3n + 1$; dies eingesetzt gibt

$z = 46n + 4; \quad x = 15n + 3; \quad y = 21n + 2.$

Gibt man dem n die Werte der natürlichen Zahlenreihe, so erhält man für x, y, z die ganzzahligen Lösungen der gegebenen Gleichungen.

Das Verfahren läßt sich leicht ausdehnen auf ein System von n Gleichungen mit n—1 Unbekannten.

Aufgaben. Man suche die positiven ganzen Werte der Unbekannten in folgenden Gleichungen:

1. $2x = 3y + 5$; **2.** $4x = 3y + 6$;
3. $7x + 5y = 2$; **4.** $4x + 11y = 38$;
5. $9x + 2y = 40$; **6.** $35x = 72y + 63$;
7. $143x = 180y + 98$; **8.** $97x = 113y + 114$;
9. $73x = 61y - 200$; **10.** $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{2}$.

11. In welcher Gleichung zwischen x und y entsprechen den Werten $x = 1, 3, 5, 7, 9 \ldots$ Die Werte $y = 3, 7, 11, 15, 19 \ldots$?

12. Welche Gleichung zwischen x und y wird durch die Werte $x = 2, 5, 8 \ldots$ und $y = 5, 9, 13 \ldots$ befriedigt?

13. Welche Gleichung zwischen x und y wird durch die Werte $x = 11, 18, 25 \ldots$ und $y = 6, 11, 16 \ldots$ befriedigt?

14. Wenn die Reihen $x = \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2 \ldots$ und $y = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \ldots\ldots$ zusammengehörige Werte von x und y enthalten, welche zusammengehörigen Werte sind ganzzahlig?

15. $\begin{cases} 5x - 2y - z = 14; \\ 5x - 6y + 2z = 7; \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 54; \\ 7x + 4y - 4z = 83; \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 5y - 5z = 16; \\ 9x - 10y + 15z = 154; \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 14x - 3y + 6z = 122; \\ 13x - 6y + 3z = 76; \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x - 5y + 4z = 29; \\ 5x - 8y = 7; \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 5x - 2y = 7; \\ 7x - 3z = -1. \end{cases}$

21. Man soll 76 in zwei Summanden zerlegen, von denen der eine durch 3, der andere durch 5 ohne Rest teilbar ist.

22. Man soll 101 in zwei Summanden zerlegen, von denen der eine durch 5, der andere durch 9 teilbar ist. Man soll 109 ebenso zerlegen.

23. Um eine Bretterwand von 96 *m* Länge zu machen, hat einer Bretter von $5\frac{1}{2}$ *m* und solche von 7 *m* vorrätig. Wieviele von jeder Sorte wird er nehmen müssen, wenn er keine zerschneiden will?

24. Ein Weinwirt weiß, daß ein Kunde von seinem Moselwein à 1,4 ℳ und dem Rheinwein à 2,2 ℳ im ganzen für 50 ℳ bestellt hat, erinnert sich aber der Anzahl der Flaschen nicht mehr. Wieviel werden es sein müssen?

25. Wie kann man aus Fünfzehnteln und Vierzehnteln $\frac{19}{30}$ zusammensetzen?

26. Jemand hat Thaler, Fünfmarkstücke und Zehnmarkstücke, im ganzen 22 Stck., welche zusammen 110 *M* gelten. Wieviel Stück hat er von jeder Sorte?

27. Jemand kauft eine Waare, das *kg* zu 25 *M*, und eine andere, das *kg* zu 36 *M*. Wieviel *kg* kann er von jeder gekauft haben, wenn er für die erste um 14 *M* mehr zahlt, als für die zweite?

28. Für eine Schuld von 160 *M* werden einem 3 Schweine und 5 Gänse gepfändet, doch erhält er eine Mark zurück. Wie hoch wurde je ein Schwein und je eine Gans gerechnet?

29. Eine Eierfrau verkaufte 51 Eier; sie gab zuerst das Stück für 4 *ϑ*, dann zwei Stück für 7 *ϑ*, dann das Stück für 3 *ϑ*, und löste im ganzen 1,89 *M*. Auf die erste Art verkaufte sie mehr als die Hälfte der Eier, und auf die zweite Art mehr als doppelt so viel als auf die dritte Art. Wieviel Eier verkaufte sie auf jede Art?

30. Versucht man eine Bretterwand mit Brettern von 5 *m* Länge herzustellen, so bleiben 4 *m* der Wand übrig. Benützt man Bretter von 7 *m* Länge, so bleibt 1 *m* übrig. Wie lang ist die Wand?

31. Wie kann man aus Achteln und Neunteln $\frac{5}{12}$ herstellen?

32. 9 *hl* Waizen und 14 *hl* Korn kosten zusammen 500 *M*. Welchen Preis in ganzen Mark hat jede Getreideart?

33. Welche Zahl gibt durch 5 dividiert den Rest 4 und durch 6 dividiert den Rest 3?

34. Welche Zahl gibt durch 6 dividiert den Rest 5 und durch 8 dividiert den Rest 3?

35. Welche Zahl gibt durch 29 dividiert den Rest 15 und durch 39 dividiert den Rest 12?

36. Welche Zahl gibt durch 3, 4, 5 dividiert die Reste 2, 3, 4?

37. Welche Zahl gibt durch 5, 7, 9 dividiert die Reste 2, 5, 2?

38. Welche Zahl gibt durch 7, 9, 11 dividiert die Reste 2, 1, 1?

39. Welche Zahl gibt durch 3, 4, 5, 6 dividiert die Reste 2, 1, 1, 5?

40. Welche Zahl gibt mit 3, 5, 7 dividiert die Reste 1, 1, 5?

41. Welche Zahl gibt mit 4, 6, 9, 13 dividiert die Reste 3, 3, 3, 7?

42. Auf der einen Schale einer Wage liegen 14 *kg* und auf der anderen 25 *kg*. Wieviel 3 *kg* Stücke muß man mindestens auf die erste, und wieviel 5 *kg* Stücke auf die zweite legen, damit die Wage im Gleichgewichte ist?

43. Eine aus Männern, Frauen und Kindern bestehende Gesellschaft von 16 Personen verzehrt im ganzen für 57 *M*, und zwar

hat jeder Mann 7, jede Frau 4, jedes Kind 2 ℳ zu zahlen. Wieviel Männer, Frauen und Kinder waren es?

44. Drei Zahlen geben zusammen 15. Das 6fache der ersten, das 15fache der zweiten und das 40fache der dritten geben zusammen 271. Wie heißen die Zahlen?

45. Arbeiter, Handlanger und Lehrjungen, zusammen 27 Personen, erhalten zusammen 63 ℳ Taglohn. Wenn nun 1 Arbeiter 3 ℳ, 1 Handlanger 2,5 ℳ, 1 Lehrjunge 1 ℳ erhält, wieviel von jeder Sorte können es sein, wenn die Arbeiter an Zahl ungefähr ebensoviel sind als Handlanger und Lehrjungen zusammen?

46. Ein Zahnrad hat 8 Zähne, ein anderes 15. Nach wie vielen Umdrehungen wird der 1. Zahn des 1. Rades dem 2. Zahn des 2. Rades berühren? Wann den 4. Zahn, wann den $n+1^{ten}$ Zahn?

47. Ein Zahnrad von 16 Zähnen greift in ein anderes von 25 Zähnen. Nach wieviel Umdrehungen wird sein erster Zahn den 12. des zweiten berühren? Wird jeder Zahn des ersten jeden Zahn des zweiten berühren? Wird das auch der Fall sein, wenn das zweite Rad 24 Zähne hat? Kann dabei der 1. Zahn den 9. 12. 13. berühren?

48. Als die Schüler einer Klasse zu 8 aufgestellt wurden, blieben 6 übrig; als sie zu 9 aufgestellt wurden, blieben 3 übrig. Wieviel waren es?

Soll eine quadratische Gleichung zwischen zwei Unbekannten durch ganzzahlige Werte gelöst werden, so können allgemeine Regeln darüber nicht aufgestellt werden.

Hat die Gleichung die Form $x(y+a) = by^2 + cy + d$, so kann man mit $y+a$ wegdividieren und den Quotienten rechts durch Ausführung der Division auf die Form bringen:

$x = by + c' + \frac{d'}{y+a}$; man hat dann y ganzzahlig so zu wählen, daß $y+a$ ein Teiler von d' ist; dann ist auch x ganzzahlig.

Beispiel: Man soll zwei positive ganze Zahlen suchen, deren Summe nebst ihrem Produkt 47 ausmacht.

Nennt man die Zahlen x und y, so soll sein:

$x + y + xy = 47$; hieraus

$$x = \frac{47-y}{1+y} = \frac{-y+47}{y+1} = -1 + \frac{48}{y+1}.$$

Es muß also $y+1$ ein Teiler von 48 sein, also $y+1=1$ oder $y+1=2$, oder $y+1=3$, oder $y+1=4$ u. s. w.

also $y = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 15;\ 23;\ 47$; hiezu wird

$x = 47;\ 23;\ 15;\ 11;\ 7;\ 5;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0.$

---

49. Die Summe zweier positiven ganzen Zahlen ist 30 mal größer als die Summe ihrer reziproken Werte; wie heißen die Zahlen?

50. Durch welche ganzzahligen Wertepaare wird die Gleichung $x + xy - y^2 = 5$ erfüllt?

51. Durch welche positiven ganzzahligen Wertepaare wird die Gleichung $x^2 - 3xy + 2x + 5y - 3 = 0$ erfüllt?

52. Durch welche ganzzahligen Werte von x und y wird die Gleichung $x^2 - xy + 7x - 2y - 32 = 0$ erfüllt?

53. In einer arithmetischen Reihe, deren Differenz $= 1$, deren Summe $= 100$ ist, soll das Anfangsglied und die Gliederzahl so bestimmt werden, daß sie positive ganze Zahlen sind. Wie heißt die Reihe?

54. In einer arithmetischen Reihe, deren Differenz $= 3$ und deren Summe $= 90$ ist, sollen a und n so bestimmt werden, daß sie positive ganze Zahlen sind. Wie heißt die Reihe?

55. Zu 37 (39, 45) soll das Quadrat einer Zahl addiert werden, so daß wieder ein Quadrat entsteht. (Anleitung: Die Differenz der Quadrate der Unbekannten läßt sich als Produkt darstellen, dessen einzelne Faktoren den Faktoren der bekannten Zahl gleichzusetzen sind).

56. Drei ganze Zahlen sollen angegeben werden, so daß die Summe der Quadrate der zwei ersten gleich dem Quadrate der dritten ist.

Aufl. $x^2 + y^2 = z^2$; hieraus

$$x = \sqrt{(z + y)(z - y)}.$$

Man muß also für $z + y$ und $z - y$ zwei Zahlen wählen, deren Produkt ein Quadrat ist; sie müssen also entweder 1. selbst Quadrate sein, oder 2. die Primfaktoren der einen müssen die Primfaktoren der anderen zu Quadraten ergänzen.

ad 1. Beispiel: $z + y = 81$; $z - y = 49$; dies giebt $z = 65$; $y = 16$; $x = 63$, und es ist $63^2 + 16^2 = 65^2$.

ad 2. Beispiel: $z + y = 3 \cdot 49$; $z - y = 3 \cdot 25$; hieraus $z = 111$; $y = 36$; $x = 105$.

Beschränkung. Da die für $z + y$ und $z - y$ zu wählenden Zahlen, sowohl in Summe, als in Differenz je eine gerade Zahl geben sollen, so müssen entweder beide gerade oder beide ungerade sein.

22. III. 95

$$\frac{(a-x)^2}{(x-b)^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2} \qquad x_1 - x_2 = 2ab$$

$$x_1 + x_2 = a^2 + b^2$$

$(a - x$

$a - x = x - b$

Vögl

Winter, Wilhelm

Algebra Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen

München 1891